Modelul Lesourne-Leban

Asemănarea cu modelul Jorgenson: orizontul de timp este infinit.

Deosebiri:

- vizează schimbări în structura financiară (finanţarea poate fi făcută din acţiuni sau din credite);
- criteriul de optim: maximizarea valorii firmei ca sumă actualizată de dividende;
- ţine seama de politica de taxare (impozitare a guvernului).

Ecuaţiile modelului:

- ecuaţia de balanţă care formalizează sursele de finanţare a bunurilor capital:

$$X(t)+Y(t)=K(t) \tag{1}$$

unde:

X(t) – valoarea acţiunilor (capitalul social al firmei)

Y(t) – împrumuturi (credite)

K(t) – valoarea bunurilor capital.

- ecuaţia de evoluţie a bunurilor capital (investiţia netă); este ecuaţia de stare:

$$\dot{K}(t)=I(t)-aK(t) \tag{2}$$

unde

I(t) – investiţia brută;

a – rata de amortizare;

$\dot{K}(t)$ - investiţia netă.

- Ecuaţia profitului net

$$E(t)=\dot{X}(t)+D(t)=(1-f)[R(Q(t))-wL(t)-aK(t)-rY(t)] \tag{3}$$

unde:

E(t) – profitul net al firmei;

f – rata de impozitare;

R(Q(t)) – veniturile firmei (din vânzări);
w – salariul pe persoană ocupată;
L(t) – personalul ocupat;
$\dot{X}(t)$ - creşterea capitalului social;
D(t) – valoarea dividendelor.

Ecuaţia (3) cuprinde modul de distribuire şi modul de formare a profitului net: $E(t) = \dot{X}(t) + D(t)$ (distribuirea profitului net pentru dividende şi/sau creşterea capitalului social(acumulări)).

Mecanismul de formare a profitului net este:

$$E(t) = (1 - f)[R(Q(t)) - wL(t) - aK(t) - rY(t)]$$

Observaţie: Spre deosebire de modelul Jorgenson, cheltuielile cu capitalul se consideră valoarea amortizărilor (la Jorgenson costul capitalului era exprimat ca o pondere din investiţia brută). Ca şi în modelul amintit, se consideră două inputuri: capitalul şi forţa de muncă.

Ipoteze asupra funcţiei de venit (venituri din vânzări)

- *R(Q(t))* este strict concavă:
  $$R(\alpha Q_1(t) + (1-\alpha)Q_2(t)) > \alpha R(Q_1(t)) + (1-\alpha)R(Q_2(t))$$
- *R(Q(t))* este monoton strict crescătoare: $R'(Q(t)) > 0$
- veniturile marginale la scala de fabricaţie sunt strict descrescătoare: $R''(Q(t)) < 0$

Performanţa modelului: firma este condusă de acţionari, criteriul este maximizarea fluxurilor de dividende pe un orizont infinit.

$$\max_{D,I,L} \int_0^\infty e^{-it} D(t)dt \tag{4}$$

Restricţii asupra dividendelor

Dividendele sunt nenegative:

$$D(t) \geq 0 \tag{5}$$

Restricţii de limitare a valorii împrumutului:

$$0 \leq Y(t) \leq kX(t) \tag{6}$$

unde *k* este ponderea maximă a datoriilor (creditelor bancare) în raport cu valoarea capitalului social.

Din ecuaţia de balanţă rezultă *Y(t) = K(t) – X(t)*. Înlocuim în (6):

$$0 \le K(t) - X(t) \le (1+k)X(t) \Rightarrow X(t) \le K(t) \le (1+k)X(t) \qquad (6')$$

Limitele artificiale pentru variabilele de control (dividende şi investiţii):

$$0 \le D(t) \le D_{\max} \qquad (7)$$

$$I_{\min} \le I(t) \le I_{\max} \qquad (8)$$

(necesare pentru a obţine un domeniu închis al variabilelor de control).

Modelul matematic (Lesourne şi Leban) este:

$$\max_{D,I,L} \int_0^{\infty} e^{-it} D(t)dt \qquad (9)$$

$$\dot{X}(t) = (1-f)[R(Q(t)) - wL(t) - (r+a)K(t) + rX(t)] - D(t) \qquad (10)$$

Observaţie: În ecuaţia (3) am ţinut seama de ecuaţia de balanţă:

$$K(t) = X(t) + Y(t) \Rightarrow Y(t) = K(t) - X(t)$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t) \qquad (11)$$

$$X(t) \le K(t) \le (1+k)X(t) \qquad (12)$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le D(t) \le D_{\max} \quad (13) \\ I_{\min} \le I(t) \le I_{\max} \quad (14) \end{array}\right\} \text{restricţii momentane asupra variabilelor de comandă}$$

Pentru rezolvare aplicăm *principiul lui Pontreaghin*:

Hamiltonianul problemei:

$$\begin{aligned} H(K(t), I(t), D(t), X(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = D(t) + \lambda_1(t)\{(1-f)[R(Q(t)) - wL(t) - \\ (r+a)K(t) + rX(t)] - D(t)\} + \lambda_2(t)[I(t) - aK(t)] \end{aligned} \qquad (15)$$

Lagrangeanul problemei:

$$L(\underbrace{K(t), X(t)}_{\text{variabile de stare}}, \underbrace{I(t), D(t)}_{\text{variabile de comanda}}, \underbrace{\lambda_1(t), \lambda_2(t)}_{\text{variabile adjuncte}}, \underbrace{\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4(t), \nu_1(t), \nu_2(t)}_{\text{multiplicatori Lagrange}}) =$$

$$\begin{aligned} &= H(\cdot) + \mu_1(t)D(t) + \mu_2(t)(D_{\max} - D(t)) + \mu_3(t)(I(t) - I_{\min}) + \\ &+ \mu_4(t)(I_{\max} - I(t)) + \nu_1(t)(K(t) - X(t)) + \nu_2(t)((1+k)X(t) - K(t)) \end{aligned} \qquad (16)$$

Presupunem, din *raţiuni economice*, că:

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_{\max} > D(t) \\ I(t) > I_{\min} \\ I_{\max} > I(t) \end{cases}$$

Condițiile de optim ale modelului sunt:

$$\dot{\lambda}_1(t) = i\lambda_1(t) - \frac{\partial L(\cdot)}{\partial X(t)} = i\lambda_1(t) - \lambda_1(t)(1-f)r + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \quad (17)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = i\lambda_2(t) - \frac{\partial L(\cdot)}{\partial K(t)} = i\lambda_2(t) - \lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] - \\ - \nu_1(t) + \nu_2(t) + a\lambda_2(t) \quad (18)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial D(t)} = 0 \Rightarrow \mu_1(t) + 1 - \lambda_1(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1(t) = \mu_1(t) + 1 \quad (19)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial I(t)} = 0 \Rightarrow \lambda_2(t) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial L(t)} = 0 \Rightarrow \lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} - w\right] = 0 \quad (21)$$

$$\mu_1(t)D(t) = 0 \quad (22)$$

$$\nu_1(t)[K(t) - X(t)] = 0 \quad (23)$$

$$\nu_2(t)[(1+k)X(t) - K(t)] = 0 \quad (24)$$

$$\mu_1(t), \nu_1(t), \nu_2(t) \geq 0 \quad (25)$$

Din (19) şi (25) rezultă că:

$$\lambda_1(t) > 0 \quad (26)$$

din (21) şi (26):

$$\left.\begin{cases} \lambda_1(t) > 0 \\ (1-f) > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} - w = 0 \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} = w \quad (27)$$

(venitul marginal al muncii este egal cu costul marginal).
Conform (20) $\Rightarrow \dot{\lambda}_2(t) = 0 \Rightarrow$ relația (18) devine:

$$0 = -\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] - \nu_1(t) + \nu_2(t) \quad (28)$$

Traiectorii posibile

TR. nr.	$\mu_1(t)$	$\nu_1(t)$	$\nu_2(t)$
1	0	+	0

2	0	0	+
3	0	0	0
4	+	+	0
5	+	0	+
6	+	0	0

Transformarea condiţiilor de optim pe traiectoriile 1, 2, 3 pentru care $\mu_1(t)=0$: (19)$\Rightarrow \lambda_1(t)=1 \Rightarrow \dot{\lambda}_1(t)=0 \Rightarrow$(17) devine:

$$0=i-(1-f)r+\nu_1(t)-(1+k)\nu_2(t) \Rightarrow i-(1-f)r=(1+k)\nu_2(t)-\nu_1(t) \quad (29)$$

Pe traiectoriile 1, 2, 3, (28) devine:

$$(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-(r+a)\right]=\nu_2(t)-\nu_1(t) \quad (30)$$

Ipoteză: $i \neq (1-f)r$: revenirea acţionarilor este diferită de costul unitar al împrumutului.

i – rata de revenire a acţionarilor la o unitate monetară investită pe acţiuni;

(1 – f)r – costul împrumutului (partea dintr-o unitate monetară de profit net care constituie restituirea datoriilor).

Analiza traiectoriilor de bază

Traiectoria 1: $\nu_1(t)>0, \mu_1(t)=\nu_2(t)=0$

$\nu_1(t)>0 \Rightarrow K(t)=X(t)$

$\mu_1(t)=0 \Rightarrow D(t)>0$

Din (29) rezultă:

$$(1-f)r-i=\nu_1(t); \nu_1(t)>0 \Rightarrow (1-f)r>i \quad (31)$$

deci acţiunile sunt mai ieftine decât creditul şi este raţional ca finanţarea să se facă din acţiuni.

Din (30) rezultă:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-(r+a)=-\frac{\nu_1(t)}{1-f} \quad (32)$$

Înlocuim pe $\nu_1(t)$ din (31) în (32):

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-a=\frac{i}{1-f} \quad (33)$$

şi notăm cu K_X^* soluţia acestei ecuaţii (valoarea staţionară când finanţarea se face numai din acţiuni).

Traiectoria 2: $v_2(t) > 0, \mu_1(t) = v_1(t) = 0$

$v_2(t) > 0 \Rightarrow (1+k)X(t) - K(t) = 0 \Rightarrow X(t) = \dfrac{K(t)}{1+k}$

$\mu_1(t) = 0 \Rightarrow D(t) > 0$

Din (29) rezultă:

$(1+k)v_2(t) = i - (1-f)r$

adică:

$$v_2(t) = \frac{i-(1-f)r}{1+k} \tag{35}$$

Deoarece $v_2(t) > 0; 1+k > 0 \Rightarrow (1-f)r < i$ rezultă că acţiunile sunt scumpe şi creditele sunt ieftine; deci finanţarea se va face din credite.

Din (30) rezultă:

$$(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] = v_2(t) \tag{36}$$

Înlocuim pe $v_2(t)$ din (35) şi obţinem:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{1}{1+k}\left[kr + \frac{i}{1-f}\right] \tag{37}$$

Notăm cu K_Y^* soluţia acestei ecuaţii (valoarea staţionară când finanţarea se face din credite la maxim).

Traiectoria 3: $v_1(t) = \mu_1(t) = v_2(t) = 0$

Din (29) rezultă:

$(1-f)r = i$

situaţie exclusă prin ipoteză, deci traiectoria 3 nu este admisibilă.

Traiectoria 4: $v_1(t) > 0, v_2(t) = 0, \mu_1(t) > 0,$

Din (24) rezultă:

$K(t) = X(t) \Rightarrow Y(t) = 0$

deci finanțarea se face numai din acțiuni.

Din (29)$\Rightarrow i-(1-f)r=-v_1(t) \;\Rightarrow i<(1-f)r$ pentru că $v_1(t)>0$.

Din (30), pentru $v_2(t)=0$, avem:

$$\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-(r+a)\right]=-v_1(t)$$

Înlocuim $v_1(t)$ din ecuația precedentă şi ținând cont că $i<(1-f)r$, va rezulta:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-a<r\Rightarrow K(t)>K^*_{YX}$$

Traiectoria 5: $v_1(t)=0, v_2(t)>0, \mu_1(t)>0.$

Din (24) rezultă:

$$K(t)=(1+k)X(t)\Rightarrow Y(t)=kX(t)$$

deci finanțarea este mixtă (din acțiuni şi credite la maxim).

Din (30), pentru $v_1(t)=0$, avem:

$$\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-(r+a)\right]=v_2(t)\Rightarrow\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-a>r\Rightarrow K(t)<K^*_{YX}$$

unde K^*_{YX} este soluția staționară în cazul finanțării mixte.

Traiectoria 6: $v_1(t)=0, v_2(t)=0, \mu_1(t)>0$

Din (23) rezultă:

$$K(t)>X(t)\Rightarrow Y(t)>0$$

iar din (24) avem:

$$K(t)<(1+k)X(t)\Rightarrow Y(t)<kX(t)$$

rezultând că:

$$X(t)<K(t)<(1+k)X(t)$$

Din (30), pentru $v_1(t)=v_2(t)=0$, avem:

$$\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-(r+a)\right]=0\Rightarrow\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)}-a=r\Rightarrow K(t)=K^*_{YX}$$

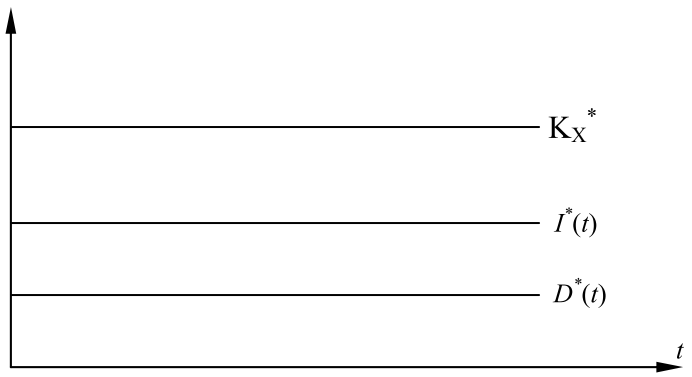
unde K_{YX}^{*} este soluția staționară în cazul finanțării mixte.

Analiza soluției

Traiectoriile 4,5,6 nu pot fi traiectorii finale, întrucât nu poate fi optimal să nu se plătească dividende pe termen lung (deoarece $\mu_1(t) > 0 \Rightarrow D(t) = 0$); deci traiectoriile 1 şi 2 sunt singurele traiectorii finale.

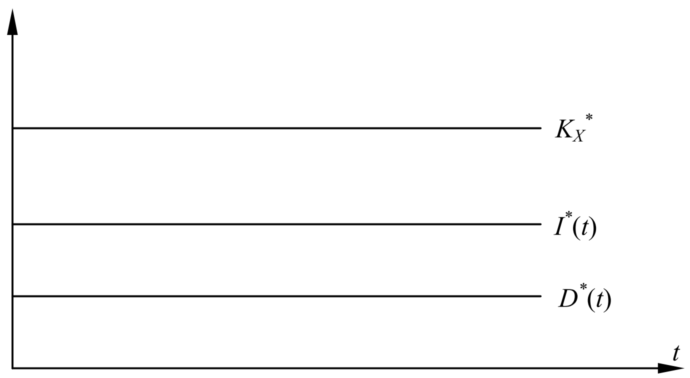
Traiectorii într-un singur stadiu

a) dacă $i < (1-f)r$ şi $X(0) = K_X^*$, traiectoria optimă este traiectoria 1.



$$D^* = (1-f)(R(K_X^*) - wL - aK_X^*)$$
$$Y(t) = 0$$
$$I^*(t) = aK_X^*$$
$$K(t) = K_X^*$$

b) dacă $i > (1-f)r$ şi $X(0) = \dfrac{1}{1+k} K_Y^*$, traiectoria optimă este traiectoria 2.



$$D^* = (1-f)[R(K_Y^*) - wL(t) - (a + \frac{k}{1+k}r)K_Y^*]$$

$$Y(t) = \frac{k}{1+k}K_Y^*$$

$$I^*(t) = aK_Y^*$$

$$K(t) = K_Y^*$$

Traiectorii în două faze

Sunt formate din cuplarea traiectoriilor 4, 5 şi 6, înaintea traiectoriei 1 sau 2.

Întrucât modelul are restricții pure asupra stării, trebuie să considerăm posibilitatea ca variabilele adjuncte să nu fie continue.

În punctul τ în care $\lambda(t)$ este discontinuă, trebuie satisfăcute relațiile:

$$\lambda_1(\tau^+) = \lambda_1(\tau^-) - \eta_1(\tau) + \eta_2(\tau) \tag{41}$$

$$\lambda_2(\tau^+) = \lambda_2(\tau^-) + \eta_1(\tau) + (1+k)\eta_2(\tau) \tag{42}$$

$$\eta_1(\tau)(K(\tau) - X(\tau)) = 0 \tag{43}$$

$$\eta_2(\tau)((1+k)X(\tau) - K(\tau)) = 0 \tag{44}$$

$$\eta_1(\tau) \geq 0, \eta_2(\tau) \geq 0 \tag{45}$$

Întrucât $\lambda_2(t) = 0$, din (42) rezultă:

$$\eta_1(\tau) + (1+k)\eta_2(\tau) = 0 \tag{46}$$

Din (45) şi (46) rezultă $\eta_1(\tau) = \eta_2(\tau) = 0$ deci $\lambda_1(t)$ este continuă.

Din (19) rezultă $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$ deci $\mu_1(t)$ este continuă.

Întrucât pe traiectoriile 1 şi 2 $\mu_1(t) = 0$, este necesar ca traiectoriile care preced traiectoriile 1 sau 2 să verifice $\mu_1(t) > 0$. Rezultă că în punctul de comutație:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1(t) < 0 \\ \mu_1(t) = 0 \end{cases}$$

Cum $\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\mu}_1(t)$ fiindcă $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$, înlocuind în (17) obținem:

$$\dot{\mu}_1(t) = (1+\mu_1(t))(i-(1-f)r) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \quad (47)$$

Pe traiectoria 4 avem $\nu_2(t) = 0$.

Înlocuim în (47) relațiile: $\nu_2(t) = 0, \mu_1(t) = 0, \dot{\mu}_1(t) < 0$ şi rezultă:

$$i < (1-f)r$$

Din condiția de optim (28), prin explicitarea lui $\nu_1(t)$ rezultă:

$$\nu_1(t) = -\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right]$$

şi înlocuind pe $\nu_1(t)$ în (47), ținând seama că $\lambda_1(t) = 1+\mu_1(t)$, avem:

$$\dot{\mu}_1(t) = (i-(1-f)r) - (1+\mu_1(t))(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] - \underbrace{(1+k)\nu_2(t)}_{=0}$$

$$\dot{\mu}_1(t) < 0 \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a \geq \frac{i}{1-f} \Leftrightarrow K(t) \leq K_X^*$$

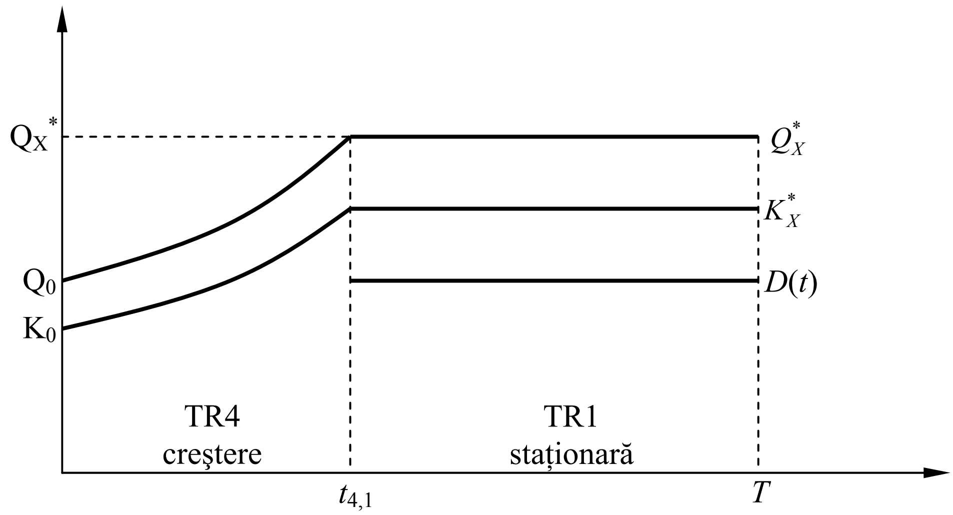
Am determinat deja că $K(t) > K_{YX}^*$.

Obținem:

Dacă $K(t) < X(0) = K(0) < K_X^*$, traiectoria de magistrală este:

$$Tr4 \rightarrow Tr1.$$

TR4	TR1
$K_{YX}^* < K_X^*$	K_X^*
$\dot{K}(t) > 0$	valoare staționară
$Y(t) = 0$	$Y(t) = 0$
$D(t) = 0$	$D(t) = (1-f)[R(K_X^*) - wL(t) - aK_X^*]$



t

Traiectoria de magistrală TR4 → TR1 este cazul finanțării pure din acțiuni.

Pe Traiectoria 5, $v_1(t) = 0$.

Din condiția de optim (28) rezultă prin explicitarea lui $v_2(t)$:

$$v_2(t) = \lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right]$$

şi înlocuind pe $v_2(t)$ în (47), ținând seama că $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$:

$$\dot{\mu}_1(t) = (i-(1-f)r) - (1+k)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] \le 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a \ge \frac{1}{1+k}(kr + \frac{i}{1-f}) \Rightarrow K(t) \le K_Y^*$$

Traiectoria 5 trebuie conectată cu traiectoria 2 şi va rezulta cazul finanțării maxime din împrumut.

Obținem:

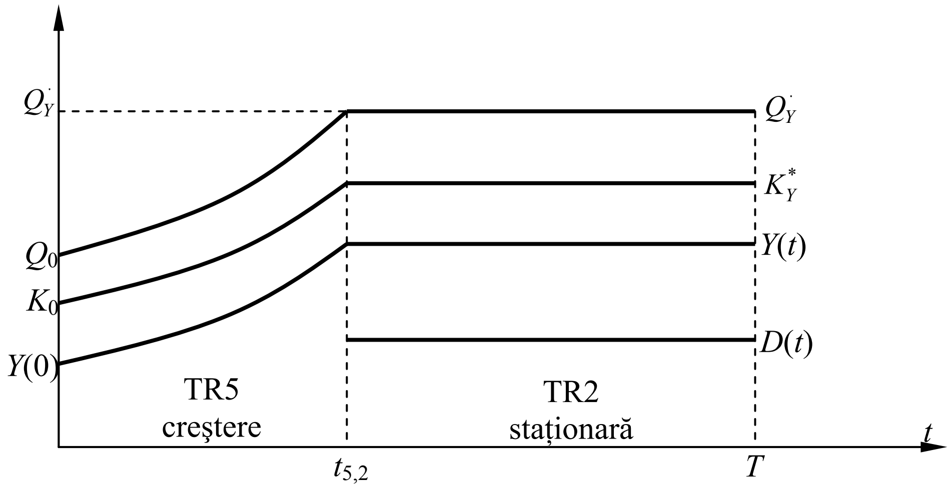
Dacă:

$$i > (1-f)r \text{ şi } X(0) < \frac{1}{1+k}K_Y^*$$

traiectoria de magistrală este TR5 → TR2.

TR5	TR2
$K(t) \le K_Y^*$	K_Y^*
$\dot{K}(t) > 0$	traiectorie staționară
$Y(t) = \frac{k}{1+k}K(t)$	$Y(t) = \frac{k}{1+k}K_Y^*$
$D(t) = 0$	$D(t) = (1-f)[R(K_y^*) - wL(t) - (a + \frac{k}{1+k}r)K_Y^*]$

În cazul acestei magistrale, creşterea se va face cu finanțare maximă din împrumut.



Traiectoria 6 nu poate precede traiectoria 1 sau 2, datorită continuității lui *K(t)*.

Pe traiectoria 1: $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{i}{1-f} \Rightarrow K(t) = K_X^*$

Pe traiectoria 6: $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = r \Rightarrow K(t) = K_{YX}^*$

Pe traiectoria 2: $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{1}{1+k}(kr + \frac{i}{1-f}) \Rightarrow K(t) = K_Y^*$.

Deci traiectoriile în două stadii sunt:

TR4→TR1

TR5→TR2

Traiectoriile în mai multe stadii:

a) dacă $i < (1-f)r$ şi $X(0) < \frac{1}{1+k} K_{YX}^*$, traiectoria optimală este:

TR5 → TR6 → TR4 → TR1

b) dacă $i > (1-f)r$ şi $X(0) = \frac{1}{1+k} K_{YX}^*$, traiectoria optimală este:

TR5 → TR2