

CAPITOLUL 4

CO-EVOLUȚIE, DISIPAȚIE ȘI HAOS ÎN SISTEMELE ADAPTIVE COMPLEXE

Sistemele adaptive complexe prezintă, deci, multiple interacțiuni și conexiuni cu ajutorul cărora formează rețele complexe ce pot fi caracterizate cu ajutorul anumitor indicatori și modele de evoluție. Strâns legată de această proprietate este co-evoluția sistemelor adaptive complexe, înțeleasă ca evoluția unui sistem care este parțial dependentă de evoluția altui sistem sau a unui subsistem al unui sistem adaptiv complex. În sistemele economice, co-evoluția este orientată în special către evoluția interacțiunilor dintre sisteme care determină modificări de stare și comportamentele entităților co-evolutive. Co-evoluția a fost observată pentru prima oară în domeniul ecosistemelor naturale. De exemplu, în biologia marină, ecosistemele sunt considerate ca fiind formate din „toate tipurile de organisme care, ca părți ale mediului lor, au interacțiuni cu alte organisme de același tip sau de tipuri diferite.” În economie, un ecosistem înseamnă toate afacerile care sunt interdependente în cadrul aceleiași industrii sau a unor industrii diferite și care au influență sau sunt influențate de o organizație. Un astfel de cosistem poate include mediul cultural, geografic și economic, care includ, la rândul lor, guvernul și alți actori instituționali.

O modalitate de a gândi co-evoluția în cadrul unui astfel de ecosistem, numit și de afaceri, este în funcție de peisajele fitness (fitness landscapes). Adaptarea unui sistem schimbă fitnessul, ca și peisajul fitness al sistemelor interdependente care deci co-evoluiează cu primul sistem deoarece și ele schimbă fitnessul și peisajul fitness al acestuia.

Co-evoluția trebuie deosebită de evoluție. Astfel, în sistemele evolutive complexe selecția acționează doar asupra întregului sistem, ea nefiind prezentă în cazul fiecărei componente. În sistemele co-evolutive, componentele sistemului sunt afectate și selecția poate acționa la nivelul părților ca și a întregului sistem. Mai mult, există o diferență fundamentală între evoluția adaptivă și coevoluție. În ambele cazuri, atractorii procesului „adaptiv” sunt local optimali și reprezintă un singur punct. În procesul co-evoluției, peisajul adaptiv al unui actor se modifică și se deformează atunci când alți actori efectuează propriile lor mișcări adaptive. Dar co-evoluția nu se limitează doar la atingerea punctelor atractor care sunt local optime ci la optimizarea întregului sistem în raport cu mediul sau fitness.

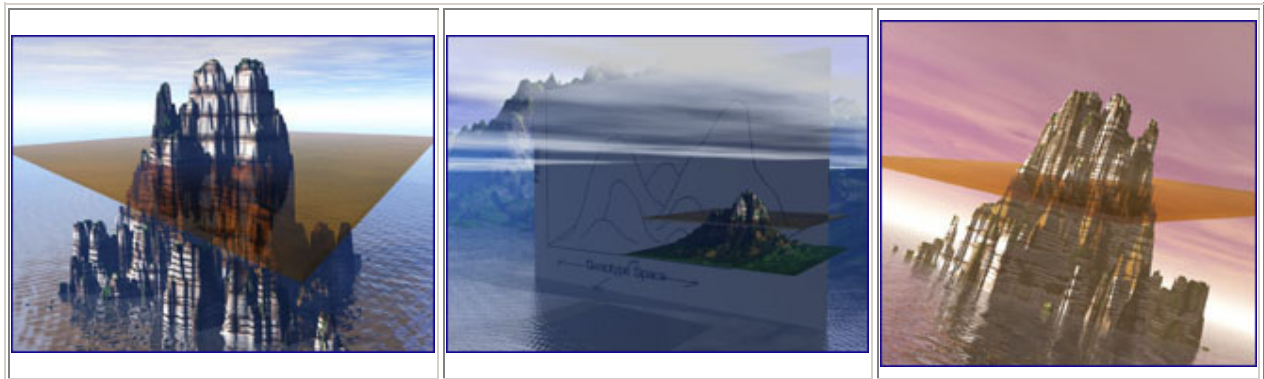
Uneori acest lucru este posibil, alteori însă nu.

4.1 Definiții și forme de manifestare ale co-evoluției

Termenul de **co-evoluție** își are originea în biologie, referindu-se la schimburile succesive dintre (doua sau mai multe) specii interdependente, dar unice astfel încât traiectoriile lor de evoluție interferează în timp, adaptându-se una la alta. Aceasta

determină un ecosistem de specii parțial interdependente care se adaptează împreună. Interdependența poate fi **simbiotică** (speciile se ajută una pe alta), **dominatoare** (o specie are un avantaj asupra alteia) sau **competitivă** (o specie o alungă pe alta, sau ambele specii pot evolua în nișe distincte, necompetitive). Un tip particular de interdependență simbiotică este, de exemplu, cursa înarmărilor, care este o relație de tip pradă-prădător.

Ecosistemele sunt vizualizate ca având **peisaje fitness** (fitness landscapes) unde terenul muntos cu vârfurile cele mai înalte reprezintă strategiile de supraviețuire cele mai de succes. Cu cât mai neted este peisajul fitness, cu atât există mai puține diferențieri dintre competitori și mai puțină incertitudine a schimbării (Figura 4.1).



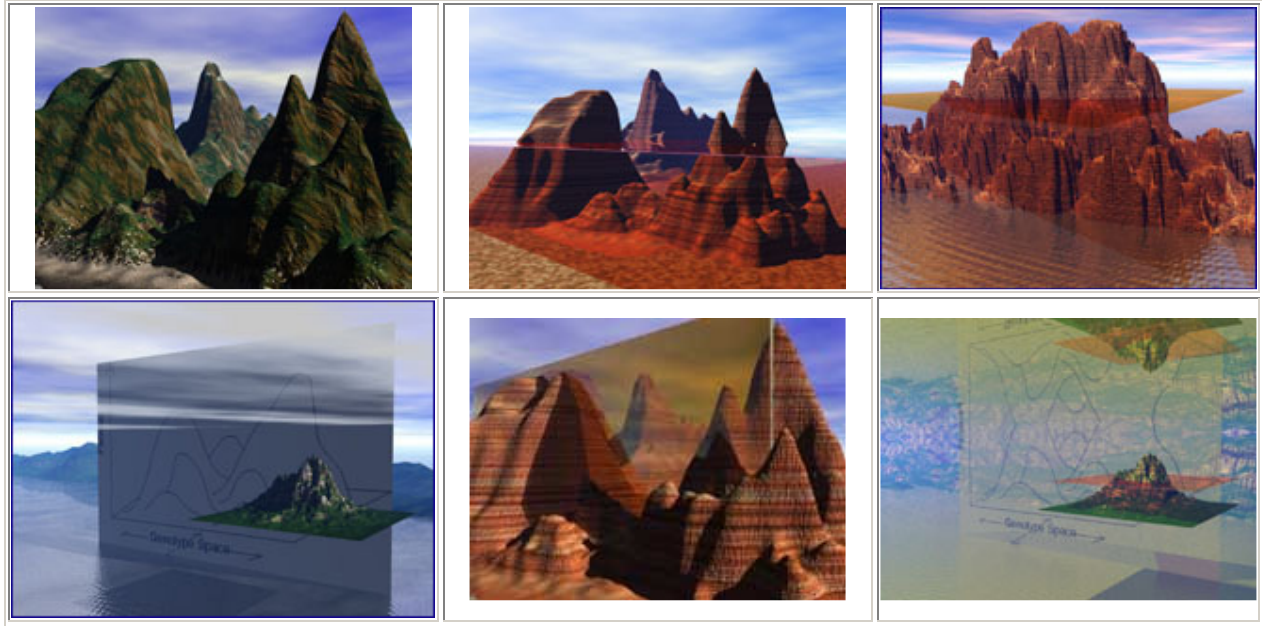


Figura 4.1

Stuart Kauffman descrie co-evoluția ca o relație în care un partener deformează peisajul fitness al celui de-al doilea partener și invers, rezultând un anumit tip de interdependență prin schimbarea fitnessului ambilor parteneri. **Baum** (1999) vorbește despre sisteme co-evolutive competitive, parțial competitive, sinergice și interdependente.

Co-evoluția, ca o extensie a evoluției, poate fi definită astfel: *“Co-evoluția este o schimbare evolutivă reciprocă între specii interactive”*. În această viziune, firmele care sunt active pe o piață caută un echilibru între exploatare și eforturile de explorare în timp pentru a rămâne competitive la circumstanțele din mediu care se schimbă.

Aceste eforturi sunt reflectate de înzestrarea firmei, care include nivelul de cunoștințe din cadrul firmei, capital, platformele tehnologice, capacitățile umane, ca și caracteristicile industriei.

Studierea schimbării ce are loc la nivele multiple reprezintă elementar esențial al abordării co-evolutive. *“Teoria presupune că organizațiile, industriile și mediul co-evoluază”* într-o modalitate multi-direcțională (Lewin ș.a., 1999).

Acest proces de co-evoluție organizație-mediu poate fi modelat ca un peisaj NK (Kauffman, 1993). În această clasă de modele, caracteristicile competitive ale entităților adaptive (organizații, firme etc.) sunt reflectate într-un peisaj topologic care definește contribuția fitness relativă a fiecăreia dintre respectivele caracteristici. Prin introducerea unui parametru suplimentar, modelul NKC arată cum schimbările în nivelele fitness organizaționale rezultă din schimbările în peisajul însăși.

Co-evoluția are loc întotdeauna în cadrul unui ecosistem. Un ecosistem presupune că *“fiecare tip de organism are, ca parte a mediului său înconjurător, alte organisme de același tip și de tipuri diferite”*. În context organizațional, un ecosistem social presupune toate afacerile care sunt legate unele de altele, în cadrul aceluiași sau mai multor industrii, care au o influență asupra organizației și sunt influențate de organizația studiată. Ecosistemul social include mediul economic, cultural și geografic, care include guvernul și alți actori instituționali.

Există o diferență fundamentală între evoluție și co-evoluție. În procesele de evoluție, selecția acționează doar în cadrul unui

sistem considerat ca un întreg, componentele acestuia ne replicându-se. În procesele co-evolutive, componentele sistemului se replică, *“și astfel selecția poate acționa atât la nivelul părților unui sistem cât și la nivelul sistemului ca un întreg”*. Cu alte cuvinte, co-evoluția afectează atât indivizii cât și sistemele.

Acest principiu se aplică tuturor sistemelor complexe. Co-evoluția care are loc la nivelul întregului sistem se numește **co-evoluție endogenă**, iar co-evoluția de la nivelul indivizilor sau grupurilor, **co-evoluție exogenă**. Desigur că o astfel de dihotomie reprezintă o simplificare – atât procesele endogene cât și cele exogene sunt interdependente și limitele între organizație și mediul său înconjurător nu sunt clar și stabil determinate. De aceea, noțiunea de “ecosistem” se aplică atât organizației cât și mediului înconjurător al acesteia.

Conectivitatea și interdependența propagă efectele acțiunilor, deciziilor și comportamentelor prin ecosistem, dar această propagare sau influență nu este uniformă. Acțiunile și comportamentele diferă de la individ la individ, ca și în timp și în context. Co-evoluția poate fi dependentă de influențele reciproce dintre entități.

Creșterea interesului pentru co-evoluție în științele economice în ultimul deceniu se datorează faptului că este aproape imposibil să înțelegi comportamentul și performanțele unei organizații fără să studiezi cum se schimbă mediul său înconjurător (Murmans, 2003).

Co-evoluția poate fi utilizată pentru a explica diferitele tipuri de interacțiuni: **biologic-cultural, ecologic-economic, producție-**

consum, tehnologie-preferințe, genetic uman-cultural ș.a. Co-evoluția a jucat un rol important în înțelegerea emergenței formelor birocratice de organizare ale economiei în epoca industrializării, în explicarea interacțiunilor dinamice dintre selecție și adaptare la nivelul piețelor etc. Recent, conceptual de co-evoluție a fost aplicat în studiul schimbărilor tehnologice și dezvoltarea firmelor (Lewin, Nelson).

Norgaard a introdus primul co-evoluția într-un context socio-economic, interpretând-o ca reflectând feedback-urile pe termen lung care apar între principalele subsisteme: cunoaștere, valoare, organizare, tehnologie și mediu. Variația din cadrul fiecărui subsistem determină o influență puternică asupra condițiilor de selecție cu care alte subsisteme operează. Au fost elaborate diferite teorii co-evoluționiste în economie. De exemplu, teoria lui Murmann (2003) leagă dinamicile instituționale, tehnologice și naturale.

Lewin (1999) prezintă o teorie similară a co-evoluției organizațiilor și mediilor instituționale și extra-instituționale, presupunând modele de schimbare distincte și interdependente.

Lewin și Volberda (1999) prezintă proprietățile esențiale ale co-evoluției și, pe baza a ceea ce deosebește abordarea co-evolutivă de alte tipuri de abordări, stabilește principalele elemente care trebuie să fie considerate prin aplicarea perspectivei co-evoluționiste. Aceste elemente sunt următoarele:

(1) utilizarea seriilor de timp longitudinale pentru studiul adaptării organizațiilor pe o perioadă lungă de timp;

(2) examinarea adaptării organizației într-un context istoric pentru sistem și mediul său înconjurător;

(3) luarea în considerare a cauzalității multidimensionale între macro și micro-evoluție și între acestea și alte elemente ale sistemului;

(4) încorporarea efectelor reciproce, simultane, întârziate și intermediare care pot produce schimbări contraintuitive în variabilele afectate;

(5) considerarea dependenței de traiectorie, care permite și restricționează adaptarea la nivel de firmă și la nivelul populației;

(6) încorporarea schimbărilor care apar la nivelul diferitelor sisteme instituționale care afectează firmele și industriile;

(7) luarea în considerare a macrovariabilelor economice, sociale și politice care se pot schimba în timp și influențează structura adâncă în care micro și macro-structura evoluează, identificând și încorporând efectele acestora.

4.2 Co-evoluția și peisajul fitness

Noțiunea de **peisaj** (landscape) reprezintă o analogie cu peisajul terestru care este funcție de latitudine x și longitudine y . Atunci o funcție $f(x,y)$ reprezintă altitudinea.

Metafora peisajului este utilizată astăzi în multe discipline științifice în care optimizarea unei funcții de cost reprezintă un scop important. O astfel de funcție de cost poate depinde de orice număr

de variabile, de exemplu distanțe, dimensiuni, consumuri etc., ceea ce face ca ea să depindă de mai multe coordonate spațiale.

Noțiunea de **peisaj fitness** (fitness landscape) a fost introdusă de biologul S. Wright în 1932 ca o modalitate de vizualizare a evoluției Darwiniene prezentat ca un proces de optimizare. Mecanismul Darwinian al selecției operează asupra unei populații de-a lungul mai multor generații. El este bazat pe variația genetică a indivizilor datorită mutației, recombinării și selecției indivizilor cu cel mai mare succes reproductiv. Succesul reproductiv al unui genotip I este măsurat în funcție de valoarea fitness f care măsoară, în acest caz, numărul de descendenți (fertili) din următoarea generație.

Conceptul de peisaj fitness (fitness landscape) sau aplicație fitness Φ asignează o valoare fitness f_k pentru fiecare genotip I_k :

$$\Phi(I_k) = f_k$$

Genetica populației descrie evoluția unei populații prin intermediul dependenței temporale în distribuția genotipurilor. La momentul t genotipul I_k se presupune că este prezent cu o frecvență $x_k(t)$ într-o populație de N indivizi distribuiți pe n tipuri sau variante. Frecvențele îndeplinesc condiția:

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1$$

și, pentru reproducția asexuată, avem:

$$\frac{dx_k}{dt} = x_k (f_k - \bar{f})$$

unde

$$\bar{f} = \sum_{k=1}^n x_k f_k$$

reprezintă fitnessul mediu al populației.

Varianța fitnessului, $\text{var}\{f\}$ este dată de relația:

$$\text{var}\{f\} = \bar{f} - (\bar{f})^2$$

și este nenegativă. Acest lucru arată că fitnessul mediu este o funcție ce poate fi optimizată. Frecvența indivizilor cu fitnessul mai mare decât media, $f_k > \bar{f}$, crește; pentru acele genotipuri care sunt mai puțin productive decât media, $f_k < \bar{f}$, ea descrește până când ele se sting. Acest proces continuă până când fitnessul mediu, \bar{f} atinge valoarea sa maximă deoarece toate variantele, cu excepția celor măsurate, s-au stins.

Peisajul fitness este utilizat în reprezentarea interacțiunilor dinamice dintre sistemele complexe. Sistemele co-evolutive sunt sisteme cuplate, deci mișcarea lor de-a lungul unui peisaj fitness schimbă peisajul fitness al altui sistem. Mecanismele prin care sistemele sunt interdependente în cursul evoluției lor sunt competiția, cooperarea și inovarea.

Kauffman a fost primul care a plasat peisajul fitness într-un context dinamic, utilizând pentru aceasta rețelele booleene. El explică faptul că neregularitățile din peisajul fitness apar ca un rezultat natural al evoluției lor adaptive. *„Evoluția adaptivă apare în general printr-o acumulare succesivă de variații minore în fenotip. ... pe măsură ce structura lor internă se modifică, unele sisteme își schimbă comportamentul relativ lent și altele relativ radical. Deci ne confruntăm cu problema dacă evoluția selectivă este capabilă să „regleze” structura sistemelor complexe astfel încât ele să evolueze într-adevăr”* (Kauffman, 1993).

Un sistem adaptiv complex se **„deplasează”** în peisajul său fitness utilizând în acest scop mecanisme diferite. Unul dintre aceste mecanisme este **căutarea adaptivă**, care constă în efectuarea de mici pași în sus și în jos, de-a lungul peisajului și urmărirea efectelor acestor pași asupra întregului sistem. Căutarea adaptivă este eficientă în găsirea celui mai înalt punct din peisaj în cazul unor sisteme slab cuplate; astfel se poate ajunge ușor la un vârf local.

Un alt mecanism este cel de **tatonare**, care este o variantă a mecanismului anterior în care mișcarea de-a lungul peisajului este efectuată prin evaluarea efectelor modificării unor mici componente ale sistemului (de exemplu, deciziile de la nivelul subsistemelor pot afecta fitnessul întregului sistem). Un astfel de algoritm îmbunătățește fitnessul obținut după o căutare adaptivă, deoarece el permite configurațiilor locale să se modifice în moduri care sunt suboptimale pe termen scurt dar schimbă mediul unor componente

locale, ceea ce permite întregului sistem să atingă o soluție mai bună după un mare număr de modificări. Drept rezultat, sistemul poate să se deplaseze către vârfuri superioare, non-locale ale fitnessului.

Un al treilea mecanism este cel al **salturilor** care nu este legat de efectuarea unor mișcări mici de-a lungul peisajului fitness. În sistemele dinamice din natură astfel de salturi pot apărea prin accidente de mediu sau recombinare sexuală. În sistemele economice, salturile pot fi determinate de schimbarea legislației care poate fi făcută deliberat prin transformări legislative, cum ar fi apariția unor noi legi care schimbă mediul de afaceri.

4.3 Modele ale co-evoluției

După cum am arătat mai sus, **S. Kauffman** a utilizat rețelele booleene în studiul peisajului fitness al sistemelor adaptive complexe. Ideea sa de bază constă în faptul că sistemele biologice sunt compuse din agenți autonomi sau sisteme auto-reproducătoare care efectuează activități de „reconstrucție și propagare a organizației” (Kauffman, 2000, p. 5). Un accent deosebit este pus pe reconstrucție și co-evoluție deoarece buclele feedback care îi fac pe agenți să se adapteze la alți agenți în același timp modifică și mediul înconjurător al acestora.

Co-evoluția și efectele indirecte asupra mediului sunt ambele manifestări ale rețelelor interdependente.

În **modelul NK**, Kauffman studiază co-evoluția speciilor, cuplând influența genelor unei specii asupra genelor altor specii. Modulul de bază al modelului NK este reprezentat de un organism cu N gene, fiecare dintre acestea având două alele, 0 și 1. Contribuția fiecărei gene la fitnessul sistemului depinde de alela unei gene și alelele a K dintre celelalte gene din cadrul genomului său, numite **inputuri epistatice**. Există deci 2^N combinații de alele care influențează fitnessul. Fiecare combinație de alele este asociată aleatoriu unei valori a contribuției la fitness.

Fitnessul mediu al celor N gene este determinat ca o medie a valorilor aleatoare. Rezultatul este un peisaj fitness astfel încât fiecare combinație de alele are o valoare fitness specifică. Astfel, în tabelul 4.1 este reprezentată o combinație de alele asociate unui număr de 3 gene. Există deci opt combinații binare posibile formate de cele trei gene. Fiecare are asignată o valoare fitness aleatoare între 0 și 1 și fitnessul pentru fiecare combinație de alele este media celor trei valori.

Tabelul 4.1

Gene			Valoare fitness			Fitness mediu \bar{f}
1	2	3	f_1	f_2	f_3	
0	0	0	0,2	0,5	0,4	0,37
0	0	1	0,7	0,1	0,2	0,33
0	1	0	0,5	0,9	0,8	0,73
0	1	1	0,3	0,3	0,1	0,23
1	0	0	0,5	0,4	0,4	0,43
1	0	1	0,1	0,5	0,3	0,30
1	1	0	0,9	0,2	0,8	0,63

1	1	1	0,6	0,8	0,4	0,60
---	---	---	-----	-----	-----	------

Această procedură permite construirea unui peisaj fitness. De exemplu, începând cu prima genă codificată cu o alelă 0 corespunzătoare primei gene, fitnessul este 0,37. Dacă alela primei gene sare la 1, atunci fitnessul crește la 0,43. Avem doar un singur vârf al fitnessului la (0,1,0) care este egal cu 0,73.

Deci când apare un salt al unei gene de la 0 la 1 sau invers, contribuția fitness a genei respective se modifică. Dacă rezultatul este un fitness mai mare atunci schimbarea alelei este acceptată, dacă nu atunci nu este acceptată.

Kauffman a demonstrat că atunci când numărul de conexiuni K cu alte gene este mic sistemul evoluează rapid către un maxim global al fitnessului. Cu cât numărul de conexiuni crește, există tot mai multe vârfuri locale până la punctul în care sistemul este complet interconectat ($K = N-1$) și peisajul fitness rezultat este complet aleatoriu. Cu cât apar mai multe vârfuri locale, cu atât este mai improbabil să se „urce” pe vârful global, deci se obține un fitness mediu mai mic. Totuși, K arată că peisajele fitness nu sunt aleatoare în sine, ci sunt generate de interacțiunile co-evolutive dintre diferitele specii.

În mod logic, următorul pas este să se conecteze modelele NK ale diferitelor specii dintr-un ecosistem. În versiunea multi-specii a modelului NK , valoarea fitness a fiecărei combinații de alele depinde nu numai de alela unei gene și de alelele celorlalte gene epistatice,

dar și de alelele altor C gene din fiecare dintre cele S specii. Dacă există două specii interdependente, atunci fiecare genă va avea $K+C$ inputuri și vor exista $2^{(K+C)}$ combinații de alele. Într-un model în care fiecare specie este conectată cu alte S specii va avea $2^{(K+CS)}$ combinații posibile, deci are loc o creștere combinatorială.

Fitnessul speciilor este calculat ca o medie a valorilor fitnessului alelelor din genotipul său curent; fiecare specie se presupune că este izogenică, deci nu există gene comune la două sau mai multe specii.

Atunci când o specie evoluează (evoluția însemnând un salt al unei alele dintr-o genă de la 0 la 1 sau invers) acest lucru are ramificații către alte specii, deformând peisajul fitness general.

Kauffman a stabilit că, în general, sistemele co-evolutive cuplate în acest mod se comportă trecând de la un comportament determinist la unul haotic, aceste comportamente fiind separate de o perioadă de tranziție depinzând de numărul de cuplări.

4.4. Disipația și deschiderea (openness) sistemelor adaptive complexe

Sisteme complexe cum ar fi rețeaua Web, rețelele neurale, Internetul, rețelele sociale ș.a. sunt structuri masiv disipative/replicative. Conceptul de structură disipativă a devenit extrem de util pentru a explica cum astfel de sisteme funcționează în interdependență unul cu celelalte. Pe lângă aceasta, structurile

disipative au și proprietăți replicative care permit acestor sisteme să-și mențină o formă aproximativ asemănătoare o lungă perioadă de timp.

Disipativ provine de la *dis* = aparte, diferit și de la verbul *supare* = a arunca, a da deoparte, iar replicativ provine de la prefixul *re* = din nou și verbul *plicare* = a încrucișa.

Un *sistem disipativ* este definit, în general, ca un sistem al cărui comportament pe termen lung este independent de starea sa inițială. Deci, pentru astfel de sisteme, putem ignora comportamentul tranzitoriu asociat cu traiectoria tranzitorie (tranzientul) și atenția să se concentreze asupra comportamentului acestuia pe termen lung.

În funcție de modul în care sistemul disipativ evoluează în timp, traiectoria acestuia va ajunge într-un punct fix, pe o suprafață (ciclu limită) sau chiar într-o anumită arie a spațiului său de stare, pe care le-am numit atractor.

Pentru sistemele disipative care, după cum am arătat, nu sunt influențate de condițiile inițiale, proprietățile acestor atractorii determină comportamentul dinamic pe termen lung al sistemului.

Mulțimea de puncte inițiale care dau naștere unei mulțimi de traiectorii care tind către un atractor dat se numește *bazinul de atracție* al atractorului respectiv.

Dacă există mai mult decât un atractor pentru un sistem cu o mulțime dată de valori ale parametrilor, atunci pot exista puncte

inițiale aflate exact la limita dintre bazinele de atracție asociate atractoriilor. Aceste puncte formează o mulțime numită *separatrix*, deoarece mulțimea respectivă separă diferite bazine de atracție.

Să vedem, în continuare, cum pentru un sistem particular reprezentat, să spunem, de o ecuație de dinamică $\dot{X}(t) = f(X(t))$ poate fi determinat dacă este sau nu disipativ. Pentru simplitate, vom considera mai întâi spații de stare unidimensionale, după care spații bidimensionale și apoi vom extinde rezultatul obținut pentru spațiile tridimensionale și chiar pentru cele m - dimensionale.

Am văzut că principalul criteriu de determinare a disipației constă în considerarea unui eșantion de condiții inițiale pentru sistemul respectiv și a urmărilor apoi ce se întâmplă cu traiectoriile care au puncte inițiale ce aparțin acestui eșantion.

Astfel, în cazul unidimensional, eșantionul poate fi considerat un segment de linie de la X_A la X_B (cu $X_B > X_A$, figura 4.2):

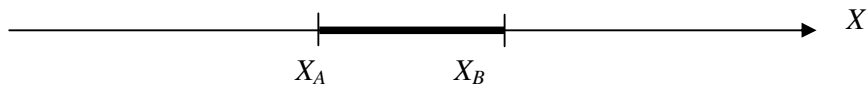


Figura 4.2

Lungimea acestui segment este $X_B - X_A$. Să vedem ce se întâmplă cu acest segment atunci când timpul se scurge iar punctele

care provin de pe segment se deplasează în spațiul de stare unidimensional, deci pe X .

Rata de schimbare în timp a lungimii segmentului este dată de:

$$\frac{d}{dt}(X_B - X_A) = \dot{X}_B - \dot{X}_A = f(X_B) - f(X_A)$$

Deci, dacă $f(X_B) < f(X_A)$ atunci lungimea segmentului va scădea pe măsură ce timpul se scurge.

Dacă segmentul de linie respectiv este suficient de scurt, putem utiliza dezvoltarea în serie Taylor pentru a exprima pe $f(X_B)$ în funcție de $f(X_A)$:

$$f(X_B) = f(X_A) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=X_A} (X_B - X_A) + \dots$$

Dacă notăm $L = X_B - X_A$ și păstrăm doar termenul de ordinul întâi din dezvoltare, atunci obținem:

$$\frac{1}{X_B - X_A} (f(X_B) - f(X_A)) = \left. \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right|_{X=X_A} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dt} = \left. \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right|_{X=X_A}$$

Se observă, astfel, că rata de schimbare a lungimii segmentului, $\frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dt}$ descrește dacă $\frac{\partial f(X)}{\partial X} < 0$, condiție care este satisfăcută doar dacă traiectoriile provenind din eșantionul reprezentat de segmentul $X_B - X_A$ tind toate către un nod. Acest lucru presupune faptul că segmentul inițial se contractă, eventual după o perioadă tranzitorie de dilatare, ceea ce este caracteristic sistemelor disipative.

Să vedem, în continuare, cum se poate testa proprietatea de disipație în spațiile de stare bidimensionale. După aceea, vom generaliza rezultatul obținut pentru spații de stare tri și multidimensionale.

În cazul spațiilor bidimensionale, se pleacă de la un mic eșantion de condiții inițiale ale celor două variabile de stare X_1 și X_2 , aflat într-o mică arie delimitată de coordonatele (X_{1A}, X_{2A}) și (X_{1B}, X_{2B}) , (figura 4.3).

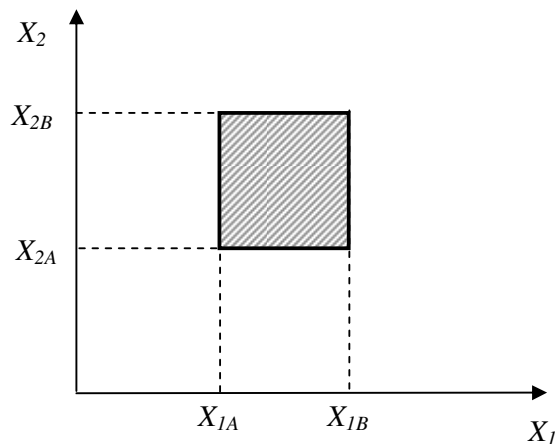


Figura 4.3

Aria A a domeniului obținut este dată de relația:

$$A = (X_{1B} - X_{1A})(X_{2B} - X_{2A}) \quad (4.1)$$

Variația ariei A în timp este dată de:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = (X_{1B} - X_{1A})(\dot{X}_{2B} - \dot{X}_{2A}) + (X_{2B} - X_{2A})(\dot{X}_{1B} - \dot{X}_{1A}) \quad (4.2)$$

Se observă însă faptul că variația absciselor și ordonatelor, \dot{X}_1 și, respectiv, \dot{X}_2 , sunt descrise de funcțiile:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Mai precis, dacă reprezentăm într-o figură aria inițială și noua arie (vezi figura 4.4) atunci putem scrie dependențele funcționale între noile coordonate și coordonatele inițiale ca:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{1A} &= f_1(X_{1A}, X_{2A}) \\
 \dot{X}_{1B} &= f_1(X_{1B}, X_{2A}) \\
 \dot{X}_{2A} &= f_2(X_{2A}, X_{1A}) \\
 \dot{X}_{2B} &= f_2(X_{2B}, X_{1A})
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

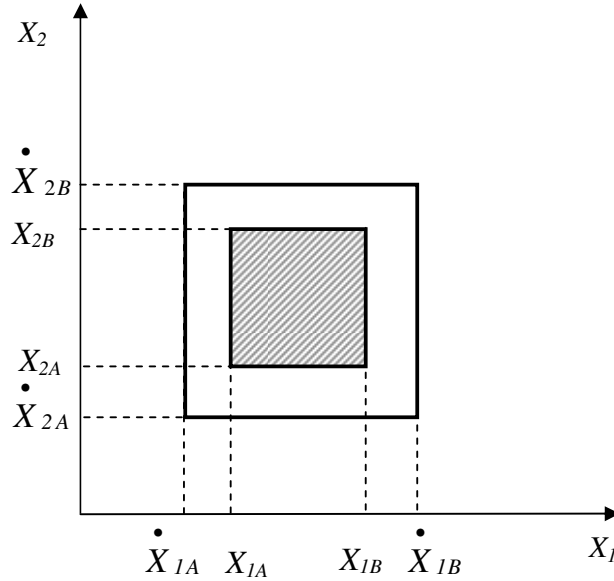


Figura 4.4

Dacă înlocuim relațiile (4.3) în (4.2), obținem:

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= (X_{1B} - X_{1A}) \{f_2(X_{2B}, X_{1A}) - f_2(X_{1A}, X_{2A})\} + \\
 &\quad (X_{2B} - X_{2A}) \{f_1(X_{1B}, X_{2A}) - f_1(X_{1A}, X_{2A})\}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dar, în relația (4.4) putem dezvolta în serie Taylor $f_1(X_{1B}, X_{2A})$ și $f_2(X_{2B}, X_{1A})$ dacă presupunem coordonatele ca fiind suficient de apropiate. Avem:

$$\begin{aligned} f_1(X_{1B}, X_{2A}) &= f_1(X_{1A}, X_{2A}) + (X_{1B} - X_{1A}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{\substack{X_{1A} \\ X_{2A}}} + \dots \\ f_2(X_{2B}, X_{1A}) &= f_2(X_{1A}, X_{2A}) + (X_{2B} - X_{2A}) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_{\substack{X_{2A} \\ X_{1A}}} + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Înlocuim acum dezvoltările (4.5) în (4.4) și obținem:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (X_{2B} - X_{2A}) \left\{ f_1(X_{1A}, X_{2A}) + (X_{1B} - X_{1A}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{\substack{X_{1A} \\ X_{1B}}} - f_1(X_{1A}, X_{2A}) \right\} \\ &+ (X_{1B} - X_{1A}) \left\{ f_2(X_{1A}, X_{2A}) + (X_{2B} - X_{2A}) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_{\substack{X_{2A} \\ X_{2B}}} - f_2(X_{1A}, X_{2A}) \right\} = \\ &= (X_{2B} - X_{2A}) \left\{ (X_{1B} - X_{1A}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{\substack{X_{1A} \\ X_{1B}}} \right\} + \\ &+ (X_{1B} - X_{1A}) \left\{ (X_{2B} - X_{2A}) \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_{\substack{X_{2A} \\ X_{2B}}} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dacă împărțim (4.6) la A , dat de relația (4.1), avem:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{\substack{X_{1A} \\ X_{1B}}} + \left. \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right|_{\substack{X_{2A} \\ X_{2B}}} \quad (4.7)$$

Deoarece eșantionul poate fi ales arbitrar în spațiul de stare bidimensional, este evident că relația (4.7) nu depinde de alegerile coordonatelor X_{1A} , X_{1B} , X_{2A} și X_{2B} .

Putem, deci, scrie că, în general:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \quad (4.8)$$

Se observă faptul că creșterea sau descreșterea relativă a ariei A conținând mulțimea de condiții inițiale este determinată de derivatele parțiale ale funcțiilor de evoluție în timp.

Dacă partea dreaptă a relației (4.8) este negativă, atunci aria aleasă inițial descrește către zero și spunem, în acest caz, că sistemul este disipativ. Altfel spus, toate traiectoriile sfârșesc într-un atractor ale cărui dimensiuni geometrice sunt mai mici decât cele ale spațiului de stare.

Pentru spațiul de stare bidimensional, atractorul poate fi un punct (nod) sau o curbă (ciclu limită), deoarece punctul are dimensiunea zero iar curba are dimensiunea 1.

Putem generaliza, acum, acest rezultat pentru spații de stare tridimensionale, considerând un volum (cub) drept eșantion de condiții inițiale. Modificarea relativă a acestui volum în timp este dată de expresia:

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial X_i} \equiv \text{div}_3(f) \quad (4.9)$$

unde $\text{div}_3(f)$ definește **divergența** mulțimii de funcții f_i în spațiul 3-dimensional.

Dacă $\text{div}_3(f) < 0$ atunci volumul inițial de condiții inițiale va sfârși într-o regiune geometrică a cărei dimensionalitate este mai mică decât cea a spațiului de stare inițial. Această regiune poate fi deci un punct (nod), o curbă (ciclu limită) sau o arie.

Teorema de divergență afirmă, în general, pentru un sistem m -dimensional, că dacă $\text{div}_m(f) < 0$ atunci spațiul de stare are cel puțin un atractor a cărui dimensiune este mai mică sau egală cu $m-1$.

4.5 Disipația și haosul. Condițiile de apariție a haosului

După prezentarea principalelor aspecte legate de disipație în sistemele complexe, putem acum să vedem care sunt condițiile de bază care permit apariția haosului în sistemele economice reale. Aceste condiții sunt necesare deoarece haosul nu apare în oricare dintre sistemele reale, ci doar în acelea care permit satisfacerea simultană a respectivelor condiții.

În literatura de specialitate au fost formulate până în prezent trei condiții de bază ale apariției haosului și anume:

- 1) neintersecția diferitelor traiectorii posibile în spațiul de stare;
- 2) traiectorii mărginite;
- 3) divergența exponențială a diferitelor traiectorii.

Dacă una dintre aceste condiții nu poate fi satisfăcută atunci apariția haosului în sistemul respectiv nu este posibilă. Să arătăm că aceste condiții pot fi satisfăcute simultan în spațiile de stare tridimensionale, altfel spus că, în general, sistemele reale sunt sisteme haotice.

Pentru aceasta, să reprezentăm în spațiul de stare tridimensional două traiectorii oarecare pentru care proprietățile introduse sunt satisfăcute (figura 4.1)

Se observă, astfel, că cele două traiectorii, chiar dacă au drept stări inițiale două puncte foarte apropiate unul de celălalt, pot evolua în continuare în așa fel încât ele să nu se intersecteze una cu cealaltă și nici ele însele. Acest lucru este posibil doar în spațiul de stare tridimensional. Acest mod de a evolua al diferitelor traiectorii este necesar să fie impus în cazul sistemelor haotice deoarece acestea au traiectorii care se pot afla oriunde în spațiul tridimensional iar intersecția unei astfel de traiectorii cu ea însăși sau cu alte traiectorii din acest spațiu ar presupune

că punctul de intersecție respectiv poate fi aflat în mod determinist (sau aleator). Dar acest lucru ar contrazice una dintre legalitățile de bază ale sistemelor haotice, și anume aceea a inexistenței oricărei informații privind apariția unei stări viitoare în astfel de sisteme.

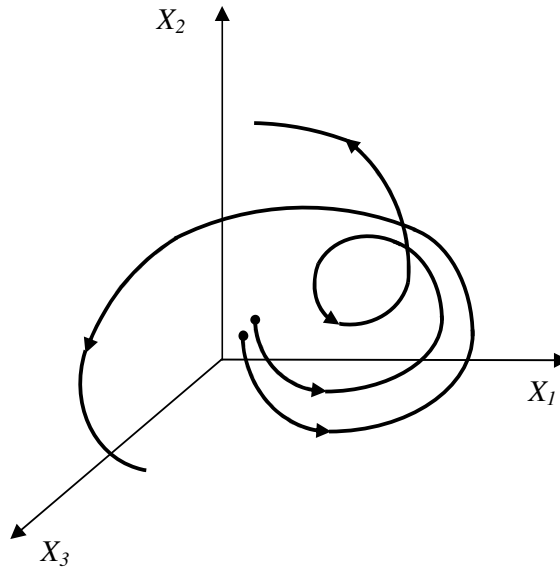


Figura 4.5

Criteriul esențial în spațiul de stare cu trei sau mai multe dimensiuni care permite apariția comportamentului haotic este însă posibilitatea ca *traectoria să rămână într-o regiune mărginită a acestuia*, învârtindu-se una în jurul alteia fără să se intersecteze și fără să se suprapună exact. Dacă nu am presupune că spațiul este mărginit, atunci traiectoriile haotice ar putea apărea atunci când pe o anumită direcție (axă) se tinde către infinit. Acest lucru poate exclude sistemele reale care evoluează în spații finite.

Totuși, haosul apare nu numai atunci când ne referim la mai multe traiectorii, ci și când analizăm o singură traiectorie. Dacă ea trece printr-un atractor haotic, ea va fi eventual întoarsă în aproape același punct ca și în precedenta sa vizită. Desigur, nu exact în același punct deoarece s-ar contrazice primul criteriu, iar traiectoria ar fi periodică. De asemenea, nu într-un punct aflat la infinit deoarece s-ar contrazice al doilea criteriu.

Dacă o traiectorie suferă o divergență exponențială, atunci traiectoria respectivă, la a doua sa vizită, va avea un comportament subsecvent puțin diferit de cel de la prima sa vizită. În consecință, îndeplinirea celui de-al treilea criteriu, al *divergenței exponențiale a oricărei traiectorii* va face posibil comportamentul nereproductibil, neperiodic, altfel spus haotic.

Aceste trei criterii sunt îndeplinite numai în cazul în care avem de-a face cu sisteme disipative.