Modelul dinamic al firmei

Unul dintre cele mai importante modele dezvoltate în literatura de specialitate este acela în care firma este privită ca un sistem dinamic.

Acest model analizează corelația dinamică dintre investițiile făcute din profiturile aduse de activele corporale, investițiile făcute din credite şi politica de dividende a firmei.

Ipotezele modelului:

Ipoteza 1. Firma are o producție omogenă, iar funcția de producție este liniară:

$$Q(t) = q\,K(t) \tag{1}$$

unde:

- $K(t)$ sunt bunurile de capital, exprimate valoric. Se face ipoteza că o unitate de capital este egală cu o unitate monetară (s-a ales drept numerar unitatea de capital);
- $Q(t)$ reprezintă nivelul producției, exprimat valoric;
- q reprezintă productivitatea medie a capitalului, $q = \dfrac{Q(t)}{K(t)} = ct$. Se presupune că productivitatea medie este egală cu productivitatea marginală.

Toată producția se presupune că se vinde, astfel încât stocul de producție finită este zero.

Ipoteza 2. Funcția de vânzări $S(Q(t))$ este pozitivă, strict concavă şi satisface legea veniturilor descrescătoare la scala de fabricație:

$$S(Q(t)) = p(Q(t))\,Q(t) \tag{2}$$

cu:

- $S(Q)$ - funcția de venit;
- $p(Q(t))$ - funcția inversă a cererii (piața produsului finit este cu competiție imperfectă); $p'(Q(t)) < 0$

$$\begin{cases} S'(Q) > 0 \\ S''(Q) < 0 \\ S(Q) > 0 \Leftrightarrow Q > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Proprietățile funcției de vânzări arată faptul că aceasta este crescătoare în raport cu producția şi cu randamente descrescătoare la scală. De asemenea, producția nu poate fi negativă.

Ipoteza 3. Singurul input este constituit de bunurile capital. Deprecierea capitalului (amortizarea) este proporțională cu valoarea capitalului $aK(t)$, a fiind rata de amortizare.

Venitul net din vânzări (profitul brut) este:

$$\Pi(K(t)) = [\, q\, p(Q(t)) - a]\, K(t) \tag{4}$$

Ipoteza 4. Singurul tip de active corporale ale firmei, bunurile capital, pot fi finanțate din împrumuturi şi/sau acțiuni:

$$K(t) = X(t) + Y(t) \tag{5}$$

unde:

$X(t)$ – valoarea acțiunilor;

$Y(t)$ – valoarea creditelor.

Se cunosc, de asemenea, valorile inițiale ale capitalului ($K(0) = K_0$), acțiunilor ($X(0) = X_0$) şi împrumuturilor ($Y(0) = Y_0$).

Ipoteza 5. Creşterea valorii totale a acțiunilor (a capitalului social) se realizează prin acumulări din profit.

$$\dot{X}(t) = E(t) \tag{6}$$

unde:

- $\dot{X}(t)$ - creşterea valorii acțiunilor;
- $E(t)$ - partea din profit utilizat pentru creşterea valorii acțiunilor.

Profitul poate fi utilizat pentru investiții şi/sau pentru creşterea valorii acțiunilor.

$$E(t) = (1 - f) \cdot [\Pi(K(t)) - rY(t)] - D(t) \tag{7}$$

unde:

- f rata de impozitare a profitului corporal;
- r rata dobânzii;
- $rY(t)$ valoarea dobânzii;
- $(1 - f)[\Pi(K(t)) - rY(t)]$ profitul net după impozitare şi plata datoriilor.

- $D(t)$ valoarea dividendelor;
- $E(t)$ acumulările din profit sunt partea care rămâne din profiturile corporale, după plata impozitului şi a dividendelor.

Ipoteza 6. Investiţiile nete sunt:

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t) \tag{8}$$

unde:

$I(t)$ investiţia brută;
$aK(t)$ deprecierea capitalului.

$$\dot{K}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) \text{ relaţia de dinamică a balanţei.} \tag{9}$$

Ipoteza 7. Volumul creditului este restricţionat la o pondere din valoarea capitalului social:

$$Y(t) \leq k\,X(t) \tag{10}$$

unde:

k = ponderea maximă a împrumutului.

Ipoteza 8. Costurile unitare depind de structura de finanţare:
$c_N; N = X, Y, YX$

unde:

X finanţarea din acţiuni (autofinanţare);
Y finanţarea din împrumut maxim;
YX finanţarea mixtă.

Ipoteza 9. Pentru demararea activităţii, venitul marginal în momentul iniţial depăşeşte costul marginal (oricare dintre costurile unitare):

$$S'(Q((t))\big|_{t=0} > \max_N\{c_N\}$$

S-a făcut ipoteza că costul unitar este egal cu costul marginal.

Ipoteza 10. Firma se dezvoltă numai dacă venitul net din vânzări este pozitiv:

$$\Pi(K(t)) \geq 0$$

Ipoteza 11. Piaţa financiară şi piaţa monetară se consideră a fi două pieţe distincte, astfel încât preţurile pe cele două pieţe sunt diferite:
$i \neq (1 - f)r$

unde:

i este preţul pe piaţa financiară (considerat ca randament al acţiunilor) – dividendele care revin la o unitate monetară plătită de acţionari pe acțiuni; pentru firmă i este un cost, este costul unei acțiuni: firma trebuie să asigure pentru fiecare unitate monetară plătită de acționari pe acțiuni, o revenire i.

$(1 - f) \cdot r$ este costul unitar al creditului. Întrucât rata de impozitare se aplică după plata datoriilor, la o unitate monetară profit net (după impozitare), revine mai puțin de o unitate monetară dobândă. Este partea dintr-o unitate monetară de profit care revine pentru amortizarea creditului.

Ipoteza 12. Valoarea acțiunilor în momentul inițial este strict pozitivă:

$$X(0) > 0$$

Performanța modelului: maximizarea valorii firmei calculată ca sumă de dividende actualizate pe intervalul $[0, T]$ şi a valorii reale finale a capitalului social.

Variabile de decizie (control):

$I(t)$ – investiția brută;
$Y(t)$ – volumul creditelor;
$D(t)$ – valoarea dividendelor.

Variabile de stare:

$X(t)$ – valoarea acțiunilor;
$K(t)$ – valoarea bunurilor capital.

Modelul dinamic al firmei

$$\max_{D,I} \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT} X(T) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (1-f)\left[\Pi(K(t)) - rY(t)\right] - D(t) = \\ &(1-f)\left[\Pi(K(t)) - r(K(t) - X(t))\right] - D(t)\end{aligned} \tag{12}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t), K(0) = K_0 \tag{13}$$

restricții liniare asupra stării : $K(t) \geq X(t)$ (14)

$$(1+k)X(t) \geq K(t) \tag{15}$$

Observație: din ipoteza (7) rezultă că $Y(t) \leq kX(t)$, care împreună cu relația de balanță conduce la:

$$\left.\begin{aligned} K(t)-X(t)\le kX(t) \Rightarrow K(t)\le (1+k)X(t) \\ K(t)=X(t)+Y(t)\Rightarrow K(t)\ge X(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow X(t)\le K(t)\le (1+k)X(t)$$

restricţii liniare asupra comenzii $D(t)$: $\begin{cases} D(t)\ge 0 & (16) \\ D_{\max}\ge D(t) & (17)\end{cases}$

$\Rightarrow\ 0\le D(t)\le D_{\max}$

restricţii liniare asupra comenzii $I(t)$: $\begin{cases} I(t)\ge I_{\min} & (18) \\ I_{\max}\ge I(t) & (19)\end{cases}$

$\Rightarrow\ I_{\min}\le I(t)\le I_{\max}$

Aplicarea principiului lui Pontreaghin

Construim Hamiltonianul problemei:

$$\begin{aligned} &H\big(K(t),X(t),I(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),t\big)= \\ &D(t)+\lambda_1(t)\{(1-f)[\Pi(K(t))-r(K(t)-X(t))]-D(t)\}+\lambda_2(I(t)-aK(t))\end{aligned} \tag{20}$$

Lagrangeanul problemei:

$$\begin{aligned} &L\big(K(t),X(t),I(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\nu_1(t),\nu_2(t),\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),\mu_4(t),t\big) \\ &=D(t)+\lambda_1(t)\{(1-f)[\Pi(K(t))-r(K(t)-X(t))]-D(t)\}+\lambda_2(t)(I(t)-aK(t)) \\ &+\nu_1(t)\big(K(t)-X(t)\big)+\nu_2(t)\big((1+k)X(t)-K(t)\big)+\mu_1(t)\big(I(t)-I_{\min}\big)+ \\ &\mu_2(t)\big(I_{\max}-I(t)\big)+\mu_3(t)D(t)+\mu_4(t)\big(D_{\max}-D(t)\big)\end{aligned} \tag{21}$$

Condiţiile de optim:

$$\dot{\lambda}_1(t)=i\lambda_1(t)-\frac{\partial L}{\partial X(t)}=\big[i-(1-f)r\big]\lambda_1(t)+\nu_1(t)-(1+k)\nu_2(t) \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_2(t)&=i\lambda_2(t)-\frac{\partial L}{\partial K(t)} \\ &=(i+a)\lambda_2(t)-\lambda_1(t)(1-f)\big(\Pi'_K(K(t))-r\big)-\nu_1(t)-\nu_2(t)\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial I(t)}=0 \Leftrightarrow \lambda_2(t)+\mu_1(t)-\mu_2(t)=0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial D(t)}=0 \Leftrightarrow 1-\lambda_1(t)+\mu_3(t)-\mu_4(t)=0 \tag{25}$$

Condiţiile (24) şi (25) reprezintă condiţii de maximizare a Lagrangeanului.

$$\mu_1(t)\big[I(t)-I_{\min}\big]=0 \tag{26}$$

$$\mu_2(t)\left[I_{\max} - I(t)\right] = 0 \tag{27}$$

$$\mu_3(t)D(t) = 0 \tag{28}$$

$$\mu_4(t)\left[D_{\max} - D(t)\right] = 0 \tag{29}$$

$$\mu_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,4} \tag{30}$$

$$\nu_1(t)\left[K(t) - X(t)\right] = 0 \tag{31}$$

$$\nu_2(t)\left[(1+k)X(t) - K(t)\right] = 0 \tag{32}$$

$$\nu_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,2} \tag{33}$$

Eliminăm cazurile în care $I(t)$ şi $D(t)$ sunt pe limitele artificiale:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(t) > 0 &\Rightarrow I(t) = I_{\max} \\ \mu_2(t) > 0 &\Rightarrow I(t) = I_{\min} \\ \mu_4(t) > 0 &\Rightarrow D(t) = D_{\max} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu_4(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a) \\ b) \end{cases}$$

a) din (24) $\Rightarrow \lambda_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_2(t) = 0 \Rightarrow$ din (23):

$$0 = (i+a)\cdot 0 - \lambda_1(t)(1-f)\cdot\left[\Pi'_K(K(t)) - r\right] - \nu_1(t) + \nu_2(t) \Rightarrow$$

$$\lambda_1(t)(1-f)\cdot\left[\Pi'_K(K(t)) - r\right] = \nu_2(t) - \nu_1(t) \tag{34}$$

b) din (25): $\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t) \Rightarrow \dot{\lambda}_1(t) = \dot{\mu}_3(t) \Rightarrow$ din (22):

$$\dot{\mu}_3(t) = \{i - (1-f)r\}(1+\mu_3(t)) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \tag{35}$$

Calculăm profitul marginal:

$$\frac{\partial \Pi(K(t))}{\partial K(t)} = \frac{\partial}{\partial K(t)}\left[S(Q(t)) - aK(t)\right] = \frac{\partial S(\cdot)}{\partial Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(K(t))}{\partial K(t)} - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Pi(K(t))}{\partial K(t)} = q \cdot S'_Q - a \tag{36}$$

Transformăm ecuaţiile de dinamică ale variabilelor adjuncte în ecuaţie de dinamică a multiplicatorului $\mu_3(t)$.

Înlocuim în (34) pe $\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t)$ şi rezultatul obţinut în (36):

Tr. Nr.	$\mu_3(t)$	$\nu_1(t)$	$\nu_2(t)$
1	+	0	+
2	+	0	0
3	+	+	0
4	0	+	0
5	0	0	+

$$(1+\mu_3(t))(1-f)\left[q\cdot S'_Q - a - r\right] = \nu_2(t) - \nu_1(t) \tag{37}$$

Condițiile de optim devin:

$$\dot{\mu}_3(t) = \left[i-(1-f)r\right](1+\mu_3(t)) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \tag{38}$$

$$(1+\mu_3(t)(1-f)\left[q\cdot S'_Q - (a+r)\right] = \nu_2(\mathrm{t}) - \nu_1(\mathrm{t}) \tag{39}$$

$$\lambda_2(t) = 0 \tag{40}$$

$$\lambda_1(t) = 1+\mu_3(t) \tag{41}$$

$$I(t) - I_{\min} > 0 \tag{42}$$

$$I_{\max} - I(t) > 0 \tag{43}$$

$$\mu_3(t)D(t) = 0 \tag{44}$$

$$\mu_3(t) \geq 0 \tag{45}$$

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu_4(t) = 0 \tag{46}$$

$$\nu_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,2} \tag{47}$$

$$\nu_1(t)\left[K(t) - X(t)\right] = 0 \tag{48}$$

$$\nu_2(t)\left[(1+k)X(t) - K(t)\right] = 0 \tag{49}$$

<u>Traiectorii neadmisibile</u>

1) $\nu_1(t) > 0, \nu_2(t) > 0 \Rightarrow K(t) = X(t), (1+k)X(t) = K(t) \Rightarrow$

$$(1+k)X(t) = X(t) \Rightarrow \begin{cases} X(t) = 0 \\ K(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ K(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{contrazice ipoteza X(0) > 0}$$

2) $\nu_1(t) = \nu_2(t) = \mu_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = 0 \Rightarrow$ din (38) $\Rightarrow i = (1-f)r \Rightarrow$ contrazice ipoteza 11.

Traiectorii de bază admisibile

Traiectoria nr.1 $\mu_3(t) > 0, \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) > 0$

$\mu_3(t) > 0 \Rightarrow$ din (44), $D(t) = 0$; nu se plătesc dividende (tot profitul se reinvesteşte).

$\nu_2(t) > 0 \Rightarrow$ din (49), $K(t) = (1+k)X(t) = X(t) + \underbrace{kX(t)}_{Y(t)} \Rightarrow$ împrumuturi maxime.

(39) $\Rightarrow (1+\mu_3(t))(1-f)\lfloor qS'_q - (a+r)\rfloor = \nu_2(t) \Rightarrow \lfloor qS'_q - (a+r)\rfloor > 0$

$\Rightarrow qS'_q > (a+r) \Rightarrow$ venitul marginal din vânzări este mai mare decât costul marginal în cazul finanţării din împrumut maxim şi acţiuni (tot profitul în acest caz se reinvesteşte).

$$S'_q > \frac{a+r}{q} = c_{YX}$$

$$c_{YX} = \frac{a+r}{\dfrac{Q(\cdot)}{K(\cdot)}} = \frac{aK(t) + rK(t)}{Q(t)}$$

Notăm Q_{YX}^* soluţia ecuaţiei $S'_q = c_{YX}$.

Pe traiectoria 1:

S'_q este descrescătoare, deci $Q(t) < Q_{YX}^*$; producţia este mai mică decât valoarea staţionară.

$Y(t) = kX(t) \Rightarrow \dot{Y}(t) = k\dot{X}(t)$

$\dot{X}(t) = (1-f)[S(Q(t)) - aK(t) - rY(t)] - \underbrace{D(t)}_{0} \Rightarrow \dot{X}(t) > 0 \Rightarrow \dot{Y}(t) > 0$

Pe traiectoria 1, acţiunile cresc şi împrumuturile cresc.

$\mu_3(t) > 0 \Rightarrow$ pentru a exista comutaţie, la începutul şi la sfârşitul traiectoriei 1, $\mu_3(t) = 0 \Rightarrow$ $\overrightarrow{\mu_3}(t) = \lim\limits_{\substack{t\to\tau \\ t<\tau}} \mu_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) < 0$ limita la sfârşitul traiectoriei 1.

$\overleftarrow{\mu_3}(t) = \lim\limits_{\substack{t\to\tau \\ t>\tau}} \mu_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) > 0$ limita la începutul traiectoriei 1.

Din (38) $\Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = \{i-(1-f)r\}(1+\underbrace{\mu_3(t)}_{0}) + \underbrace{\nu_1(t)}_{0} - (1+k)\nu_2(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = \{i-(1-f)r\} - (1+k)\nu_2(t) \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) > 0 \Rightarrow$

$\{i-(1-f)\} - (1+k)\nu_2(t) > 0 \Rightarrow$

$i > (1-f)r + (1+k)\nu_2(t) \Rightarrow i > (1-f)r \Rightarrow$ la începutul traiectoriei 1 acţiunile sunt scumpe şi creditele ieftine.

Traiectoria nr.2

$\mu_3(t) > 0, \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) = 0$

$\mu_3(t) > 0 \Rightarrow$ din (44), $D(t) = 0$**;** pe traiectoria 2 nu se plătesc dividende.

$\nu_1(t) = 0 \Rightarrow$ din (48), $K(t) > X(t)$; pe traiectoria 2 se fac împrumuturi.

$\nu_2(t) = 0 \Rightarrow$ din (49), $K(t) < (1+k)X(t) \Rightarrow K(t) < X(t) + kX(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y(t) < kX(t) \Rightarrow$ împrumuturile nu sunt la maxim.

(39)$\Rightarrow (1+\mu_3(t))(1-f)\lfloor qS'_q - (a+r)\rfloor = \underbrace{\nu_2(t)}_{=0} - \underbrace{\nu_1(t)}_{=0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(1+\mu_3(t))}_{\neq 0}\underbrace{(1-f)}_{\neq 0}\lfloor qS'_q - (a+r)\rfloor = 0 \Rightarrow qS'_q - (a+r) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow qS'_q - (a+r) = 0 \Rightarrow S'_q = \dfrac{a+r}{q} = c_{YX} \Rightarrow$ traiectoria 2 este staţionară: $Q(t) = Q^*_{YX}$, $I(t) = a K^*_{YX}$

$Q(t) = qK(t) \Rightarrow K^*_{YX} = \dfrac{Q^*_{YX}}{q} \Rightarrow \dot{K}(t) = 0 \Rightarrow$ capitalul nu creşte pe traiectoria 2.

<u>Începutul traiectoriei 2</u>:

$\dot{\mu}_3(t) > 0, \overleftarrow{\mu_3}(t) = 0 \Rightarrow$ din (38) $\Rightarrow i > (1-f)r \Rightarrow$ acţiunile sunt scumpe şi creditele ieftine; deci nu se plătesc dividende, iar împrumutul şi tot profitul se reinvesteşte.

<u>Sfârşitul traiectoriei 2</u>:

$\dot{\mu}_3(t) < 0, \overrightarrow{\mu_3}(t) = 0 \Rightarrow$ din (38) $\Rightarrow i < (1-f)r \Rightarrow$ acţiunile sunt ieftine şi creditele scumpe; se plătesc dividende.

Traiectoria nr.3 $\mu_3(t) > 0, \nu_1(t) > 0, \nu_2(t) = 0$

$\mu_3(t) > 0 \Rightarrow$ din (44), $D(t) = 0$**;** pe traiectoria 3 nu se plătesc dividende.

$\nu_1(t) > 0 \Rightarrow$ din (48) $\Rightarrow K(t) = X(t) \Rightarrow$ nu se fac împrumuturi, $Y(t) = 0$ $\Rightarrow \dot{Y}(t) = 0 \Rightarrow$ autofinanțare.

$$(39) \Rightarrow (1+\mu_3(t))(1-f)\left[qS'_Q - (a+r)\right] = -\nu_1(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+\mu_3(t))}_{>0}\underbrace{(1-f)}_{>0}\left[qS'_Q - (a+r)\right] < 0 \Rightarrow qS'_Q - (a+r) < 0 \Rightarrow qS'_Q < (a+r)$$

$\Rightarrow$ $S'_Q < c_{YX} \Rightarrow$($S'$ este descrescătoare): $Q(t) > Q^*_{YX}$, $K(t) > K^*_{YX}$ $\Rightarrow$ $\dot{K}(t) > 0$, capitalul crește pe traiectoria 3.

$D(t) = 0 \Rightarrow$ $\dot{X}(t) > 0 \Rightarrow$ acțiunile cresc pe traiectoria 3.

Începutul traiectoriei 3:

$\dot{\mu}_3(t) > 0, \overleftarrow{\mu_3}(t) = 0 \Rightarrow$ din (38) $\Rightarrow i > (1-f)r$

Sfârşitul traiectoriei 3:

$\dot{\mu}_3(t) < 0, \overrightarrow{\mu_3}(t) = 0 \Rightarrow$ din (38) $\Rightarrow i < (1-f)r$

Traiectoria nr.4 $\mu_3(t) = 0, \nu_1(t) > 0, \nu_2(t) = 0$

$\mu_3(t) = 0 \Rightarrow$ din (44), $D(t) > 0$**;** se plătesc dividende.

$\nu_1(t) > 0 \Rightarrow$ din (48) $\Rightarrow K(t) = X(t) \Rightarrow$ nu se fac împrumuturi, $Y(t) = 0$

$$(39) \Rightarrow (1+\underbrace{\mu_3(t)}_{0})(1-f)\left[qS'_Q - (a+r)\right] = \underbrace{\nu_2(t)}_{0} - \nu_1(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-f)\left[qS'_Q - (a+r)\right] = -\nu_1(t) \Rightarrow$$

$$\nu_1(t) = -(1-f)\left[qS'_Q - (a+r)\right] \qquad (50)$$

$\mu_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) \overset{38}{\Rightarrow}$ $\{i - (i - f)r\} \cdot (1 + \underbrace{\mu_3(t)}_{0}) + \nu_1(t) - (1 + k)\ \underbrace{\nu_2(t)}_{0}$ $= 0 \Rightarrow$ $\{i - (1 - f)r\} + \nu_1(t) = 0$ $\overset{50}{\Rightarrow}$ $\{i - (1 - f)r\}$ $=$ $(1-f)\left[qS'_Q - (a+r)\right]$ $\Rightarrow$ S'_Q $= \frac{1}{q}\left(a + \frac{i}{1-f}\right) = c_X$

$c_X \rightarrow$ costul unitar în cazul autofinanțării

Venitul marginal din vânzări este egal cu costul marginal al finanțării din acțiuni (autofinanțării).

Traiectoria 4 este staţionară $\Rightarrow Q(t) = Q_X^* \Rightarrow K(t) = K_X^* \Rightarrow I^* = a K_X^*$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{K}(t)=0\\ \dot{Y}(t)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{X}(t) = 0 \Rightarrow \text{valoarea acţiunilor nu creşte}$$

(38) $\Rightarrow 0 = \{i - (1 - f)r\}(1 + 0) + \nu_1(t) - 0 \overset{\nu_1(t)>0}{\Rightarrow} i - (1 - f)r < 0 \Rightarrow i < (1 - f)r \Rightarrow$ pe traiectoria 4 acţiunile sunt ieftine şi creditele sunt scumpe.

Traiectoria 5 $\mu_3(t) = 0, \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) > 0$

$\mu_3(t) = 0 \Rightarrow$ din (44), $D(t) > 0$ **;** se plătesc dividende.

$\nu_1(t) = 0 \Rightarrow$ din (48) $\Rightarrow K(t) > X(t) \Rightarrow$ se fac împrumuturi, $Y(t) > 0$.

$\nu_2(t) > 0 \Rightarrow$ din (49) $\Rightarrow K(t) = (1+k)X(t) \Rightarrow Y(t) = kX(t)$ împrumuturi la maxim.

$$(39) \Rightarrow (1+\underbrace{\mu_3(t)}_{0})(1-f)\lfloor qS'_Q - (a+r)\rfloor = \nu_2(t) - \underbrace{\nu_1(t)}_{0} \Rightarrow$$

$$(1-f)\lfloor qS'_Q - (a+r)\rfloor = \nu_2(t) \qquad (51)$$

$$(38) \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = 0 \Rightarrow 0 = \{i - (1 - f)r\}(1 + 0) + \underbrace{\nu_1(t)}_{0} - (1 + \mathrm{k})\nu_2(t)$$

$$\overset{\nu_1(t)>0}{\Rightarrow} 0 = \{i - (1 - f)r\}(1 + 0) - (1 + \mathrm{k})\nu_2(t) \Rightarrow$$

$$S'_Q = \frac{1}{q}\left(a + \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\frac{i}{1-f}\right) = c_Y$$

$c_Y \rightarrow$ costul marginal al finanţării din împrumuturi maxime şi plata dividendelor.

Venitul marginal din vânzări este egal cu costul marginal al finanţării din împrumut maxim şi plata dividendelor.

$S'_Q = c_Y \Rightarrow$ traiectoria 5 este staţionară $\Rightarrow Q(t) = Q_Y^* \Rightarrow K(t) = K_Y^* \Rightarrow I^* = a K_Y^* \Rightarrow \dot{K}(t) = 0$.

$D(t) > 0 \Rightarrow \dot{X}(t) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\dot{K}(t)=0\\ \dot{X}(t)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{Y}(t) = 0 \Rightarrow \text{valoarea împrumuturilor nu creşte.}$$

$$(38) \Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = 0 \Rightarrow 0 = \{i - (1 - f)r\}(1 + 0) + \underbrace{\nu_1(t)}_{0} - (1 + \mathrm{k})\nu_2(t) \Rightarrow$$

$\overset{\nu_1(t)>0}{\Rightarrow}$ $0 = \{i - (1 - f)r\}(1 + 0) - (1 + \mathrm{k})\nu_2(t) \Rightarrow i > (1 - f)r \rightarrow$ pe traiectoria 5 acțiunile sunt scumpe şi creditele sunt ieftine (se justifică împrumutul maxim şi plata dividendelor).

TRAIECTORII FINALE

Trebuie să verifice condițiile de transversalitate:

$$\begin{cases} \lambda_i(t) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} S(x^*(T),T) + \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \gamma_j \dfrac{\partial}{\partial x_i} h_j(x^*(T),T) \\ \left.\begin{array}{l} \gamma_j h_j(x^*(T),T) = 0 \\ \gamma_j \geq 0 \end{array}\right\} j = \overline{1,q} \end{cases}$$

În cazul nostru:

$h_1(X(T),T) = [K(T) - X(T)] \geq 0$

$h_2(X(T),T) = [(1 + k)\, X(T) - K(T)] \geq 0$

$S(X(T),T) = X(T)$

Variabilele de stare sunt:

$X_1(t) = X(T)$ = valoarea acțiunilor

$X_2(t) = K(T)$ = valoarea capitalului

$$\lambda_1(T) = 1 - \gamma_1 + (1 + k)\gamma_2 \tag{52}$$

$$\lambda_2(T) = \gamma_1 - \gamma_2 \tag{53}$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \geq 0 \tag{54}$$

$$\gamma_1[K(T) - X(T)] = 0 \tag{55}$$

$$\gamma_2[(1 + k)\, X(T) - K(T)] = 0 \tag{56}$$

Din (55) + (56) $\Rightarrow$ este imposibil cazul în care $\gamma_1 > 0$ şi $\gamma_2 > 0$ întrucât aceasta ar însemna $K(T) = X(T)$ şi $(1 + k)\, X(T) - K(T) = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

Din (53) $\Rightarrow$ $\lambda_2(T) = \gamma_1 - \gamma_2$ şi conform (44) $\lambda_2(T) = 0$, iar din observația că nu pot fi ambele strict pozitive $\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (54).

Ştim că $\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t) \Rightarrow \mu_3(t) = \lambda_1(t) - 1 \Rightarrow \mu_3(T) =$

$$= \lambda_1(T) - 1 = -\gamma_1 + (1+k)\gamma_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu_3(T) = 0 \\ \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$$

Singurele traiectorii care satisfac aceste condiții sunt:
Traiectoria 4, pe care $i < (1-f)r$
Traiectoria 5, pe care $i > (1-f)r$

Şiruri de traiectorii optimale care se finalizează cu traiectoria 5

Condiții pe care trebuie să le satisfacă predecesoarea:

1) Pe traiectoria 5 $Y(t) = kX(t) \Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $Y(t) = kX(t)$
2) Pe traiectoria 5 $Q(t) = Q_Y^*$ $\Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $Q(t) = Q_Y^*$
3) Pe traiectoria 5 $i > (1-f)r \Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $i > (1-f)r$
4) Pe traiectoria 5 $\mu_3(t) = 0 \Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $\mu_3(t) = 0$

Din tabelul de mai jos:

Traiectoria	Predecesor admisibil	Cauza
1	DA	satisface 1...4
2	NU	nu satisface 2
3	NU	nu satisface 1
4	NU	nu satisface 3

rezultă că singura predecesoare posibilă este traiectoria 1.
Predecesorii traiectoriei 1

Cerințele predecesoarei

Traiectoria 1	Predecesoare
$\left.\begin{matrix}\dot{K} = 0 \\ \dot{Y} = 0\end{matrix}\right\}$	K(t) şi Q(t) crescătoare

$Y(t) = k\cdot X(t)$ $\rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $Y(t) = k\cdot X(t)$
$Q(t) < Q_Y^*$ $\rightarrow$ pe traiectoria predecesoare $Q(t) < Q_Y^*$
$i > (1-f)\cdot r$ $\rightarrow$ $i > (1-f)\cdot r$
$\mu_3(t) > 0 \rightarrow \overrightarrow{\mu_3}(t) = 0$

Nici una dintre traiectorii nu poate precede traiectoria 1.

Traiectoria de magistrală va cuprinde doar TR 5 sau succesiunea de traiectorii TR 1 $\rightarrow$ TR 5, în funcție de condițiile inițiale:

Condiții inițiale	Traiectoria optimă	Evoluția capitalului
$X(0) = \frac{1}{(1+k)\cdot q}Q_Y^*$	TR 5	$K(t) = \frac{1}{q}Q(t)$
$X(0) < \frac{1}{(1+k)\cdot q}Q_Y^*$	TR 1 → TR 5	$K(t) = (1 + k)\cdot X(t) \to X(t) = \frac{K(t)}{1+k} = \frac{1}{(1+k)\cdot q}Q(t)$

Şiruri de traiectorii optimale care se finalizează cu TR4

Predecesorii traiectoriei 4

TR 4	La sfârşitul predecesoarei
$K(t) = X(t) \to Y(t) = 0$	$Y(t) = 0$
$Q(t) = Q_X^*$	$Q(t) = Q_X^*$
$i < (1 - f)\cdot r$	$i < (1 - f)\cdot r$
$\mu_3(t) = 0$	$\overrightarrow{\mu_3}(t) = 0$

TR 3 satisface simultan toate condițiile.

Predecesorii traiectoriei 3

TR 3	La sfârşitul predecesoarei
$Q(t) > Q_{YX}^*$	$Q(t) = Q_{YX}^*$ (pe toată traiectoria predecesoare)
$i < (1 - f)\cdot r$	$i < (1 - f)\cdot r$
$Y(t) = 0$	$Y(t) = 0$

Singura traiectorie care satisface aceste cerințe este traiectoria 2.

Predecesorii traiectoriei 2

TR 2	La sfârşitul predecesoarei
$Q(t) = Q_{YX}^*$	$Q(t) < Q_{YX}^*$
$\left.\begin{array}{l}\dot{K}(t) = 0\\ \dot{X}(t) > 0\end{array}\right\} \to \dot{Y}(t) > 0$	$i < (1 - f)\cdot r$

Singura traiectorie care satisface aceste cerințe este traiectoria 1.

Traiectoriile de magistrală, pentru cazul $i < (1 - f)\cdot r$, pot fi sintetizate, în funcție de condițiile inițiale, în tabelul de mai jos:

Condițiile inițiale	Traiectoria optimală
$X(0) = K(0)$ şi $X(0) = \frac{1}{q}\cdot Q_X^*$	TR 4
$X(0) = K(0)$ şi $\frac{1}{q}\cdot Q_{YX}^* < X(0) < \frac{1}{q}\cdot Q_X^*$	TR 3 → TR 4
$K(0) = \frac{1}{q}\cdot Q_{YX}^*$ şi $X(0) = \frac{1}{q}\cdot Q_{YX}^*$	TR 2 → TR 3 → TR 4
$K(0) = (1 + k)\cdot X(0)$ şi $X(0) < \frac{1}{q(1+k)}Q_{YX}^*$	TR 1 → TR 2 → TR 3 → TR 4

Rezumatul traiectoriilor de bază

TR nr.	Structura financiară	Nivelul producției	$\dot{X}(t)$	$\dot{K}(t)$	$D(t)$	Condiții de fezabilitate
1	$Y(t) = k\cdot X(t)$	$Q(t) < Q_{YX}^*$	+	+	0	–
2	$0 < Y(t) < k\cdot X(t)$	$Q(t) = Q_{YX}^*$	+	0	0	–
3	$Y(t) = 0$	$Q(t) > Q_{YX}^*$	+	+	0	–
4	$Y(t) = 0$	$Q(t) = Q_X^*$	0	0	+	$i < (1 - f)\cdot r$
5	$Y(t) = k\cdot X(t)$	$Q(t) = Q_Y^*$	0	0	+	$i > (1 - f)\cdot r$

Costurile firmei

c_Y – costul finanțării din împrumut maxim

$$c_Y = \frac{1}{q}\cdot\left[a + \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}\right]$$

$\frac{k}{1+k}$ → cota parte din împrumut pe o unitate de bun capital

$$Y(t) = k\cdot X(t),\ K(t) = (1 + k)\cdot X(t) \rightarrow \frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{k}{1+k} \rightarrow Y(t) = \frac{k}{1+k}\cdot K(t)$$

$r\cdot\frac{k}{1+k}$ → dobânda pe o unitate de bun capital

$\frac{i}{1-f}$ → rata de revenire a acționarilor, înainte de plata impozitului.

Dividendele se plătesc după impozitare ⇒ înainte de impozitare trebuie inclusă în cost valoarea $\frac{i}{1-f}$.

$\frac{1}{1+k}$ $\rightarrow$ partea dintr-o unitate monetară plătită pe acţiuni, care revine la o unitate de bun capital. $K(t) = (1 + k)\cdot X(t) \rightarrow \frac{X(t)}{K(t)} = \frac{1}{1+k} \Rightarrow$

$X(t) = \frac{1}{1+k} \cdot K(t)$

$\frac{1}{1+k} \cdot \frac{i}{1-f}$ $\rightarrow$ costul unei acţiuni (al dividendelor), pe o unitate de bun capital.

a – costul deprecierii capitalului

$\left[a + \frac{k}{1+k} r + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{i}{1-f}\right]$ = costul total care revine la o unitate de bun capital

$$q = \frac{Q(t)}{K(t)}$$

$\frac{1}{q} \cdot \left[a + \frac{k}{1+k} r + \frac{1}{1+k} \cdot \frac{i}{1-f}\right]$ = costul total pe o unitate de produs finit

$c_{YX} = \frac{1}{q}(a + r)$ $\rightarrow$ costul finanţării mixte (toate profiturile se reinvestesc şi nu se plătesc dividende); finanţare din împrumut maxim şi acţiuni.

$c_X = \frac{1}{q} \cdot \left(a + \frac{i}{1-f}\right)$ $\rightarrow$ costul finanţării numai din acţiuni (împrumuturile sunt zero şi se plătesc dividende).

c_Y include
- $a \rightarrow$ cost de producţie
- Cost de finanţare
  - Pe acţiuni $\frac{1}{1+k} \cdot \frac{i}{1-f}$
  - Din împrumuturi $r \cdot \frac{k}{1+k}$

Traiectorii de magistrală

a) Cazul în care împrumuturile sunt ieftine $(1 - f)\cdot r < i$

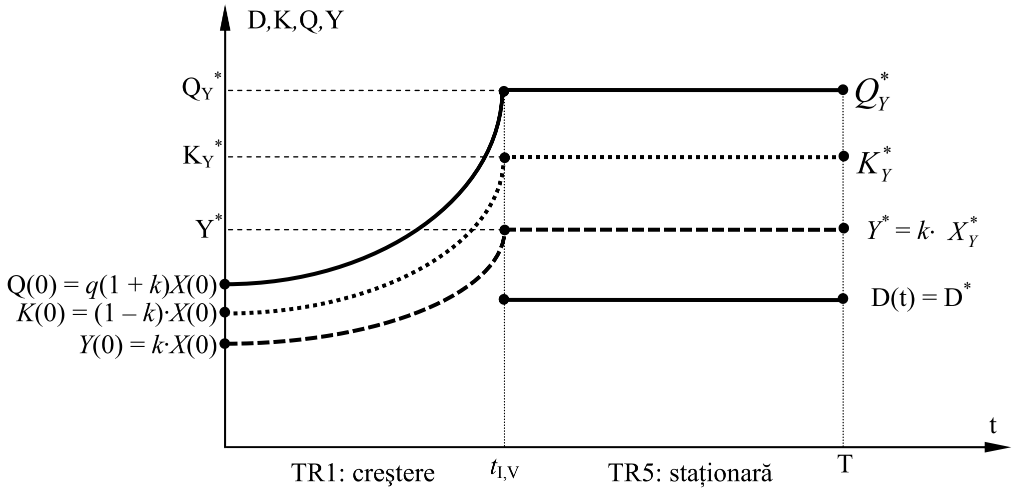

Figura 3.3 Traiectoria de magistrală în cazul creditelor ieftine

$Q(0) = q\cdot(1 + k)\cdot X(0)$, deoarece $K(t) = (1 - k)\cdot X(t)$.

Pe traiectoria 1 $K(t) < K_Y^* \Rightarrow X(0) < \dfrac{1}{(1+k)q} Q_Y^*$.

Firma porneşte de la valorile iniţiale şi se dezvoltă întrucât $\dot{K}(t) > 0$, $\dot{X}(t) > 0$, $\dot{Y}(t) > 0$, cu credite maxime, până în momentul în care $S_Q' = c_Y$, moment în care firma comută pe traiectoria staţionară.

Pe traiectoria 1 venitul marginal din vânzări este mai mare decât costul marginal în cazul finanţării din împrumut maxim.

Dorim să arătăm că această condiţie marginală implică faptul că venitul marginal al unei acţiuni este mai mare decât costul marginal al unei acţiuni (dat de venitul minim i). Avem:

$\dfrac{\partial \pi}{\partial K}$ → profitul marginal al bunurilor capital;

$\left[\dfrac{\partial \pi}{\partial K} - \dfrac{k}{1+k} r\right]$ → profitul marginal al bunurilor capital după plata datoriilor către bancă;

$(1 - f)\cdot\left[\dfrac{\partial \pi}{\partial K} - \dfrac{k}{1+k} r\right]$ → profitul marginal al bunurilor capital după plata datoriilor către bancă şi după impozitare;

$(1 + k) \to$ multiplicator al puterii de cumpărare a capitalului social: deoarece $K(t) = (1 + k)\cdot X(t)$ rezultă că o unitate monetară investită în capitalul social (pe acțiuni) este egală cu $(1 + k)$ unități monetare de bunuri capital (datorită împrumutului) şi mai departe că venitul marginal al unei acțiuni (al unei unități monetare investită în acțiuni) este egal cu $(1 + k) \cdot$ venitul marginal al bunurilor capital (al unei unități monetare investită în bunuri capital).

$(1 + k)\cdot (1 - f)\cdot\left[\frac{\partial\pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right] \to$ venitul marginal al unei acțiuni.

Pornind de la $S'_Q > c_Y$ rezultă $(1 + k)\cdot (1 - f)\cdot\left[\frac{\partial\pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right] > i$, unde i este costul marginal al acțiunii.

Într-adevăr, din $S'_Q > c_Y$ şi ținând cont că $c_Y = \frac{1}{q}\cdot\left[a + \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}\right]$ rezultă $q\cdot S'_Q - a > \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}$ şi deoarece $\frac{\partial\pi}{\partial K} = q\cdot S'_Q - a$ avem succesiv: $\frac{\partial\pi}{\partial K}(1 + k) > k\cdot r + \frac{i}{1-f} \Rightarrow$ $\frac{\partial\pi}{\partial K}(1 + k) - k\cdot r > \frac{i}{1-f} \Rightarrow (1 + k)\cdot (1 - f)\cdot\left[\frac{\partial\pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right] > i$.

Dacă venitul marginal al acțiunii este mai mare decât costul marginal al acțiunii nu se plătesc dividende ($D(t) = 0$), acționarii reinvestind toate câştigurile până când nivelul producției $Q(t)$ ajunge la nivelul Q_Y^* corespunzător profitului maxim.

Acționarii nu vor spori capitalul peste valoarea K_Y^*, deoarece va scădea atât venitul marginal al acțiunii în raport cu costul său marginal, cât şi venitul marginal din vânzări în raport cu costul marginal al producției. Rezultă că $\begin{Bmatrix} \dot{X}(t) = 0 \\ \dot{K}(t) = 0 \end{Bmatrix}$ deci pe traiectoria 5 toate profiturile se împart acționarilor:

$$D(t) = (1 - f)\cdot[\pi(K_Y^*) - r\cdot Y_Y^*] = (1 - f)\cdot[\pi(K_Y^*) - r\cdot k\cdot X_Y^*]$$

b) ***Cazul în care acțiunile sunt ieftine*** (***la începutul perioadei***) $i < (1 - f)\cdot r$

În cazul traiectoriei de magistrală precedente, se păstrează aceeaşi structură de finanțare pe întreg intervalul $[0, T]$: $i > (1 - f)\cdot r$.

În cazul acestei traiectorii de magistrală se va schimba structura de finanțare în timpul procesului de creştere.

Cazul $i < (1 - f)\cdot r$ la începutul perioadei de creştere

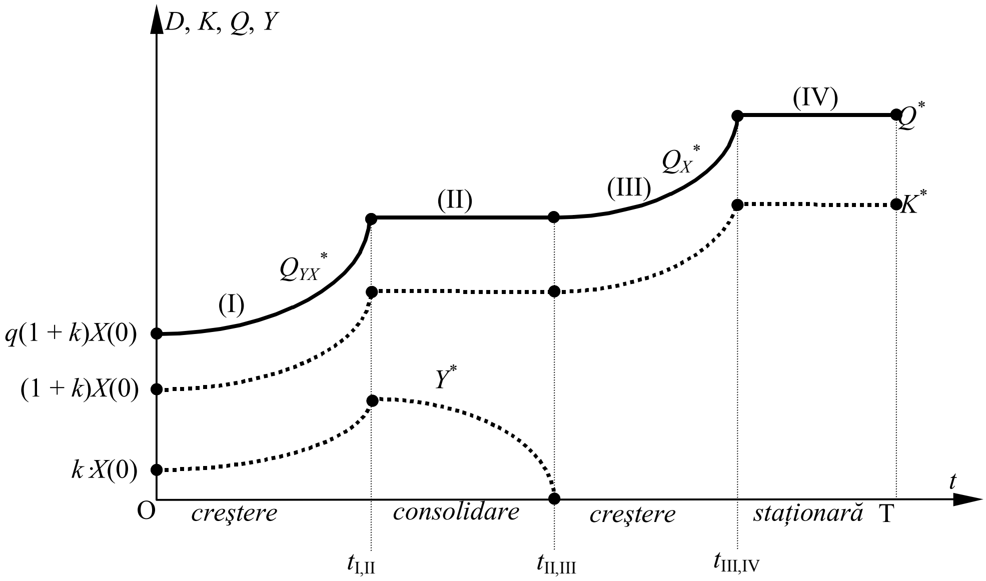

Figura 3.4 Traiectoria de magistrală pentru cazul creditelor scumpe

***TR* 1**. Firma îşi demarează activitatea cu o valoare mică a acţiunilor $X(0) < \dfrac{1}{q(1+k)} Q^*_{YX}$. În ciuda creditelor scumpe, firma porneşte activitatea cu împrumut maxim, datorită faptului că venitul marginal din vânzări este mai mare decât costul marginal al finanţării mixte (fiecare unitate de bun capital achiziţionat din împrumut va aduce un profit pozitiv) deci firma investeşte la maxim din împrumut şi câştig, rata de creştere a firmei fiind maximă.

Să arătăm că la începutul traiectoriei 1 $Q(t) < Q^*_{YX} \Rightarrow S'_Q > c_{YX} \Rightarrow$ profitul marginal al unei unităţi de bun capital este mai mare decât costul de finanţare, dacă finanţarea s-ar face numai din împrumut (deci se justifică împrumutul maxim).

$$S'_Q > c_{YX} = \frac{1}{q}\cdot(a + r)$$

$$\pi'_K = q\cdot S'_Q - a \rightarrow S'_Q = (\pi'_K + a)\cdot \frac{1}{q} > \frac{1}{q}\cdot(a + r) \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi'_K > r \rightarrow (1 - f)\cdot \pi'_K > (1 - f)\cdot r.$$

Deoarece $(1-f)\cdot \pi'_K > (1-f)\cdot r$ firma va atrage împrumut maxim pentru a-şi maximiza vânzările.

Întrucât la începutul perioadei de studiu acţiunile sunt ieftine, firma va reinvesti toate câştigurile (acţionarii renunţă la dividende).

Definim formula de pârghie:

$$R_E = R_T + (R_T - c)\cdot \frac{Y}{X}$$

$R_E = (1+k)\cdot(1-f)\cdot\left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k} r\right]$ este venitul marginal al acţiunii

$R_T = (1-f)\cdot \pi'_K$ este venitul marginal al capitalului după impozitare

$c = (1-f)\cdot r$ este costul marginal al împrumutului

Dacă $R_T > c \Rightarrow \frac{Y}{X}$ (ponderea împrumutului) trebuie să crească pentru ca venitul marginal al acţiunii R_E să crească.

Dacă $R_T < c \Rightarrow \frac{Y}{X}$ trebuie să scadă pentru ca R_E să crească.

În cazul traiectoriei 1 avem $R_T > c$, deci $\frac{Y}{X}$ trebuie să crească.

***TR* 2**: Când $Q(t)$ a devenit egal cu $Q^*_{YX} \Rightarrow S'_Q = c_{YX} \Rightarrow$ acţionarii au trei posibilităţi de împărţire a câştigurilor:

- să accepte plata dividendelor;
- să le utilizeze pentru dezvoltare (ajungându-se la un venit marginal mai mic decât costul marginal al împrumutului $(1-f)\cdot r$, ceea ce este exclus;
- să utilizeze câştigurile pentru plata datoriilor către bănci (pentru amortizarea creditelor, economisind $(1-f)\cdot r$ pentru fiecare unitate de capital împrumutat.

Deoarece $i < (1-f)\cdot r$, a treia variantă este cea mai economică $\Rightarrow$ până la momentul $t_{2,3}$ firma îşi achită toate datoriile, finalizând <u>perioada de consolidare</u>.

***TR* 3**: La sfârşitul traiectoriei 2, după faza de consolidare, $Q(t) < Q^*_X$ $\Rightarrow S'(Q) > c_X = \frac{1}{q}\cdot(a + \frac{i}{1-f}) \rightarrow S' = \frac{1}{q}[\pi'_K + a] > \frac{1}{q}\cdot(a + \frac{i}{1-f}) = c_X \rightarrow$ $\pi'_K > \frac{i}{1-f} \rightarrow (1-f)\cdot \pi'_K > i \rightarrow$ venitul marginal al bunurilor capital este mai mare decât costul marginal al bunurilor capital finanţate prin acţiuni $\Rightarrow$ pe traiectoria 3 investiţia netă se face din acţiuni.

După ce şi-a plătit datoriile firma începe o perioadă de creştere pe traiectoria 3 prin autofinanțare, până când $Q(t) = Q_X^*$, când începe traiectoria staționară, pe care se plătesc dividende.

***TR* 4**: $(1 - f)\cdot \pi'_K = i \rightarrow$ venitul marginal al capitalului este egal cu costul marginal în cazul finanțării din acțiuni $\Rightarrow$ capitalul a atins valoarea maximă $\Rightarrow$ se vor plăti dividende:

$$D(t) = (1 - f)\cdot\pi(K_X^*)$$