Problema:

Compania X importă componente electronice şi asamblează două tipuri de computere PC_1 şi PC_2. Vânzarea unui PC_1 (respectiv PC_2) aduce un profit de $50 (respectiv $40). Un PC_1 are nevoie de 3 ore pentru asamblare iar un PC_2 necesită 5 ore. Pentru următoarea săptămână sunt disponibile 150 ore pentru asamblare. Compania are în stoc numai 20 monitoare PC_2; altfel spus, în următoarea săptămână ea nu poate produce mai mult de 20 unităţi PC_2. Pentru depozitare un PC_1 are nevoie de 8u.a. (unităţi de arie) iar un PC_2 de 5u.a. Spaţiul disponibil pentru depozitarea producţiei din următoarea săptămână însumează 300u.a. Cererea este suficient de mare pentru ca întreaga producţie să fie vândută. Conducerea companiei este interesată în elaborarea unui program de producţie pentru următoarea săptămână care să-i aducă un profit maxim.

Rezolvare:

1. Modelarea matematica

Ştim că soluţiile problemei sunt diferitele programe de producţie realizabile din resursele date. În primul rând vom avea nevoie de o reprezentare matematică a unui program de producţie. Dacă notăm:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv \text{numarul de unitati } PC_1 \\ x_2 \equiv \text{numarul de unitati } PC_2 \end{array}\right\} \text{ ce vor fi realizate în următoarea săptămână,}$$

atunci cuplul (x_1, x_2) va fi reprezentarea dorită.

Orice cuplu de numere (x_1, x_2) reprezintă un program posibil de producţie? Evident că nu; o primă cerinţă naturală este:

$$(1)\ x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

$x_1 = 0$ sau $x_2 = 0$ semnificând opţiunea firmei de a nu produce PC_1 sau PC_2.

Pentru asamblarea a x_1 unităţi PC_1 sunt necesare $3x_1$ ore; cele x_2 unităţi PC_2 au nevoie de $5x_2$ ore. Realizarea programului (x_1, x_2) ar necesita, pentru asamblare, un total de $3x_1 + 5x_2$ ore. Deoarece fondul disponibil de timp de asamblare este limitat la 150 ore, urmează că o condiţie de realizabilitate a programului (x_1, x_2) este:

$$(2)\ 3x_1 + 5x_2 \leq 150$$

Stocul limitat de monitoare PC_2 impune condiţia:

$$(3)\ x_2 \leq 20$$

Pentru depozitarea produselor finite este necesară o suprafaţă măsurând $8x_1 + 5x_2$ u.a. Limitarea spaţiului de depozitare inplică cerinţa:

$$(4)\ 8x_1 + 5x_2 \leq 300$$

Recapitulând, condiţiile (1) – (4) sunt necesare şi suficiente – în situaţia dată – pentru ca un cuplu de valori numerice (x_1, x_2) să reprezinte un program de producţie realizabil. Cu alte cuvinte, soluţiile admisibile ale problemei "firmei de calculatoare" se identifică cu acele cupluri (x_1, x_2) care satisfac condiţiile (1) – (4).

Profitul rezultat din vânzarea unităţilor produse prin programul (x_1, x_2) este exprimat prin funcţia obiectiv:

$$(5)\quad f = 50x_1 + 40x_2$$

Diferitele programe posibile vor fi apreciate prin valoarea pe care o dau acestei funcţii.

Şi astfel, problema din exemplul are următoarea „traducere”:

În mulţimea cuplurilor de valori numerice care satisfac condiţiile (1) – (4) să se determine cuplul (x_1^*, x_2^*) *care dă funcţiei obiectiv (5) cea mai mare valoare posibilă.*

Sintetizăm această traducere prin notaţia:

$$(6)\quad \begin{cases} \max f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

şi vom spune că ansamblul **(6) este modelul matematic al problemei „firmei de calculatoare”.**

2. Rezolvare

   a. Grafica

Pentru un asemenea program (2 variabile) avem posibilitatea vizualizării mulţimii soluţiilor sale admisibile identificând x_1 şi x_2 cu **abscisa** respectiv **ordonata** unui punct dintr-un plan raportat la un sistem de axe.Sunt necesare câteva rudimente de geometrie analitică.

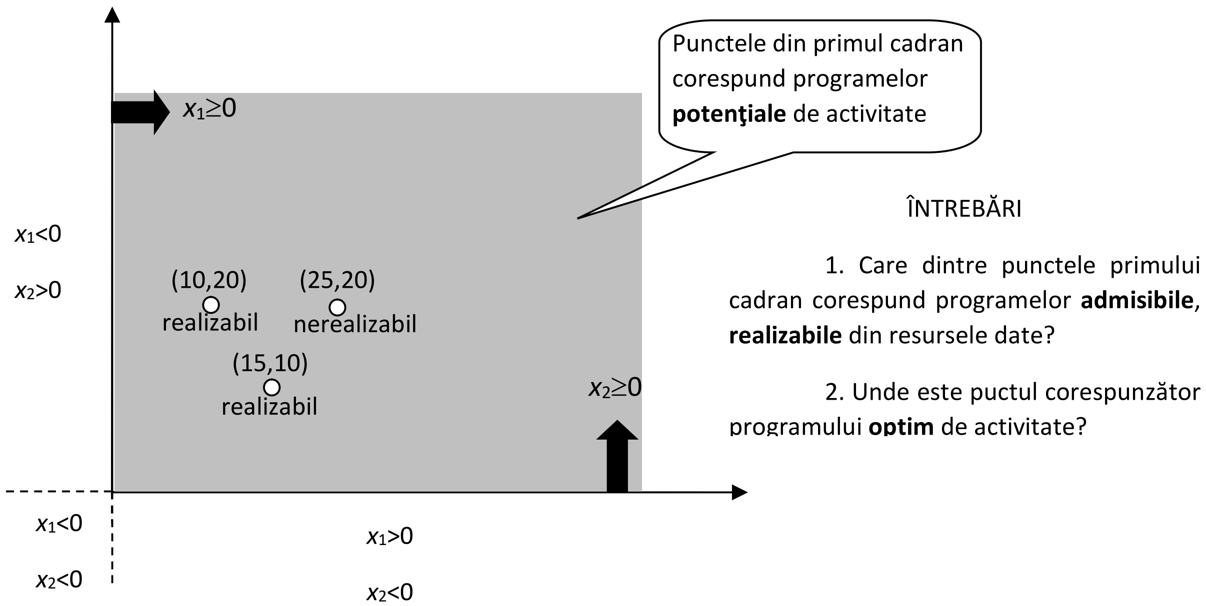

Figura 1

Având în vedere semnificaţia variabilelor x_1, x_2 punctele (x_1, x_2) în care $x_1<0$ sau $x_2<0$ nu au nici o interpretare economică logică. În schimb, punctele (x_1, x_2) cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ se pot identifica, firesc, cu programele **potenţiale** de activitate pentru următoarea săptămână. Astfel:

- Punctul (15,10) corespunde „intenţiei” firmei de a produce 15 unităţi PC_1 şi 10 unităţi PC_2. Intenţia este chiar **realizabilă**, cele trei resurse avute în vedere – timp pentru asamblare, monitoare PC_2 şi spaţiul de depozitare – fiind mai mult decât suficiente:

  - necesar de timp pt. asamblare $\equiv 3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 85 < 150 \equiv$ timp **disponibil** pt. asamblare;

  - necesar monitoare $PC_2 \equiv 10 < 20 \equiv$ **disponibil** monitoare PC_2;

  - necesar spaţiu de depozitare $\equiv 8 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 170 < 300 \equiv$ spaţiu **disponibil** pentru depozitare.

  În caz de adoptare, acest plan ar aduce firmei un profit de $50 \cdot 15 + 40 \cdot 10 =$ \$1150.

- Punctul (10,20) corespunde unei alte propuneri realizabile de program de activitate chiar mai bună decât precedenta deoarece ar aduce un profit superior: $50 \cdot 10 + 40 \cdot 20 =$ \$1300. Acest plan ar utiliza integral resursa “monitoare PC_2”.

- În schimb, punctul (25,20) reprezintă o propunere de plan potenţială dar nerealizabilă deoarece timpul necesar pentru asamblare ar depăşi timpul disponibil: $3 \cdot 25 + 5 \cdot 20 = 175 > 150$ (celelalte două resurse ar fi utilizate integral)

Se ridică firesc întrebările:

I) Care sunt punctele corespunzătoare „intenţiilor” de plan realizabile? Cum arată mulţimea lor?

II) Unde se găseşte punctul corespunzător programului realizabil cu cel mai mare profit (programul optim) şi cum se găseşte el?

III) Ce învăţăminte s-ar putea trage pentru cazul general (mai mult de două variabile)?

I) Răspundem la prima întrebare.

Determinăm punctele (x_1, x_2) cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ care satisfac prima restricţie din : $3x_1 + 5x_2 \leq 150$. Pentru aceasta reprezentăm în plan dreapta de ecuaţie $3x_1 + 5x_2 = 150$ - vezi figura 2. Punctele acestei drepte in care $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ corespund „intenţiilor de plan” care utilizează integral timpul disponibil pentru asamblare. Din acest motiv, dreapta de ecuaţie $3x_1 + 5x_2 = 150$ se va numi în continuare dreapta „asamblare”.

Punctele (x_1, x_2) care satisfac inegalitatea $3x_1 + 5x_2 \leq 150$ constituie unul din cele două semiplane determinate de dreapta „asamblare"! Pentru identificarea lui va fi suficient să luăm un punct nesituat pe dreaptă – de exemplu origina (0,0) – şi să testăm satisfacerea restricţiei de către coordonatele punctului ales.În caz afirmativ, reţinem semiplanul care conţine punctul, altminteri reţinem celălalt semiplan. Programele potenţiale care satisfac prima restricţie sunt vizualizate în figura 3.

.

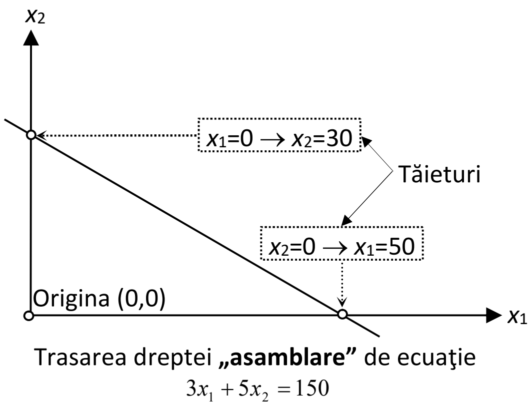

Figura 2

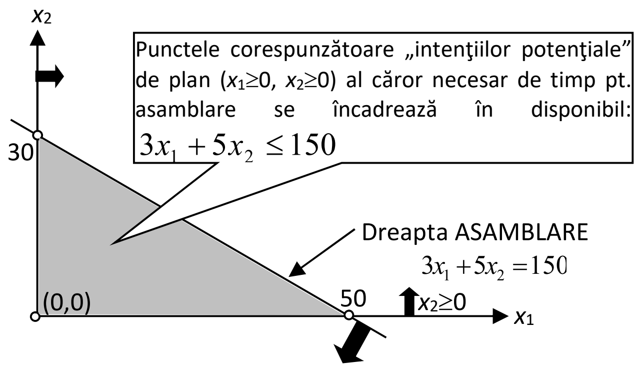

Figura 3

Procedăm analog şi cu celelalte două restricţii – vezi figurile 4 şi 5

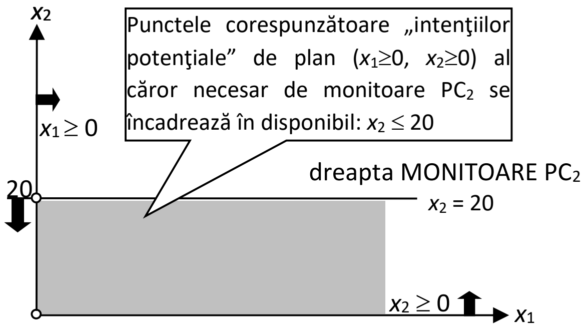

Figura 4

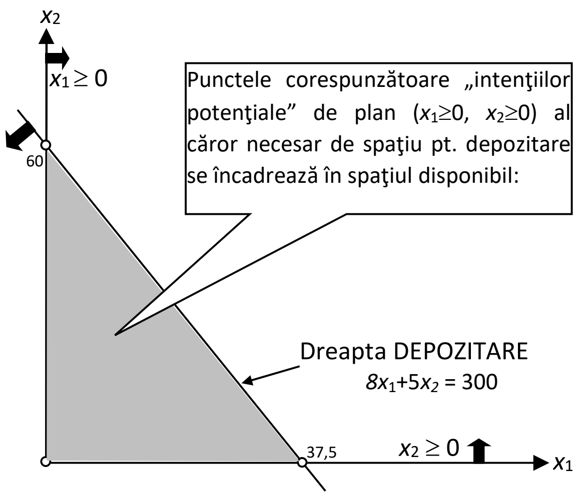

Figura 5

Recapitulând, în figurile 1, 3, 4 şi 5 apar mulţimile de puncte (x_1, x_2) ale căror coordonate satisfac – separat! – condiţiile de nenegativitate şi restricţiile programului (P_1). Partea lor comună, adică **intersecţia**, este formată din punctele care satisfac **simultan** toate aceste condiţii.

În figura 6 este vizualizată această intersecţie; ea este mulţimea hasurată OABCD. Punctele ei sunt exact soluţiile admisibile ale programului şi corespund propunerilor de plan, realizabile din resursele date.

II) În continuare răspundem la a doua întrebare.

Dând funcţiei obiectiv f o valoare oarecare, de exemplu 1300, ne putem întreba ce semnificaţie au punctele (x_1, x_2) - fireşte cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ - situate pe dreapta:

$$f = 1300 \quad \Leftrightarrow \quad 50x_1 + 40x_2 = 1300$$

Natural, aceste puncte corespund „intenţiilor de plan” care ar aduce firmei un profit de \$1300 – fireşte în cazul în care această intenţie ar fi şi realizabilă.

Pentru a vedea dacă firma poate realiza un profit de \$1300 din resursele date, cercetăm dacă dreapta “f = 1300” intersectează mulţimea $\mathcal{A}$ a programelor de producţie realizabile. Din figura 7 rezultă că există chiar o infinitate de programe realizabile care ar conduce la acest profit. Se poate obţine un profit

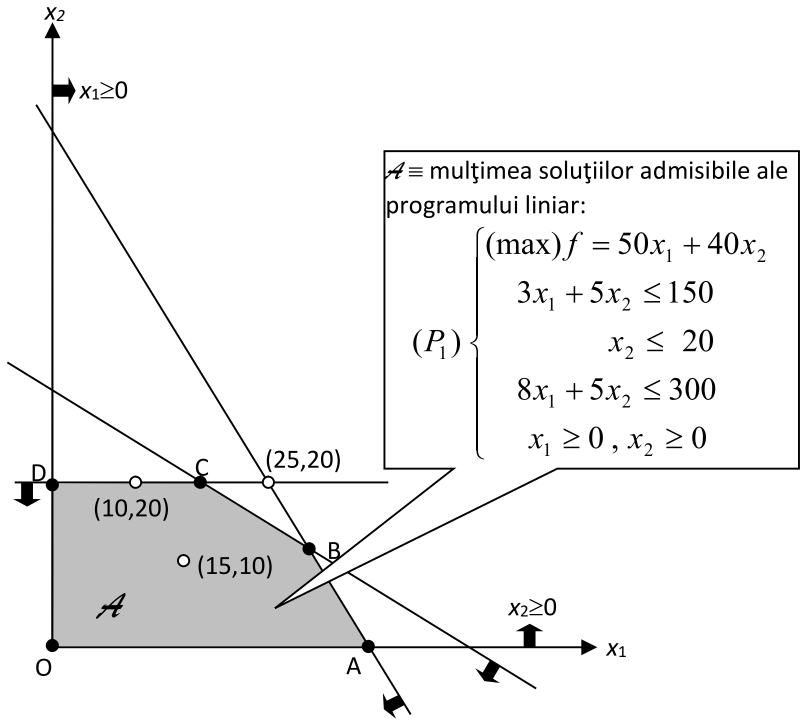

Figura 6

dublu? Din aceeaşi figură rezultă că dreapta $f = 2600 = 50x_1 + 40x_2$ nu mai intersectează $\mathcal{A}$ şi în consecinţă \$2600 nu pot fi câştigaţi din resursele date!

Pentru a vedea cât de mare este profitul ce poate fi realizat, translatăm dreapta f = 1300 către dreapta f = 2600 oprindu-ne în momentul în care “se pierde” intersecţia cu mulţimea soluţiilor admisibile $\mathcal{A}$.Din figura 7 rezultă că dreapta “profit maxim” trece prin punctual B, punct ce reprezintă soluţia optimă a problemei.

Programul realizabil reprezentat de punctual B, program care ar aduce firmei cel mai mare profit posibil, se află la intersecţia dreptelor “asamblare” şi “spaţiu de depozitare”; prin urmare acest plan necesită consumarea integrală a resurselor sus amintite.

Componentele programului optim ≡ coordonatele punctului B se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 150 \\ 8x_1 + 5x_2 = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^* = 30 \text{ unitati } PC_1 \\ x_2^* = 12 \text{ unitati } PC_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{ profitul maxim } f^* = \$1980$$

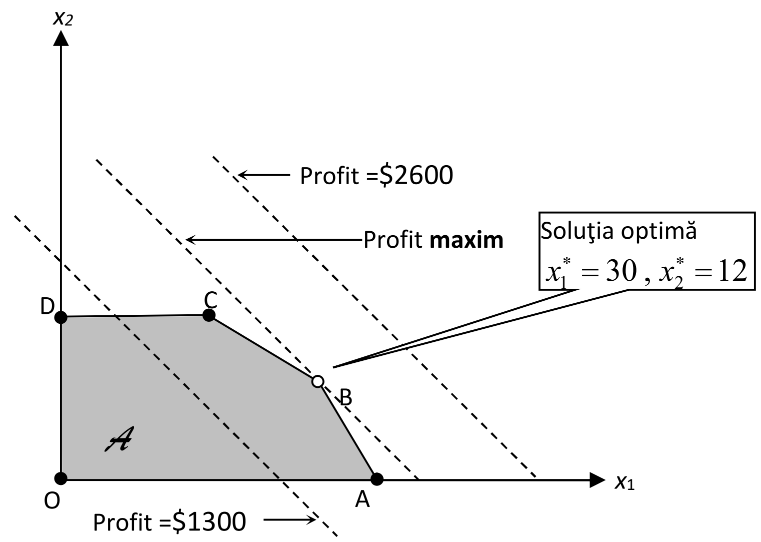

Figura 7

b. Rezolvare cu algoritmul simplex:

Forma sa standard:

$$(P)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ \quad\quad x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \end{cases} \Rightarrow (FSP)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 150 \\ x_2 + x_4 = 20 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_5 = 300 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \cdots, 5 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 + 0\cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \end{cases}$$

Matricea A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^1 \; A^2 \; A^3 \; A^4 \; A^5$$

este în formă bună având baza unitară admisibilă $E = \left[A^3 \quad A^4 \quad A^5\right]$. Tabelul simplex asociat acestei baze arată astfel:

			50	40	0	0	0
CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	150	3	5	1	0	0
0	x_4	20	0	1	0	1	0
0	x_5	300	8	5	0	0	1
	f	0	-50	-40	*	*	*

CB	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
			50	40	0	0	0	
0	x_3	150	3	5	1	0	0	150:3 = 50
0	x_4	20	0	1	0	1	0	—
0	x_5	300	$\boxed{8}$	5	0	0	1	300:8 = 37,5
	f	0	-50	-40	*	*	*	
0	x_3	75/2	0	$\boxed{25/8}$	1	0	-3/8	75/2 : 25/8 = 12
0	x_4	20	0	1	0	1	0	20 : 1 = 20
50	x_1	75/2	1	5/8	0	0	1/8	75/2 : 5/8 = 60
	f	1875	*	-35/4	*	*	25/4	
40	x_2	12	0	1	8/25	0	-3/25	
0	x_4	8	0	0	-8/25	1	3/25	
5	x_1	30	1	0	-1/5	0	1/5	
	f	1980	*	*	14/5	*	26/5	

ITERAŢIA 1

Baza: $B^1 = \left[A^3, A^4, A^5\right]$.

Soluţia asociată: $x(B^1) = (0,0,150,20,300)$, f=0

$\bar{c}_1 < 0, \bar{c}_2 < 0 \rightarrow$ criteriul de optim nu este verificat.

În bază intră A^1 şi iese A^5.

ITERAŢIA 2

Baza: $B^2 = \left[A^3, A^4, A^1\right]$. Soluţia asociată:

$x(B^2) = (75/2, 0, 75/2, 20, 0)$, f=1875

$\bar{c}_2 < 0 \rightarrow$ criteriul de optim nu este verificat.

În bază intră A^2 şi iese A^3.

ITERAŢIA 3

Baza: $B^3 = \left[A^2, A^4, A^1\right]$. Soluţia asociată:

$x(B^3) = (30, 12, 0, 8, 0)$, f=1980

Criteriul de optim este verificat $\rightarrow$ soluţia curentă este optimă.

3. Interpretare economica:

Conţinutul economic al variabilelor de abatere x_3, x_4, x_5 derivă nemijlocit din semnificaţiile restricţiilor în care sunt introduse. Astfel:

$$x_3 = \underbrace{150}_{\text{Fondul de timp } \textbf{disponibil} \text{ pentru}} - \underbrace{(3x_1 + 5x_2)}_{\textbf{Necesarul} \text{ de timp pentru asamblarea cantităţilor } x_1,\, x_2 \text{ de produse finite}} = \text{Fondul de timp pentru asamblare } \textbf{neutilizat}$$

Analog:

$x_4 = 20 - x_2 \equiv$ monitoare PC_2 **rămase în stoc**

$x_5 = 300 - (8x_1 + 5x_2) \equiv$ spaţiul de depozitare **nefolosit**

Ştiind că:

$$x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 8 \quad x_5^* = 0 \quad (\max) f = 1980$$

este soluţia optimă a formei standard, cuplul $x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12$ reprezintă soluţia optimă a programului original (P) iar 1980 este valoarea maximă a funcţiei obiectiv. În termeni economici , programul optim de activitate al firmei pentru următoarea săptămână ar consta în asamblarea a 30 unităţi PC_1 şi a 12 unităţi PC_2 cu un profit maxim de \$1980. În plus $x_3^* = 0$ şi $x_5^* = 0$ arată că acest program ar utiliza integral fondul de timp pentru asamblare şi spaţiul de depozitare în timp ce $x_4^* = 8$ arată că în stoc ar mai rămâne 8 monitoare PC_2 ce ar putea fi folosite în altă perioadă de planificare.