CAPITOLUL 2

UN MODEL CIBERNETIC AL FIRMEI

1. Firma – sistem cibernetic

Considerarea firmei ca sistem cibernetic este justificată de următoarele observaţii:

- în cadrul acesteia se desfăşoară ***un număr mare de activităţi***, fiecare fiind efectuată de ***un grup de oameni***, în general specializaţi pentru ***desfăşurarea eficientă*** a acesteia, toate acestea fiind într-un ***sistem variat de interdependenţe***, de regulă, riguros stabilite.
- activitatea, structura, dimensiunea, poziţia pe piaţă etc., sunt ***permanent în schimbare***, cu ritmuri şi intensităţi diferite
- activitatea firmei ***se desfăşoară într-un mediu extern*** foarte complex, ***greu previzibil***, faţă de care îşi raportează acţiunile, care cuprinde concurenţi, consumatori, acţionari, parteneri, facilităţi, taxe, legi, condiţii de mediu etc.
- diversificarea gamei sortimentale de bunuri şi servicii oferite de firmă poate fi asigurată doar prin mărirea numărului de activităţi, compartimente, factori de producţie, specializări, materii prime, informaţii etc.;
- activitatea normală a firmei necesită cel puţin un sistem de reglare şi control, care adaptează activitatea şi inputurile firmei în funcţie de outputurile acesteia şi starea mediului extern;
- firma este un sistem care atinge eficienţe, creează specializări, obţine produse imposibil de realizat fără conlucrarea dintre subsistemele acesteia, modifică prin activitatea sa mentalităţile şi relaţiile umane;
- fiecare firmă contribuie la crearea şi evoluţia mediului macroeconomic, a pieţelor şi relaţiilor economice şi sociale, prin realizarea şi vânzarea de bunuri şi servicii, prin cumpărarea de forţă de muncă, materii prime şi capital, prin utilizarea de servicii oferite de stat (educaţie, sănătate, apărare etc.) în schimbul plăţii taxelor şi impozitelor etc.;
- gradul de organizare al firmei creşte, în general, odată cu trecerea timpului şi cu creşterea volumului de informaţii deţinute de aceasta, ;

Activitatea generală a sistemului firmei constă în obţinerea, concentrarea, organizarea şi combinarea de resurse pentru a produce bunuri şi servicii destinate vânzării. Aceste resurse nu pot fi deţinute în totalitate de proprietarii firmei, ele trebuind a fi cumpărate de la deţinătorii acestora.

Existenţa firmelor este efectul constatării, pe baza experienţei societăţii umane, că este mai avantajos pentru întreprinzători, muncitori şi ceilalţi deţinători de mijloace de producţie, un contract general pe termen lung decât încheierea de contracte separate, cu fiecare din aceştia.

Practic, firmele cumpăra materii prime, capital, forţă de muncă etc., de la proprietarii acestora şi le transformă în bunuri şi servicii destinate vânzării iar proprietarii inputurilor folosesc veniturile obţinute din vânzarea acestora pentru a cumpăra bunuri şi servicii produse de firme.

Are loc astfel un schimb permanent între firmă şi beneficiarii factorilor de producţie prin intermediul pieţelor, fiecare influenţându-l şi fiind influenţat de dorinţele, deciziile şi acţiunile celuilalt (figura 1).

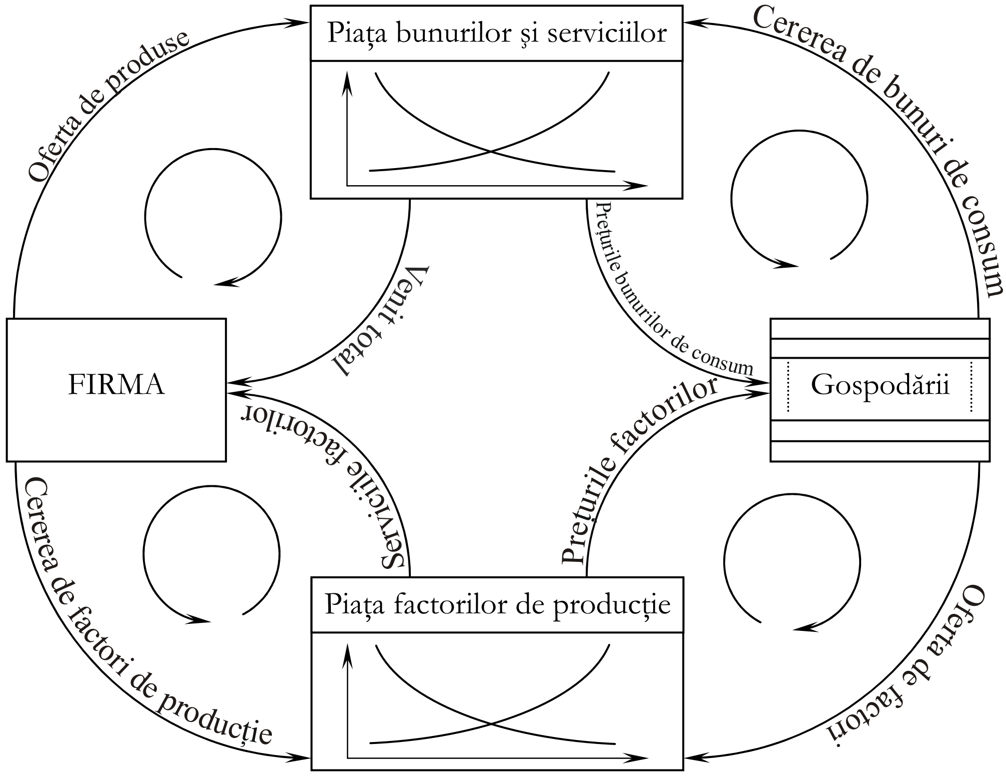


Figura 1

Mulţimea firmelor care acţionează într-o economie de piaţă formează sistemul producătorului, activitatea acestora concretizându-se în oferta pe piaţa bunurilor şi serviciilor şi cererea pe piaţa factorilor de producţie.

De asemenea, cele două pieţe vor influenţa acţiunile firmei, informaţiile privind cererea de bunuri şi oferta de mijloace de producţie, precum şi preţurile acestora având ca efect permanenta adaptare a producţiei şi structurii firmei la acestea.

Astfel, de pe piaţa bunurilor şi serviciilor firma va obţine informaţii privind cantitatea, calitatea cerut de consumatori, preţul la care sunt dispuşi să cumpere această cantitate, pretenţii legate de service şi aspect etc. Pe baza acestora el va decide care este structura sortimentală şi cantitatea de bunuri pe care o va produce spre vânzare.

Piaţa factorilor de producţie va informa firma asupra ofertei de factori de producţie disponibili la preţul oferit de aceasta iar în funcţie de acest răspuns firma va stabili programul de producţie optim.

Aceste influenţe se concretizează în existenţa a două bucle feed-back, având ca efect adaptarea producţiei firmei la cererea pieţei de bunuri şi la oferta pieţei de factori de producţie, aşa cum se vede în figura 2.

2. Structura firmei

Deoarece natura activităţii firmelor este foarte variată şi de asemenea dimensiunea unei firme va influenţa foarte mult distribuţia sarcinilor şi atribuţiilor precum şi specializarea personalului, este practic imposibil de stabilit o structură pe compartimente valabilă pentru toate firmele.

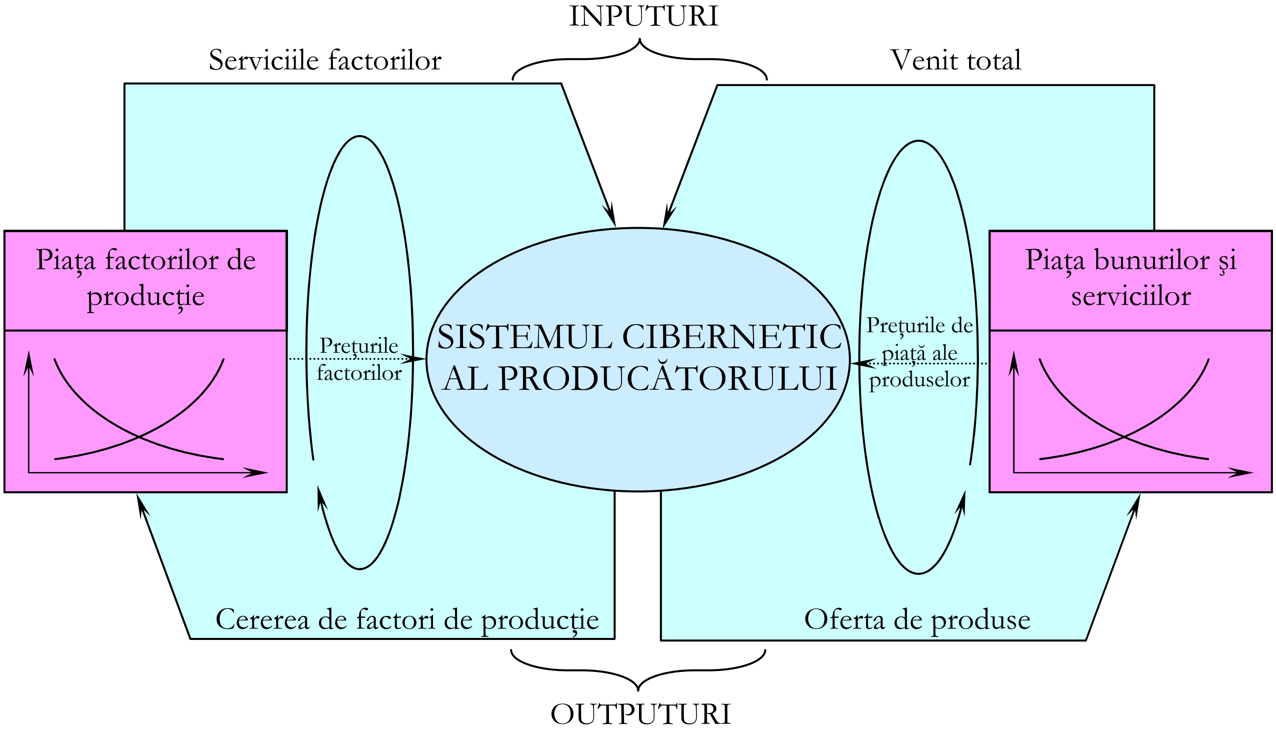


Figura 2

O direcţie posibilă de studiu este listarea unui număr suficient de mare de compartimente posibile într-o firmă, care să acopere marea parte a situaţiilor concrete şi apoi analiza pe rând a variantelor care ar putea să apară, în funcţie de existenţa sau lipsa anumitor compartimente.

O posibilă structură pe compartimente a unei firme poate fi cea de mai jos [E. Ţigănescu, Gh. Oprescu, Em. Scarlat 1985]:

- subsistemul ***planificării***;
- subsistemul ***cercetării*** ştiinţifice, dezvoltării tehnologice, introducerii progresului tehnic;
- subsistemul ***organizării*** conducerii, producţiei şi a muncii;
- subsistemul ***producţiei***;
- subsistemul ***forţei de muncă***;
- subsistemul ***mijloacelor tehnice***;
- subsistemul ***comercial***;
- subsistemul ***financiar-contabil***;
- subsistemul ***eficienţă economică***;

Dacă definim subsistemele firmei după funcţiile şi scopurile pe care le îndeplinesc acestea, atunci este necesar să facem o analiză a activităţilor desfăşurate în general în cadrul unei firme şi apoi să identificăm compartimentul (compartimentele) şi subsistemul (subsistemele) responsabile de îndeplinirea fiecăreia.

Astfel, indiferent de dimensiunea şi domeniul de activitate al unei firme, este evident că toată sau aproape toată activitatea acesteia este orientată către piaţă, existenţa şi succesul unei firme fiind sinonime cu obţinerea profitului, încercându-se acoperirea unei părţi cât mai mari din cererea pieţei prin vânzarea propriilor bunuri şi servicii. În acest scop o firmă trebuie să:

- culeagă informaţii privind cererea pieţei, prin efectuarea unor studii de piaţa sau pe baza comenzilor primite;
- să facă o analiză a cererii care să identifice factorii economici, sociali, psihologici politici etc., ce influenţează cantitatea cerută de piaţă şi care să explice modul în care

se manifestă această influență;

- să determine, pe baza informațiilor culese și a analizei efectuate, nivelul probabil al cererii viitoare și să transmită, sub forma unui program de producție, comenzi celor care produc efectiv bunurile și serviciile ce constituie domeniul de activitate al firmei;
- să livreze produsele realizate către piața bunurilor și serviciilor;
- să încerce sporirea vânzărilor prin activități de reclamă

Toate aceste activități necesită, evident, existența unei interfețe între firmă și piață, și un compartiment special sau un grup de persoane care să fie responsabil de desfășurarea eficientă a cestora.

Apare deci naturală considerarea, în analiza cibernetică a firmei, a unui ***subsistem al raporturilor cu piața*** care să concentreze toate resursele materiale și financiare ale firmei pentru a satisface o parte cât mai mare a cererii pe piață pentru bunurile și serviciile oferite de firmă.

De asemenea, este evident că orice firmă, pentru a putea oferi bunuri sau servicii trebuie să dispună de un compartiment special sau un grup de oameni care să producă bunurile respective, sau să presteze serviciile ce formează domeniul de activitate al firmei. Acest grup de oameni va decide, pe baza informațiilor primite de la piață, pe baza tehnologiei existente în firmă și a inputurilor pe care le poate obține firma, care este cantitatea și proporția optimă în care trebuie combinate inputurile pentru a realiza cantitatea și proporția optimă a bunurilor și serviciilor definite de programul de producție, furnizat de subsistemul raporturilor cu piața, care vor fi oferite de firmă spre vânzare.

Este deci necesară considerarea unui subsistem care ia deciziile legate de partea fizică (cantitativă) a producției, numit ***subsistemul de producție*** sau ***subsistemul tehnologic*** al firmei.

În general, orice firmă are la îndemână mai multe posibilități de producție, fiind necesară o analiză regulată a eficienței tehnologiei folosite curent și a variantelor de a o îmbunătăți sau a trece la altă tehnologie, pentru a asigura folosirea unei tehnologii eficiente și, pe cât posibil, la nivelul celor mai eficiente tehnologii observate la firmele cu domeniu de activitate similar sau asemănător.

Este nevoie astfel de o activitate permanentă de informare cu privire la:

- concurenți;
- producția proprie;
- nivelul prețurilor pe piața produselor firmei;
- profitabilitatea cantităților de produse realizate pe baza tehnologiei curente;
- costul factorilor de producție;
- posibilitățile de investiție, etc.

care implică existența unui subsistem dedicat acestor activități, a unor instrumente corespunzătoare de analiză și a unui grup de oameni care se ocupă de culegerea, centralizarea, analiza, interpretarea și transmiterea informațiilor, numit ***subsistemul prețuri-cost-profitabilitate***.

Pentru a-și putea desfășura activitatea, orice firma are nevoie de inputuri, pe care le procură pe piețele specifice. În acest sens se desfășoară permanent activități de:

- studiere a pieței factorilor de producție, pentru cunoașterea disponibilului de factori și a prețului acestora;
- obținere a factorilor de producție și de sincronizare a acestora în timp și spațiu cu activitatea de producție;
- obținere a fondurilor necesare pentru procurarea cantităților de factori de producție necesare desfășurării producției;
- furnizare de informații privind profitabilitatea factorilor de producție utilizați către subsistemul prețuri-cost-profitabilitate, etc.

Aceste activități, împreună cu oamenii în sarcina cărora se află efectuarea lor și instrumentarul aferent, pot fi grupate în ***subsistemul asigurării cu factori de producție***.

În fine, nu ne putem imagina activitatea unei firme fără existenţa unui subsistem prin care:

- să se asigure resursele financiare necesare firmei în diferitele etape ale activităţii sale;
- să se gestioneze resursele financiare ale firmei pe parcursul activităţii sale;
- să asigure legătura firmei cu piaţa financiară;
- să onoreze obligaţiile firmei către acţionari şi stat;

Ţinând cont de natura acestor activităţi, pentru desfăşurarea acestora este utilizat, în general, un personal specializat (contabili, jurişti, economişti etc.) care formează în marea majoritate a firmelor un compartiment distinct şi constituie ***subsistemul financiar*** al firmei, privită ca sistem cibernetic.

În concluzie, se poate considera că, indiferent de dimensiunea firmei şi domeniul său de activitate, orice firmă are cel puţin următoarele subsisteme*:

I) subsistemul raporturilor cu piaţa bunurilor şi serviciilor (RBS);

II) subsistemul de producţie (tehnologic) (P);

III) subsistemul preţuri – cost – profitabilitate (PCP);

IV) subsistemul asigurării cu factori de producţie (inputuri) (AFP);

V) subsistemul financiar (F).

Voi face în continuare o scurtă prezentare a funcţiilor îndeplinite de fiecare subsistem, a scopurilor şi obiectivelor acestora, a instrumentelor şi metodelor utilizate şi a interdependenţelor cu celelalte subsisteme ale firmei sau componente ale mediului exterior

3. Subsistemul raporturilor cu piaţa

Aşa cum a fost arătat mai înainte, acest subsistem este cel care face legătura dintre firmă şi piaţa bunurilor şi serviciilor oferite de firmă. Modul în care se realizează această legătură poate fi vizualizat în figura 3.

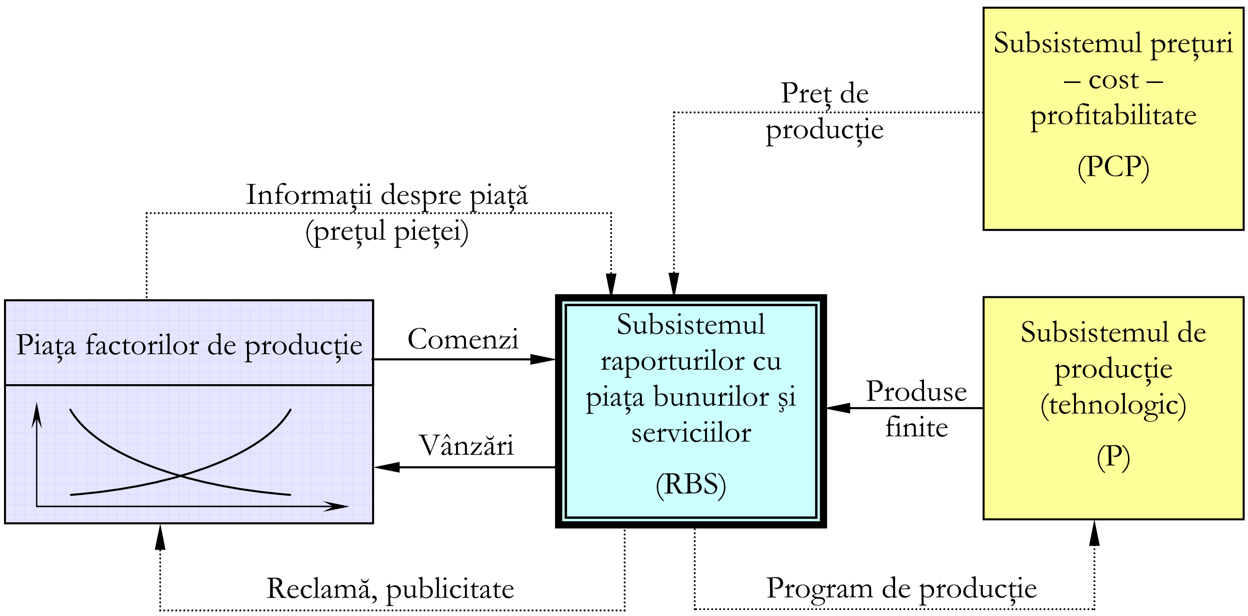


Figura 3

Subsistemul raporturilor cu piaţa este cel prin care firma va cunoaşte nivelul cererii pentru bunul sau/şi serviciul oferit de firmă. Evident că este imposibilă cunoaşterea în fiecare moment a

* Scarlat Emil, Nora Chiriţă *„Sisteme cibernetice ale economiei de piaţă”*, Editura Economică, Bucureşti, 1998

cantităţii exacte cerute pe piaţă din bunul/serviciul analizat, făcându-se doar o estimare (pe baza volumului vânzărilor anterioare, a volumului comenzilor concrete de la clienţi, a situaţiei economice, sociale şi politice, a preferinţelor manifestate de cumpărători, a impactului probabil al campaniilor de promovare a produselor etc.) a volumului probabil al cererii pentru preţul observat pe piaţă al bunului/serviciului respectiv.

Acest volum este cel pe care subsistemul raporturilor cu piaţa îl va transmite spre producţie subsistemului tehnologic tradus într-un program de producţie şi va primi de la acesta produsele finite pentru a le scoate spre vânzare pe piaţa bunurilor şi serviciilor. În funcţie de decalajul existent între preţul de producţie comunicat de subsistemul preţuri – cost – profitabilitate şi preţul de vânzare pe piaţă va rezulta volumul efectiv pe care îl va vinde firma pentru a-şi maximiza realizarea obiectivelor pe termen scurt sau lung.

Estimarea cererii pe baza variabilelor care influenţează semnificativ cererea pe piaţă se face printr-o ***funcţie de cerere*** a cărei formă este determinată pe baza observaţiilor anterioare şi a experienţei celor care fac analiza.

Dacă notăm cu D nivelul cererii pe piaţă şi cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valorile variabilelor care se consideră a influenţa, de o manieră exprimabilă matematic şi peste un prag de semnificaţie dorit, volumul cererii, atunci putem scrie:

$$D = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

Cele mai utilizate forme pentru funcţia de cerere sunt cele de tip liniar:

$$D = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n \qquad (2)$$

de tip multiplicativ:

$$D = c\, x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{b_n} \quad (3)$$

sau logaritmic:

$$D = a_0 + a_1 \cdot \ln(x_1) + a_2 \cdot \ln(x_2) + \ldots + a_n \cdot \ln(x_n) \quad (4)$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n, c, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt parametrii cunoscuţi din studiile anterioare sau estimaţi prin metode econometrice.

Factorii care prezintă un interes deosebit pentru firmă sunt cei controlabili sau influenţabili în sensul creşterii sau modificării convenabile a structurii cererii, cum ar fi: preţul de vânzare, reclama, politica de produs, forţa de vânzare, distribuţia, publicitatea, politici de investiţii şi angajare etc.

Deşi luarea în considerare a cât mai multor factori pare să ducă la o funcţie a cererii cât mai apropiată de realitatea observată, totuşi, de cele mai multe ori, în modelele de firmă se utilizează forma simplificată:

$$D(t) = f(p(t)) \quad (5)$$

în care singura variabilă luată în considerare este preţul produsului pe piaţă şi care arată care ar fi cantitatea absorbită de piaţă pentru un nivel dat al preţului. Aceasta deoarece, pe de o parte, în marea majoritate a cazurilor preţul este factorul cel mai influent, influenţa acestuia fiind cea mai bine studiată şi cunoscută iar, pe de altă parte, introducerea multor factori în model complicând în mod nejustificat analiza acestuia.

De asemenea, este utilizată în mod frecvent şi ***funcţia inversă a cererii***:

$$p(t) = f^{-1}(D(t)) \quad (6)$$

care arată cantitatea absorbită de piaţă pentru un nivel dat al preţului p(t).

Dacă dependenţa este liniară atunci ***relaţia cantitate-preţ*** va fi:

$$D(t) = a_0 + a_1 \cdot p(t) \qquad (7)$$

iar funcţia inversă a cererii va fi de asemenea liniară:

$$p(t) = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{1}{a_1}\cdot D(t) \qquad (8)$$

Mărimea a_0 reprezintă nivelul cererii dacă preţul ar fi zero iar a_1 modificarea cererii la o variaţie a preţului cu o unitate valorică.

Mărimea $-\frac{a_0}{a_1}$ va reprezenta acel preţ de la care cererea devine nulă.

Ţinând cont de ***legea cererii*** care spune că, în mod normal, volumul cererii şi nivelul preţului sunt invers proporţionale, rezultă că o cerere normală corespunde unei valori negative a coeficientului a_1, aşa cum se vede în figura 4:

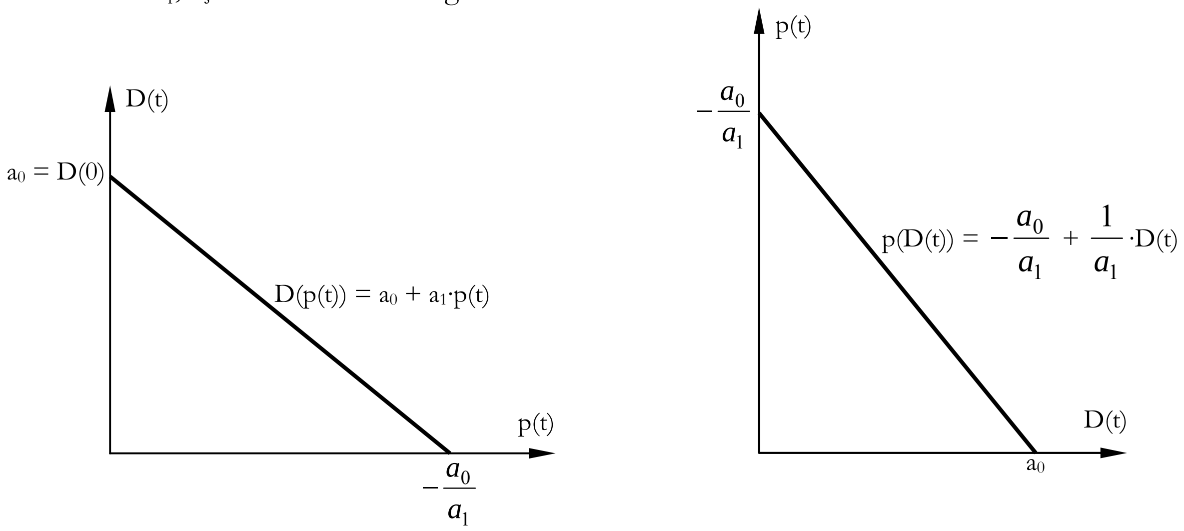


Figura 4

Dacă dependenţa este de tip multiplicativ atunci ***relaţia cantitate-preţ*** va fi:

$$D(t) = c\, p(t)^b \quad (9)$$

iar funcţia inversă a cererii va fi de asemenea o funcţie putere:

$$p(t) = c^{-\frac{1}{b}} \cdot (D(t))^{\frac{1}{b}} \qquad (10)$$

Conform ***legii cererii***, o cerere normală corespunde unei valori negative a exponentului b, iar valoarea pozitivă c va reprezenta nivelul cererii dacă preţul este unu, aşa cum se vede în figura 5:

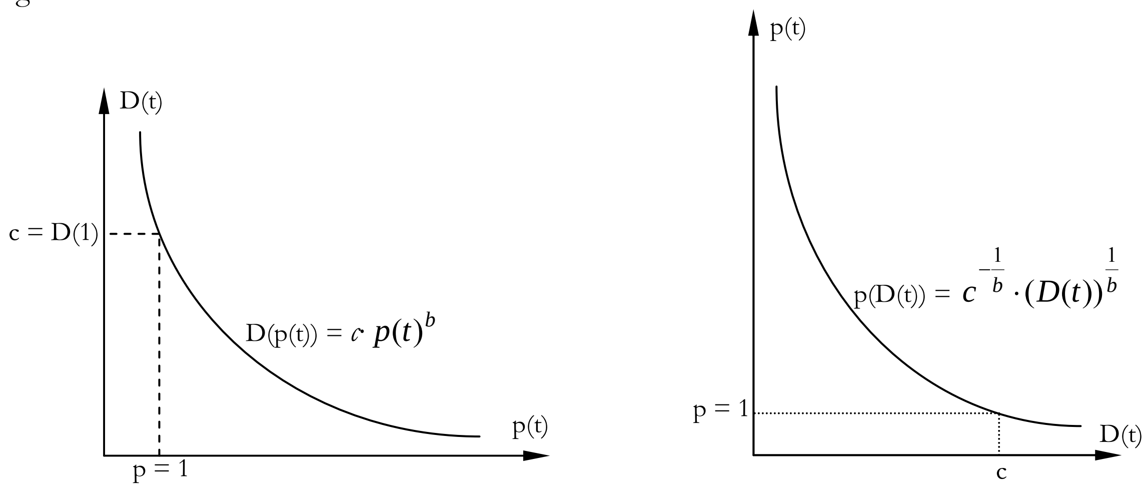


Figura 5

Dacă dependenţa este de tip logaritmic atunci ***relaţia cantitate-preţ*** va fi:

$$D(t) = a_0 + a_1 \cdot \ln(p(t)) \quad (11)$$

iar funcţia inversă a cererii va fi o funcţie exponenţială:

$$p(t) = e^{\frac{D(t)-a_0}{a_1}} \quad (12)$$

Conform ***legii cererii***, o cerere normală corespunde unei valori negative a coeficientului a_1, valoarea pozitivă a_0 va reprezenta nivelul cererii dacă preţul este unu, iar $e^{-\frac{a_0}{a_1}}$ este acel preţ de la care cererea devine nulă, aşa cum se vede în figura 6:

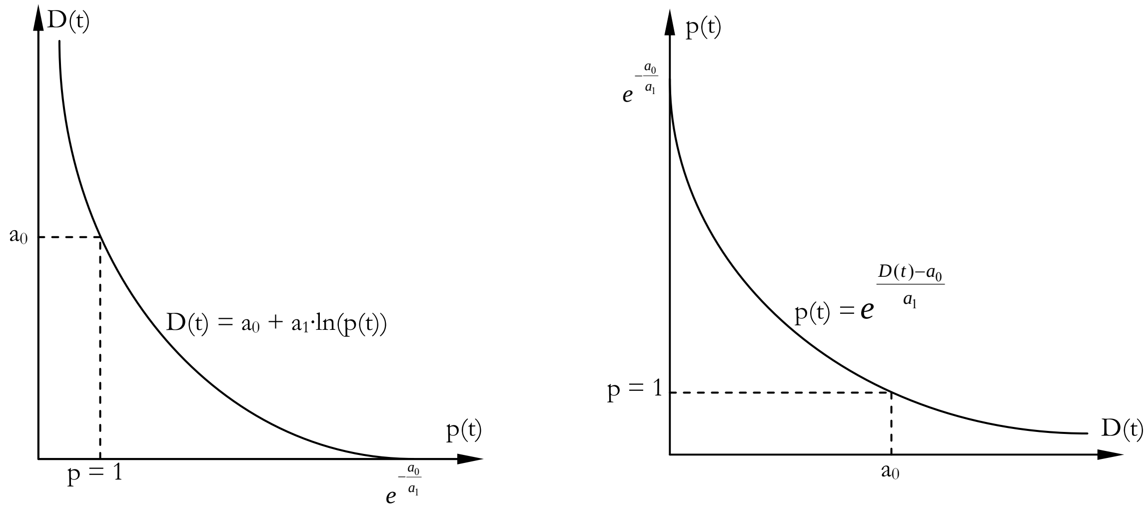


Figura 6

În situaţiile în care obţinerea acestei curbe este dificilă se preferă utilizarea ***funcţiei vânzărilor***:

$$S(t) = f(Q(t)) \quad (13)$$

care este, în general, o funcţie crescătoare, concavă şi pozitiv definită în $Q(t)$ = viteza de producţie.

Un model simplu în care este cuprinsă influenţa sumei cheltuite cu reclama şi publicitatea asupra volumului vânzărilor poate avea forma:

$$S(t) = a_1 \cdot A(t) \cdot \left(1 - \frac{S(t)}{D}\right) - a_2 \cdot S(t) \qquad (14)$$

unde $A(t)$ reprezintă suma cheltuită cu reclama şi publicitatea, folosită ca variabilă de comandă, D cererea totală presupusă iar S(t) volumul vânzărilor.

Modelul lui Nerlove şi Arrow încearcă să surprindă influenţa goodwill-ului firmei asupra volumului vânzărilor, modelul propus de cei doi având forma:

$$\begin{cases} \dot{B}(t) = A(t) - aB(t) \\ \dot{S}(t) = S(P(t), B(t)) \\ \dot{P}(t) = P(Q(t), B(t)) \end{cases} \qquad (15)$$

unde A(t) = suma cheltuită cu reclama şi publicitatea şi P(t) = preţul de vânzare sunt variabilele de comandă care influenţează B(t) = valoarea goodwill-ului şi în final S(t) = volumul vânzărilor.

4. Subsistemul de producţie

Aşa cum a fost arătat mai sus, acest subsistem are sarcina dificilă de a găsi, dintre toate posibilităţile de producţie, acea combinaţie inputuri-outputuri care asigură eficienţa maximă. El va primi planul de producţie Q(t) de la subsistemul raporturilor cu piaţa, va găsi, dintre combinaţiile de inputuri pe care le poate asigura subsistemul asigurării cu factori de producţie, combinaţia optimă şi va formula cererea de inputuri (către S_{AFP}) şi de investiţii către subsistemul preţuri-costuri profitabilitate, va fabrica, pe baza inputurilor şi resurselor băneşti primite, produsele finite şi le va transmite către S_{RBS}.

Aceste fluxuri au fost reprezentate în figura 7:

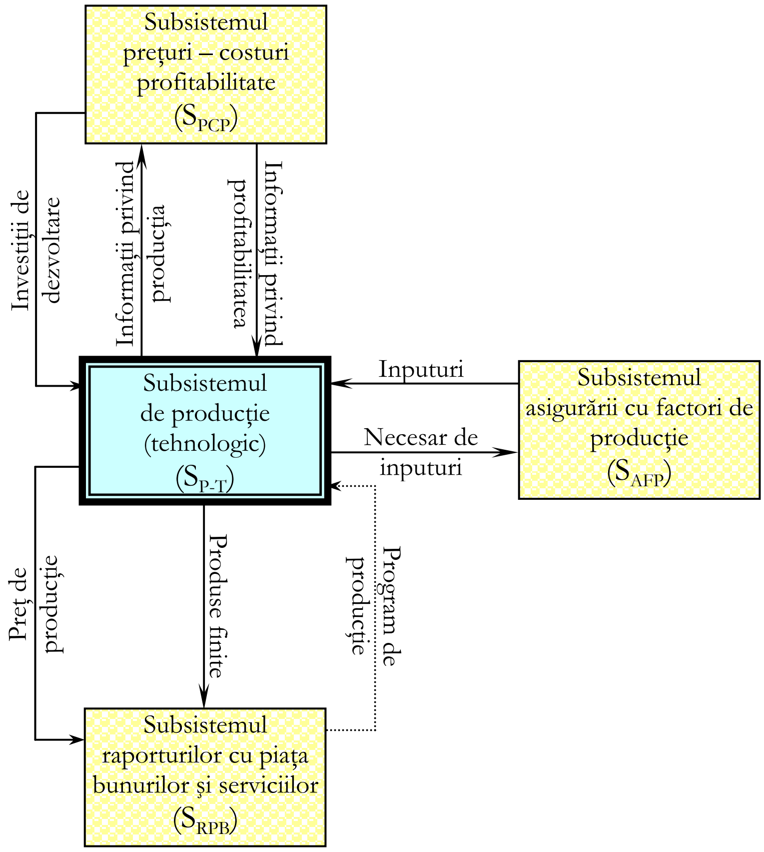


Figura 7

Pentru a-şi îndeplini sarcinile, subsistemul de producţie trebuie să cunoască în mod necesar mulţimea posibilităţilor de producţie şi să le extragă, dintre acestea, pe cele eficiente.

Dacă firmele folosesc inputurile $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R_+^m$ pentru a produce outputurile $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R_+^n$ atunci mulţimea posibilităţilor de producţie sau tehnologia GR este dată de:

$$GR = \{(x,y) \ / \ \text{cu x se poate produce y}\} \qquad (16)$$

Rezultatele posibile prin utilizarea inputului x se notează cu:

$$P(x) = \{y \ / \ (x,y) \in GR\} \qquad (17)$$

iar:

$$L(y) = \{x \ / \ (x,y) \in GR\} \qquad (18)$$

este mulţimea combinaţiilor de inputuri cu care se poate obţine outputul y.

Evident:

$$P(x) = \{y \ / \ x \in L(y)\} \quad (19)$$

$$L(y) = \{x \ / \ y \in P(x)\} \quad (20)$$

$$x \in L(y) \Leftrightarrow y \in P(x) \Leftrightarrow (x,y) \in GR \quad (21)$$

Cele mai importante proprietăți ale unei tehnologii GR sunt:

a) disponibilitatea

Definiția 1. O tehnologie GR prezintă disponibilitate tare (sau liberă) dacă:

$$\left.\begin{array}{c}(-x,y) \le (-x',y') \\ (x',y') \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) \in GR \quad (\forall)\ (x',y') \in GR \quad (22)$$

Definiția 2. O tehnologie GR este slab disponibilă dacă:

$$\left.\begin{array}{c}0 \le \theta \le 1 \\ (x,y) \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (\frac{x}{\theta}, \theta \cdot y) \in GR \quad (\forall)\ (x,y) \in GR \qquad (23)$$

Definiția 3. O tehnologie GR este g-disponibilă, unde $g = (g_x, g_y) \in R^m \times R^n$, dacă:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha, \beta \ge 0 \\ (x,y) \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (x + \alpha \cdot g_x, y + \beta \cdot g_y) \in GR \quad (\forall)\ (x,y) \in GR \quad (24)$$

Definiția 4. O tehnologie T este tare disponibilă în input dacă:

$$\left.\begin{array}{c}x' \ge x \\ (x,y) \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (x',y) \in GR \quad (\forall)\ (x,y) \in GR \ (25)$$

Echivalent:

$$P(x') \supseteq P(x) \text{ dacă } x' \ge x \qquad (26)$$

Definiția 5. O tehnologie GR este slab disponibilă în input dacă:

$$\left.\begin{array}{c}0 \le \theta \le 1 \\ (x,y) \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (\frac{x}{\theta}, y) \in GR \quad (\forall)\ (x,y) \in GR \ (27)$$

Echivalent:

$$P(x/\theta) \supseteq P(x) \text{ dacă } 0 \le \theta \le 1 \quad (28)$$

Definiția 6. O tehnologie GR este tare disponibilă în output dacă:

$$\left.\begin{array}{c}y' \le y \\ (x,y) \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y') \in GR \quad (\forall)\ (x,y) \in GR \ (29)$$

Echivalent:

$$L(y') \supseteq L(y) \text{ dacă } y' \le y \qquad (30)$$

Definiția 7. O tehnologie GR este slab disponibilă în output dacă:

$$\left.\begin{array}{c}0 \le \theta \le 1 \\ (x,y) \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow (x, \theta y) \in GR \quad (\forall)\ (x,y) \in GR \qquad (31)$$

Echivalent:

$$L(\theta y) \subseteq L(y) \text{ dacă } 0 \leq \theta \leq 1 \quad (32)$$

b) revenirea la scală

Definiția 8. Tehnologia GR prezintă revenire constantă la scară (Constant Returns to Scale sau CRS) dacă $\theta \cdot GR = GR$ $(\forall)$ $\theta > 0$.
Echivalent:

$$\text{GR prezintă CRS} \Leftrightarrow (x,y) \in GR \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in GR \ (\forall)\ \theta > 0 \quad (33)$$

Definiția 9. Tehnologia GR prezintă revenire necrescătoare la scală (Non-Increasing Returns to Scale sau NIRS) dacă $\theta \cdot GR \subseteq GR$ $(\forall)$ $0 < \theta \leq 1$.
Echivalent:

$$\text{GR prezintă NIRS} \Leftrightarrow (x,y) \in GR \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in GR \ (\forall)\ 0 < \theta \leq 1 \quad (34)$$

Definiția 10. Tehnologia GR prezintă revenire nedescrescătoare la scală (Non-Decreasing Returns to Scale sau NDRS) dacă $\theta \cdot GR \subseteq GR$ $(\forall)$ $\theta \geq 1$.
Echivalent:

$$\text{GR prezintă NDRS} \Leftrightarrow (x,y) \in GR \Rightarrow (\theta x, \theta y) \in GR \ (\forall)\ \theta \geq 1 \quad (35)$$

Definiția 11. Tehnologia GR prezintă revenire crescătoare la scară (Increasing Returns to Scale sau IRS) dacă prezintă NDRS şi nu prezintă CRS. Ea prezintă revenire descrescătoare la scală (Decreasing Returns to Scale sau DRS) dacă prezintă NIRS şi nu prezintă CRS.

c) convexitatea

Definiția 12. O tehnologie GR este convexă dacă:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in GR \\ (x',y') \in GR\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(x,y) + (1-\alpha)(x',y') \in GR \quad (\forall)\ \alpha \in [0,1] \quad (36)$$

De asemenea, pentru cele mai multe modele matematice, sunt necesare şi următoarele proprietăți:

- Mulțimile P(x) şi L(y) sunt continui sau semi-continui;
- Mulțimile GR, P(x) şi L(y) sunt închise;
- $(x,0) \in GR$ $(\forall)$ $x \in R_+^m$ şi $(0,y) \notin GR$ $(\forall)$ $y > 0$;
- $\bigcap_{y \in R_+^n} L(y) = \varnothing$.

În general, datele de care dispune o firmă în ceea ce priveşte tehnologia aplicată în obținerea bunului sau serviciului studiat, reprezintă o colecție de observații asupra rezultatelor obținute de unele din celelalte firme care acționează pe piața respectivă şi de rezultate tehnice exprimate prin funcții de producție.

Dacă în domeniul respectiv firmele folosesc M inputuri pentru a obține N outputuri, atunci o observație este un vector de tipul (***x,y***) unde ***x*** este un vector din IR_+^M ce conține cantitățile utilizate din fiecare input iar ***y*** este un vector din IR_+^N ce conține cantitățile obținute din fiecare output de către firma observată. O observație va fi deci un vector din $IR_+^M \times IR_+^N$.

Pe baza acestor observații şi pe baza anumitor ipoteze acceptate privind posibilitățile de combinare a tehnologiilor observate, subsistemul de producție va găsi mulțimea tuturor posibilităților de producție şi le va extrage în final, dintre acestea, pe cele eficiente.

Presupunem că firma deține informații despre un număr de *K* firme, asupra cărora avem observații privind inputurile, în număr de *M* şi outputurile, în număr de *N*.

Fie, prin urmare, mulţimea posibilităţilor de producţie, pentru cele *K* firme:

$\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k) \in \mathrm{IR}_+^{M+N} \mid K = 1,\ldots, K\}$ = programele de producţie corespunzătoare celor *K* firme observate;

Matematic vorbind, valorile observate pot fi reprezentate ca o mulţime de *K* puncte în ortantul pozitiv al spaţiului euclidian $\mathrm{IR}_+^M \times \mathrm{IR}_+^N$, ca în figura 8.

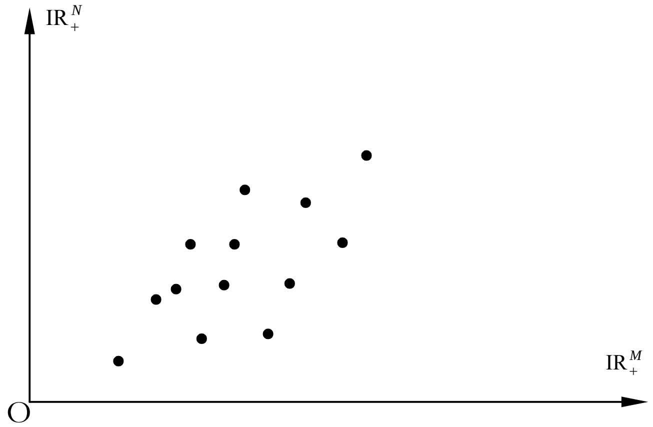


Figura 8
Mulţimea posibilităţilor de producţie

Pentru înţelegerea legăturii dintre modelul matematic şi aspectul economic al problemei este utilă reprezentarea geometrică a mulţimii tuturor posibilităţilor de producţie şi este interesant de văzut ce efect are acceptarea fiecărei ipoteze suplimentare asupra acestei mulţimi.

Astfel, ipoteza de dispunere liberă, care economic se traduce prin: "dacă cu inputul $\boldsymbol{x}$ se poate obţine outputul $\boldsymbol{y}$ atunci cu orice input mai mare ca $\boldsymbol{x}$ se poate obţine orice output mai mic decât $\boldsymbol{y}$", se traduce matematic prin faptul că dacă punctul $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in$ GR atunci GR conţine întregul paralelipiped infinit $[\boldsymbol{x},\infty) \times [0,\boldsymbol{y}]$, ca în figura 9.

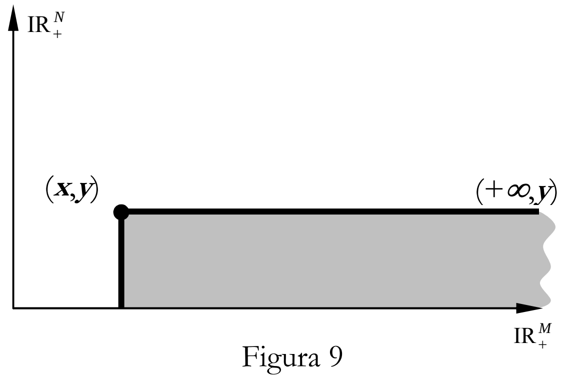


Figura 9
Efectul ipotezei de dispunere liberă

Astfel, pentru mulţimea de observaţii reprezentată în figura 8 mulţimea posibilităţilor de producţie minimă GR care conţine aceste observaţii şi are proprietatea de dispunere liberă este cea haşurată în figura 10. O astfel de tehnologie este cunoscută sub numele de "free disposable hull" sau prescurtat FDH.

Ipoteza de convexitate a mulţimii GR se traduce economic prin faptul că putem combina două programe de producţie în orice proporţii. Pentru mulţimea de observaţii reprezentată în figura 8 mulţimea posibilităţilor de producţie minimă GR care conţine aceste observaţii şi are proprietatea de convexitate este cea haşurată în figura 11.

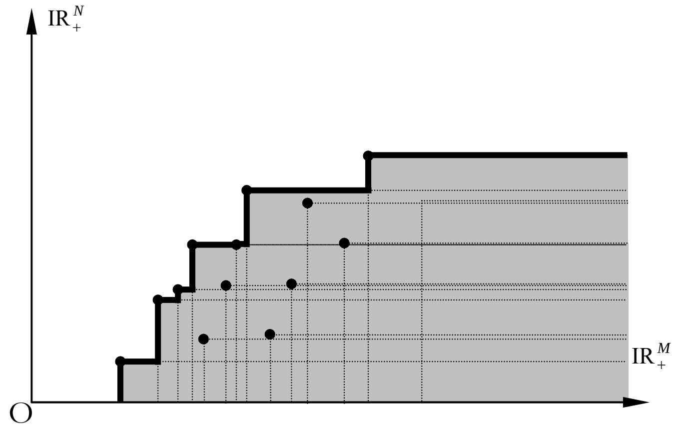


Figura I.10
Tehnologia FDH

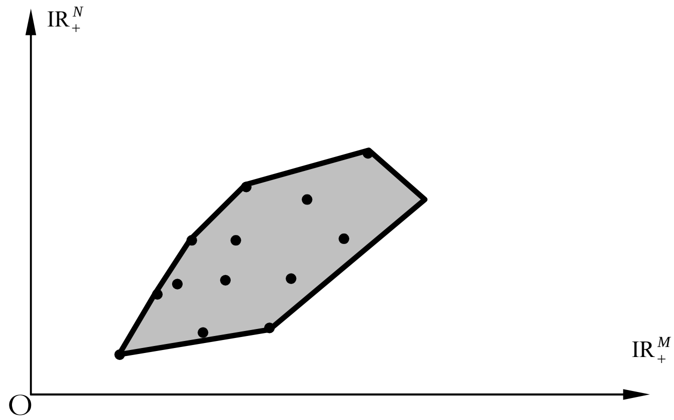


Figura 11
Tehnologia convexă

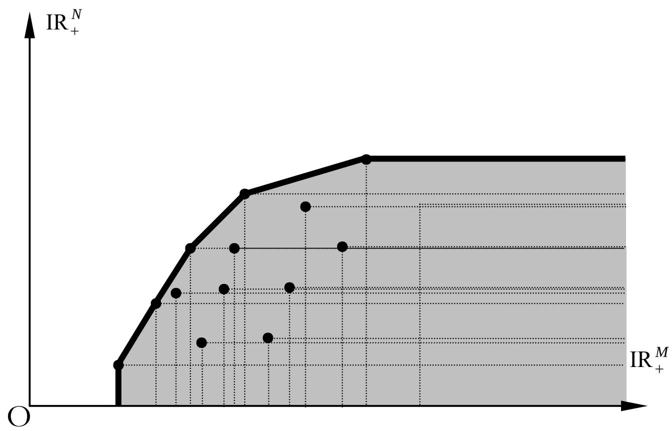


Figura 12
Tehnologia VRS

Mulţimea posibilităţilor de producţie minimă GR care conţine observaţiile din figura 8 şi are ambele proprietăţi (de dispunere liberă şi convexitate) este cea haşurată în figura 12.

Algebric, mulţimea observaţiilor $\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k) \in IR_+^{M+N} \mid k = 1,\ldots, K\}$ poate fi grupată în două matrice X şi Y unde X are *K* linii şi *M* coloane, liniile sale conţinând valorile inputurilor celor *K* observaţii iar Y are *K* linii şi *N* coloane, liniile sale conţinând valorile outputurilor celor *K* observaţii. Mulţimea posibilităţilor de producţie minimală GR ce conţine aceste observaţii şi are proprietăţile de dispunere liberă şi convexitate se poate scrie:

$$GR = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in IR_{+}^{M+N} \mid \text{există } \lambda \in IR_{+}^{K} \text{ a.î. } X^T\lambda \le \mathbf{x},\ Y^T\lambda \ge \mathbf{y},\ \sum_{k=1}^{K}\lambda_k = 1\}$$

Economic vorbind, outputul ***y*** se poate obţine pe baza inputului ***x*** dacă şi numai dacă există o combinaţie convexă a observaţiilor existente prin care se obţine cel puţin ***y*** cu cel mult ***x***.

În ceea ce priveşte revenirea la scală, mulţimea posibilităţilor de producţie GR prezintă:

revenire constantă la scară (Constant Returns to Scale sau CRS) dacă $\theta\cdot GR = GR$ oricare ar fi $\theta > 0$.

Echivalent: GR prezintă CRS dacă şi numai dacă $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in GR$ implică $(\theta\cdot\boldsymbol{x},\theta\cdot\boldsymbol{y}) \in GR$ oricare ar fi $\theta > 0$

revenire necrescătoare la scară (Non-Increasing Returns to Scale sau NIRS) dacă $\theta\cdot GR \subseteq GR$ oricare ar fi $0 < \theta \le 1$.

Echivalent: GR prezintă NIRS dacă şi numai dacă $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in GR$ implică $(\theta\cdot\boldsymbol{x},\theta\cdot\boldsymbol{y}) \in GR$ oricare ar fi $0 < \theta \le 1$.

revenire nedescrescătoare la scară (Non-Decreasing Returns to Scale sau NDRS) dacă $\theta\cdot GR \subseteq GR$ oricare ar fi $\theta \ge 1$.

Echivalent: GR prezintă NDRS dacă şi numai dacă $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in GR$ implică $(\theta\cdot\boldsymbol{x},\theta\cdot\boldsymbol{y}) \in GR$ oricare ar fi $\theta \ge 1$.

revenire crescătoare la scară (Increasing Returns to Scale sau IRS) dacă prezintă NDRS şi nu prezintă CRS.

revenire descrescătoare la scară (Decreasing Returns to Scale sau DRS) dacă prezintă NIRS şi nu prezintă CRS.

revenire variabilă la scară (Variable Returns to Scale sau VRS). Prin convenţie, spunem că o mulţime a posibilităţilor de producţie asupra căreia se fac doar ipotezele de dispunere liberă şi convexitate prezintă VRS.

Geometric, definiţiile de mai sus se traduc prin:

- dacă mulţimea posibilităţilor de producţie prezintă revenire constantă la scară atunci odată cu un punct $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ea conţine semidreaptă deschisă care pleacă din origine şi conţine punctul $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.
- dacă mulţimea posibilităţilor de producţie prezintă revenire nedescrescătoare la scară atunci odată cu un punct $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ea conţine semidreapta închisă care pleacă din $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ şi este opusă originii.
- dacă mulţimea posibilităţilor de producţie prezintă revenire necrescătoare la scară atunci odată cu un punct $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ea conţine segmentul $(O,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]$.

În figurile 13, 14, 15 şi 16 au fost reprezentate mulţimile posibilităţilor de producţie minimale care conţin observaţiile din figura 8 şi prezintă cele trei tipuri de revenire la scală.

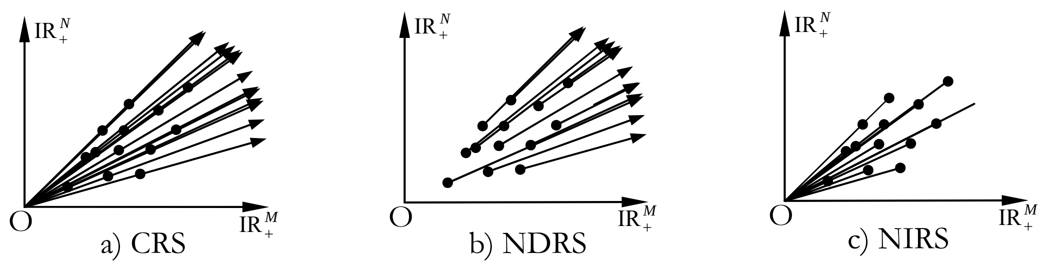
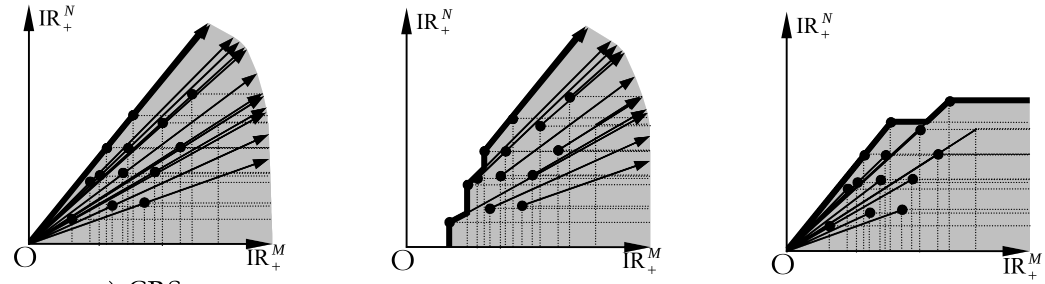


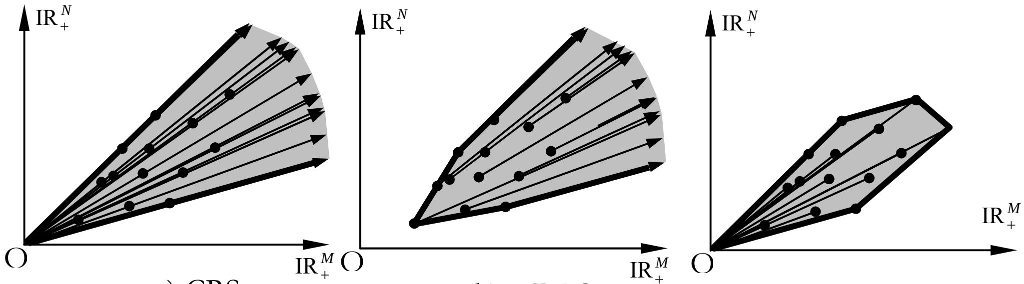
Figura 13
Doar ipoteza de revenire la scară

Putem de asemenea reprezenta uşor mulţimea output de nivel P($\boldsymbol{x}$) a outputurilor care pot fi obţinute prin utilizarea inputului $\boldsymbol{x}$ şi mulţimea input de nivel L($\boldsymbol{y}$) a inputurilor cu care se poate obţine outputul $\boldsymbol{y}$.



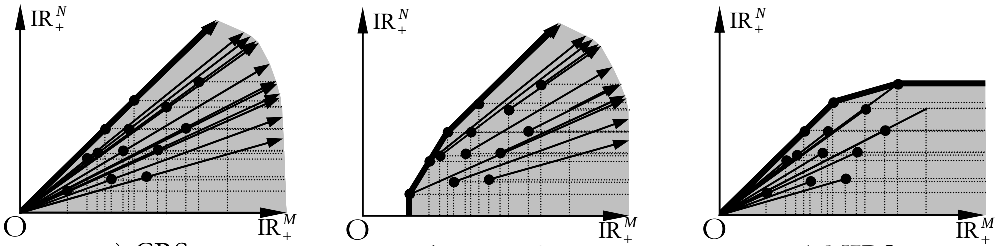
a) CRS b) NDRS c) NIRS

Figura 14
Revenire la scară şi disponibilitate liberă



a) CRS b) NDRS c) NIRS

Figura 15
Convexitate şi revenire la scară



a) CRS b) NDRS c) NIRS

Figura 16
Convexitate, dispunere liberă şi revenire la scară

Matematic, pentru un input dat $\boldsymbol{x}^o$, mulţimea P($\boldsymbol{x}^o$) este intersecţia dintre mulţimea GR şi hiperplanul M dimensional de ecuaţie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^o$ iar pentru un output dat $\boldsymbol{y}^o$, L($\boldsymbol{y}^o$) este intersecţia dintre mulţimea GR şi hiperplanul N dimensional de ecuaţie $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^o$.

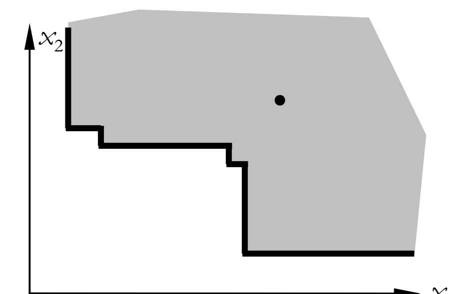


Figura 17.a
L(y) de tip FDH

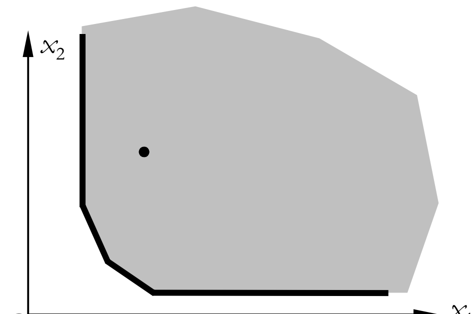


Figura 17.b
L(y) de tip convex

Pentru cazul în care în procesul de producţie sunt folosite două inputuri mulţimea L(***y***) va fi o porţiune din primul cadran al planului bidimensional, în figura 17 fiind reprezentată această mulţime în cazul unei tehnologii de tip FDH (figura 17.a) şi în cazul unei tehnologii convexe (figura 17.b).

Pentru cazul în care în procesul de producţie se obţin două outputuri mulţimea P(***x***) va fi o porţiune din primul cadran al planului bidimensional, în figura 18 fiind reprezentată această mulţime în cazul unei tehnologii de tip FDH (figura 18.a) şi în cazul unei tehnologii convexe (figura 18.b).

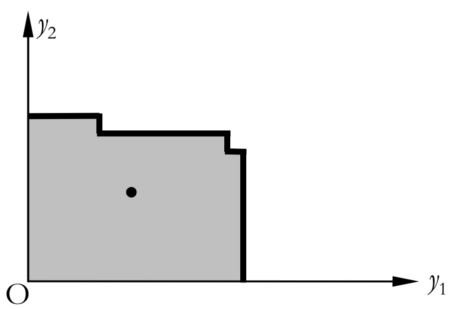


Figura 18.a
P(x) de tip FDH

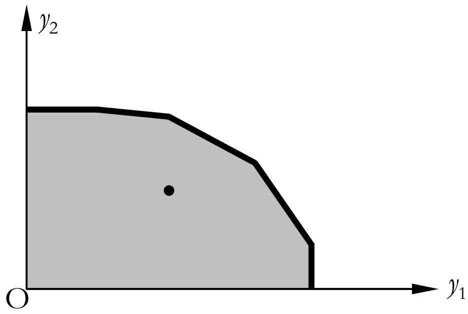


Figura 18.b
P(x) de tip convex

Revenind la aspectul economic al studiului unei tehnologii date, o importanţă deosebită o reprezintă evident submulţimea producţiilor eficiente.

Geometric, un producător va aparţine mulţimii eficiente *Eff* GR, definită prin:

$$Eff\ GR = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in GR \text{ şi } (\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') \notin GR \text{ pentru } (-x',y') \geq (-x,y),\ (x',y') \neq (x,y)\}$$

dacă nu există nici un punct al mulţimii posibilităţilor de producţie aflat în paralelipipedul (o,***x***] × [***y***,+∞) diferit de (***x***,***y***). Acest paralelipiped formează mulţimea producţiilor mai eficiente decât producţia (***x***,***y***). Astfel, în figura 19.a avem o mulţimea posibilităţilor de producţie convexă şi cu dispunere liberă care a fost reprezentată pe fond gri şi producătorul (***x***,***y***) pentru care mulţimea producţiilor mai eficiente este paralelipipedul haşurat. Din acest desen "se vede" că producătorul (***x***,***y***) nu este eficient şi că mulţimea *Eff* GR este egală cu mulţimea punctelor de pe linia frântă îngroşată dintre punctele A şi B.

În figura 19.b este reprezentată o mulţimea posibilităţilor de producţie de tip FDH. În acest caz mulţimea *Eff* GR este reprezentată doar de producţiile reprezentate prin punctele îngroşate.

Geometric, un producător ($\boldsymbol{x}^o$,$\boldsymbol{y}^o$) va aparţine izocuantei *Isoq* GR, definită prin:

$$Isoq\ GR = \{(x,y) \mid (x,y) \in GR \text{ şi } (\theta x, y/\theta) \notin GR \text{ oricare ar fi } 0 < \theta < 1\}$$

dacă nu există nici un punct al mulţimii posibilităţilor de producţie aflat pe porţiunea din hiperbola de ecuaţie: $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{x}^o\boldsymbol{y}^o$, situată în paralelipipedul producţiilor mai eficiente decât producţia (***x***,***y***).

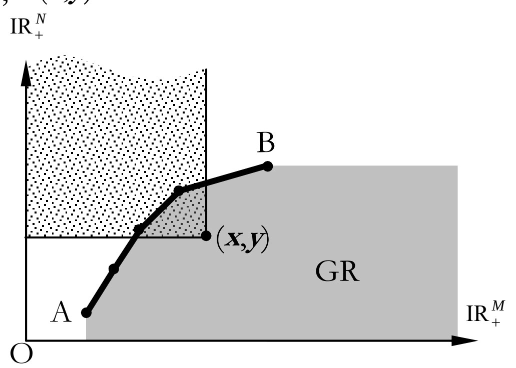


Figura 19.a

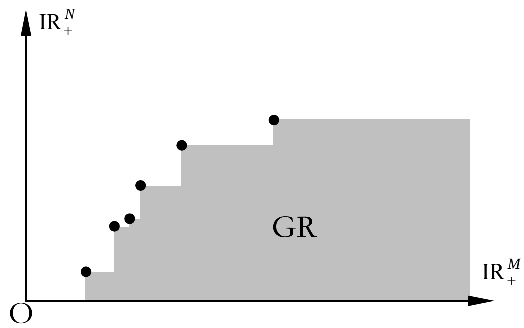


Figura 19.b

În figurile 20.a şi 20.b sunt reprezentate prin linie îngroşată izocuantele unei mulţimi a posibilităţilor de producţie convexă, respectiv de tip FDH; în figura 20.a este reprezentată prin

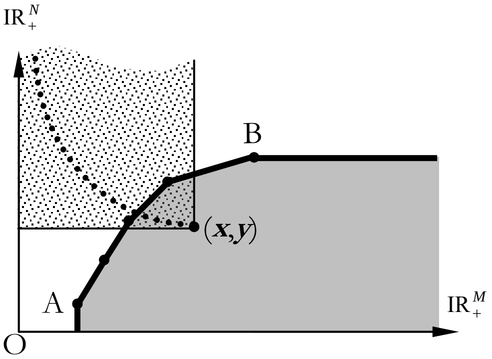


Figura 20.a

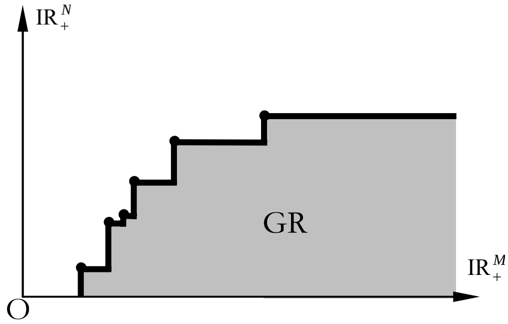


Figura 20.b

linie punctată şi hiperbola corespunzătoare producătorului ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$). Din cele două figuri "se vede" că *Eff* GR este inclusă în *Isoq* GR, diferenţa dintre ele fiind reprezentată de porţiunile din frontiera geometrică a mulţimii GR paralele cu axele sistemului de coordonate.

Mulţimile input şi output de nivel au fost reprezentate anterior. Un output $\boldsymbol{y}^o$ va aparţine mulţimii eficiente a mulţimii input de nivel:

$$Eff\,\mathrm{P}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathrm{P}(\boldsymbol{x}) \text{ şi } \boldsymbol{y}' \notin \mathrm{P}(\boldsymbol{x}) \text{ oricare ar fi } \boldsymbol{y}' \geq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \neq \boldsymbol{y}\}$$

dacă nu există nici un punct al mulţimii P(x) aflat în paralelipipedul N dimensional $\prod_{j=1}^{N}[y_j^o,\infty)$ diferit de $\boldsymbol{y}^o$. Acest paralelipiped formează mulţimea outputurilor mai mari decât $\boldsymbol{y}^o$ posibile cu inputul dat $\boldsymbol{x}$. Astfel, în figura 21.a avem o mulţime input de nivel corespunzătoare unei mulţimi a posibilităţilor de producţie convexă şi cu dispunere liberă care a fost reprezentată pe fond gri şi producătorul ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}^o$) pentru care mulţimea outputurilor mai mari decât $\boldsymbol{y}^o$ posibile cu inputul dat $\boldsymbol{x}$ este paralelipipedul haşurat. Din acest desen "se vede" că producătorul ($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}^o$) nu este eficient şi că mulţimea *Eff* P($\boldsymbol{x}$) este egală cu mulţimea punctelor de pe linia frântă îngroşată dintre punctele A şi B.

În figura 21.b este reprezentată o mulţime input de nivel corespunzătoare unei mulţimi a

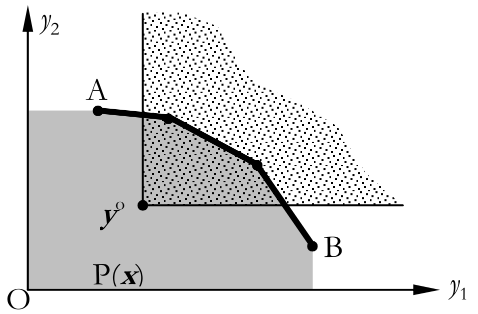


Figura 21.a

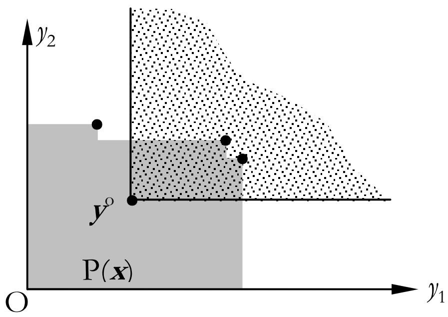


Figura 21.b

posibilităţilor de producţie de tip FDH. În acest caz mulţimea *Eff* P($\boldsymbol{x}$) este reprezentată doar de outputurile reprezentate prin punctele îngroşate.

Un output $\boldsymbol{y}^o$ va aparţine izocuantei mulţimii input de nivel:

$$Isoq\,\mathrm{P}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathrm{L}(\boldsymbol{x}) \text{ şi } \theta\boldsymbol{y} \notin \mathrm{L}(\boldsymbol{x}) \text{ oricare ar fi } \theta > 1\}$$

dacă nu există nici un punct al mulţimii P(x) aflat pe semidreapta deschisă cu originea în $\boldsymbol{y}^o$ opusă originii sistemului de coordonate.

În figurile 22.a şi 22.b sunt reprezentate prin linie îngroşată izocuantele unei mulţimi input de nivel corespunzătoare unei mulţimi a posibilităţilor de producţie convexă, respectiv de tip FDH; în figura 22.a este reprezentată prin săgeată îngroşată şi semidreapta corespunzătoare outputului $\boldsymbol{y}^o$. Din cele două figuri "se vede că *Eff* P($\boldsymbol{x}$) este inclusă în *Isoq* P($\boldsymbol{x}$), diferenţa dintre ele fiind reprezentată de porţiunile din frontiera geometrică a mulţimii P($\boldsymbol{x}$) paralele cu axele sistemului de coordonate.

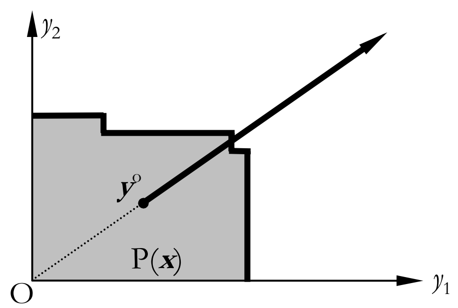


figura 22.a

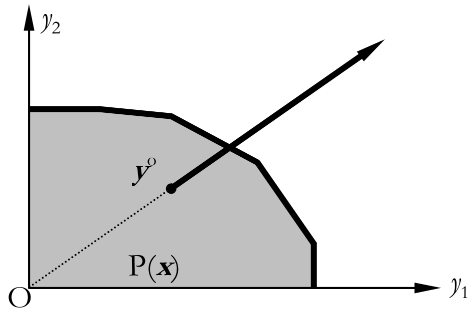


figura 22.b

Un input $\boldsymbol{x}^o$ va aparţine mulţimii eficiente a mulţimii output de nivel:

$$Eff\,\mathrm{L}(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{L}(\boldsymbol{y}) \text{ şi } \boldsymbol{x}' \notin \mathrm{L}(\boldsymbol{y}) \text{ oricare ar fi } \boldsymbol{x}' \leq \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}\}$$

dacă nu există nici un punct al mulţimii L($\boldsymbol{y}$) aflat în paralelipipedul M dimensional $\prod_{i=1}^{M}[0, x_i^o]$ diferit de $\boldsymbol{x}^o$. Acest paralelipiped formează mulţimea inputurilor mai mici decât $\boldsymbol{x}^o$ cu care se poate obţine outputul dat $\boldsymbol{y}$. Astfel, în figura 23.a avem o mulţime output de nivel corespunzătoare unei mulţimi a posibilităţilor de producţie convexă şi cu dispunere liberă care a fost reprezentată pe fond gri şi producătorul ($\boldsymbol{x}^o$,$\boldsymbol{y}$) pentru care mulţimea inputurilor mai mici decât $\boldsymbol{x}^o$ cu care se poate obţine outputul dat $\boldsymbol{y}$ este paralelipipedul haşurat. Din acest desen "se vede" că producătorul ($\boldsymbol{x}^o$,$\boldsymbol{y}$) nu este eficient şi că mulţimea *Eff* L($\boldsymbol{y}$) este egală cu mulţimea punctelor de pe linia frântă îngroşată dintre punctele A şi B.

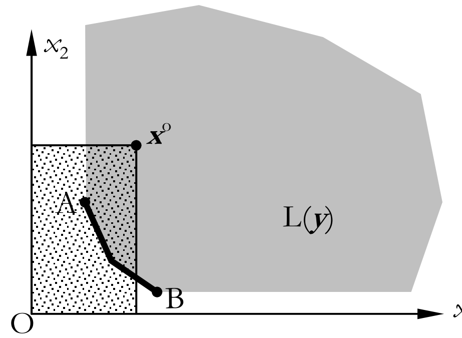


figura 23.a

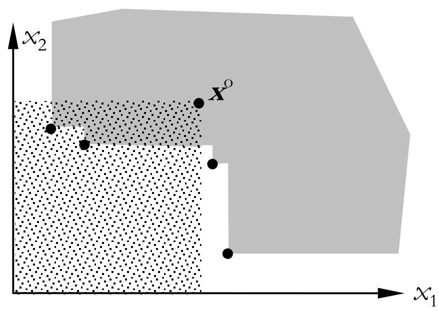


figura 23.b

În figura 23.b este reprezentată o mulţime output de nivel corespunzătoare unei mulţimi a posibilităţilor de producţie de tip FDH. În acest caz mulţimea *Eff* L($\boldsymbol{y}$) este reprezentată doar de inputurile reprezentate prin punctele îngroşate.

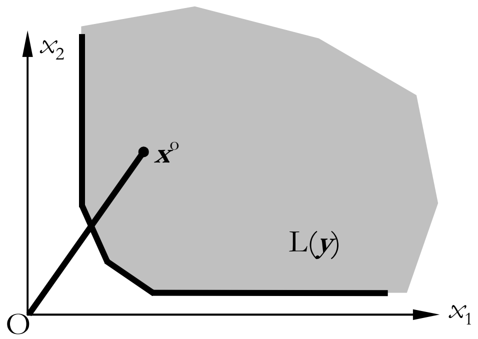


Figura 24.a

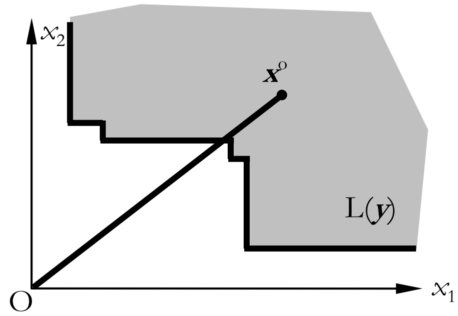


Figura 24.b

Un input $\boldsymbol{x}^o$ va aparține izocuantei mulțimii output de nivel:

$$Isoq\,\mathrm{L}(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{L}(\boldsymbol{y}) \text{ și } \theta\boldsymbol{x} \notin \mathrm{L}(\boldsymbol{y}) \text{ oricare ar fi } \theta \in [0,1)\}$$

dacă nu există nici un punct al mulțimii $\mathrm{L}(\boldsymbol{y})$ aflat pe segmentul $(\mathrm{O},\boldsymbol{x}^o)$.

În figurile 24.a și 24.b sunt reprezentate prin linie îngroșată izocuantele unei mulțimi output de nivel corespunzătoare unei mulțimi a posibilităților de producție convexă, respectiv de tip FDH; de asemenea este reprezentat prin linie îngroșată și segmentul corespunzător inputului $\boldsymbol{x}^o$. Din cele două figuri "se vede că $Eff\,\mathrm{L}(\boldsymbol{y})$ este inclusă în $Isoq\,\mathrm{L}(\boldsymbol{y})$, diferența dintre ele fiind reprezentată de porțiunile din frontiera geometrică a mulțimii $\mathrm{L}(\boldsymbol{y})$ paralele cu axele sistemului de coordonate.

Din considerațiile de mai sus se desprinde concluzia că tehnologiile eficiente sunt situate pe frontiera mulțimii posibilităților de producție. Din acest motiv este suficient să cunoaștem sau să estimăm doar frontiera acestei mulțimi, printr-o funcție de producție:

$$y = f(x) \qquad (37)$$

Această funcție poate fi definită pur și simplu ca asociind unei combinații de inputuri x cea mai profitabilă combinație de outputuri y. De exemplu, dacă p reprezintă vectorul profiturilor unitare aduse de vânzarea celor N outputuri, $p \in R^N$, atunci:

$$f(x) = y_x \text{ unde } p \cdot y_x = \max\{p \cdot y \;/\; y \in P(x)\} \qquad (38)$$

Dacă luăm în considerare un singur output atunci cea mai profitabilă situație poate fi considerată cea în care se obține outputul maxim:

$$f(x) = \max\{y \;/\; y \in P(x)\} \qquad (39)$$

Funcția de producție poate fi de asemenea estimată prin metode econometrice.

Simpla definire a funcției de producție, ca cea mai profitabilă combinație de outputuri (sau ca maxim de outputuri) ce se poate obține cu o combinație de inputuri dată nu este suficientă pentru o analiză în detaliu a activității firmei. Pentru a putea face o analiză matematică a producției este necesar ca, în general, funcția de producție să aibă o serie de proprietăți care să permită modelarea matematică, care să nu restrângă prea drastic mulțimea de situații practice la care poate fi aplicată și să nu denatureze rezultatele obținute. Principalele ipoteze asupra formei unei funcții de producție sunt:

Ip.1 Funcția de producție este unic definită, pozitivă și finită pentru orice combinație de inputuri x. Economic, aceasta se traduce prin faptul că, pentru o combinație de inputuri există o singură combinație de outputuri maximală, că nu există outputuri negative și că putem produce doar o cantitate finită de outputuri cu un input dat.

Ip.2 Esențialitate slabă. Aceasta se traduce prin faptul că nu putem obține output fără a consuma nici un input și că orice consum dintr-un input duce la obținerea de output. Matematic, această proprietate se exprimă prin:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad (40)$$

În unele cazuri putem chiar accepta ipoteza mai restrictivă:

$$\text{dacă există } x_i = 0 \text{ atunci } f(x) = 0 \qquad (41)$$

numită esențialitate strictă.

Ip.3 Funcția de producție este continuă.

Obs: În unele cazuri se acceptă chiar ca aceasta să fie de clasă C^2(diferențiabilă, cu derivatele parțiale continui).

Ip.4 Funcţia de producţie este ***monoton crescătoare***. Această proprietate spune că, în mod normal, orice creştere a cel puţin unui input ar trebui să atragă o creştere a producţiei de outputuri. Dacă funcţia admite derivate parţiale atunci condiţia este echivalentă cu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \text{ pentru orice input } x_i \ (42)$$

Valoarea $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, numită şi eficienţa marginală, arată cu cât creşte outputul la o creştere cu o unitate a inputului x_i.

Ip.5 Funcţia de producţie este concavă în fiecare din inputuri, în condiţiile în care celelalte rămân constante:

$$f(\alpha \cdot (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^1,\ x_{i+1}^0 \ldots\ x_N^0) + (1-\alpha)\cdot(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0, x_i^2,\ x_{i+1}^0 \ldots\ x_N^0)) \geq$$
$$\geq \alpha \cdot f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0, x_i^1,\ x_{i+1}^0 \ldots\ x_N^0) + (1-\alpha)\cdot f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0, x_i^2,\ x_{i+1}^0 \ldots\ x_N^0) \qquad (43)$$

oricare ar fi $\alpha \in [0,1]$ şi $x_i^1,\ x_i^2 \geq 0$.

Dacă funcţia este derivabilă de două ori în fiecare argument atunci condiţia (I.43) se poate scrie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} \leq 0 \text{ pentru orice input } x_I \ (44)$$

Proprietatea modelează realitatea economică potrivit căreia, în mod normal, o creştere a unui input atrage creşterea outputului dar fiecare unitate suplimentară de input va atrage o creştere mai mică decât unitatea precedentă. Proprietatea este cunoscută ca ***legea randamentelor marginale descrescătoare***.

Dacă funcţia este de clasă C^2 şi $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j = 1\ldots N}$ este matricea Hessian asociată atunci condiţia (I.43) este echivalentă cu faptul că H este negativ semidefinită.

În unele cazuri se acceptă chiar concavitatea funcţiei de producţie:

$$f(\alpha \cdot x^1 + (1-\alpha)\cdot x^2) \geq \alpha \cdot f(x^1) + (1-\alpha)\cdot f(x^2) \quad (45)$$

oricare ar fi $\alpha \in [0,1]$ şi $x^1, x^2 \in R_+^N$.

Dacă funcţia este de clasă C^2 atunci condiţia (I.45) este echivalentă cu faptul că matricea Hessian este negativ definită.

În studiul unei funcţii de producţie prezintă o importanţă deosebită influenţa modificării inputurilor asupra volumului outputului obţinut. Această analiză se poate face separat, pe fiecare input, sau global.

Pentru a surprinde influenţa variaţiei unui input asupra volumului producţiei obţinute se folosesc următorii indicatori:

I_1 Producţia medie pe fiecare factor:

$$\bar{f}_i(x) = \frac{f(x)}{x_i} \quad (46)$$

care arată, în medie, ce cantitate din fiecare output se obţine prin utilizarea unei unităţi din inputul x_i.

I_2 Productivitatea marginală în raport cu fiecare input:

$$f_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (47)$$

care arată cu cât se modifică fiecare output la o creştere cu o unitate a inputului x_i.

I_3 Elasticitatea outputului în raport cu fiecare input:

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{f(x)}{x_i}} = \frac{f_i}{\bar{f}_i} \qquad (48)$$

care arată cu câte procente se modifică fiecare output la o modificare cu un procent al fiecărui input.

Pentru a surprinde influenţa globală a mai multor inputuri asupra outputului se utilizează următorii indicatori:

a) revenirea la scală.

Revenirea la scală este un indicator calitativ. Presupunem că toate inputurile se modifică simultan în aceeaşi proporţie:

$$x \to \lambda \cdot x \qquad (49)$$

În tabelul de mai jos sunt sintetizate cele trei tipuri de revenire la scală utilizate în practica economică:

revenire constantă la scală	revenire crescătoare la scală	revenire descrescătoare la scală
$\lambda \cdot GR \subseteq GR\ (\forall)\ \lambda > 0$ $\lambda \cdot L(y) \subseteq L(y)\ (\forall)\ \lambda > 0$ $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)\ (\forall)\ \lambda > 0$	$\lambda \cdot GR \subseteq GR\ (\forall)\ \lambda > 1$ $\lambda \cdot L(y) \subseteq L(y)\ (\forall)\ \lambda > 1$ $f(\lambda \cdot x) > \lambda \cdot f(x)\ (\forall)\ \lambda > 1$	$\lambda \cdot GR \subseteq GR\ (\forall)\ \lambda < 1$ $\lambda \cdot L(y) \subseteq L(y)\ (\forall)\ \lambda < 1$ $f(\lambda \cdot x) < \lambda \cdot f(x)\ (\forall)\ \lambda > 1$

După cum se observă din definirea funcţiei de producţie cu revenire constantă la scară, această situaţie este echivalentă cu faptul că funcţia de producţie este omogenă de gradul 1. De aceea este urmărit în mod special gradul de omogenitate al unei funcţii:

Definiţia 13 O funcţie este omogenă de gradul k dacă:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda^k \cdot f(x) \qquad (50)$$

Astfel, o funcţie omogenă de gradul k va fi cu revenire constantă dacă k = 1, descrescătoare dacă k < 1 şi crescătoare dacă k > 1.

b) elasticitatea scalei

$$\varepsilon(x) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\dfrac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda}}{\dfrac{f(\lambda x)}{\lambda}} \qquad (51)$$

care arată cu câte procente se modifică valoarea producţiei dacă scala creşte cu un procent.

Deoarece avem relaţiile succesive:

$$\varepsilon(\mathrm{x}) = \lim_{\lambda\to 1} \frac{\dfrac{\partial f(\lambda \mathrm{x})}{\partial\lambda}}{\dfrac{f(\lambda x)}{\lambda}} = \lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda \mathrm{x})}{\partial \lambda}\cdot\lim_{\lambda\to 1}\frac{\lambda}{f(\lambda x)} = \frac{1}{f(x)}\cdot\lim_{\lambda\to 1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f(\lambda \mathrm{x})}{\partial(\lambda \mathrm{x}_i)}\cdot\frac{\partial(\lambda \mathrm{x}_i)}{\partial\lambda}$$

$$= \frac{1}{f(x)}\cdot\sum_{i=1}^{N} f_i\cdot x_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{f_i}{\bar{f}_i} = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{\mathrm{i}} \qquad (52)$$

rezultă că elasticitatea scalei este egală cu suma elasticităţilor outputului în raport cu fiecare input.

Vom spune că tehnologia prezintă o revenire constantă la scală dacă $\varepsilon(\mathrm{x}) = 1$, descrescătoare dacă $\varepsilon(\mathrm{x}) < 1$ şi crescătoare dacă $\varepsilon(\mathrm{x}) > 1$.

O altă proprietate importantă a funcţiilor de producţie este ***substituibilitatea inputurilor***. Această proprietate spune că, în general, se pot utiliza mai multe combinaţii de inputuri pentru a obţine acelaşi output, sau că, cel puţin în anumite limite, se poate suplini lipsa unei cantităţi dintr-un input pe seama celorlalte inputuri.

Această posibilitate este cerută de limitările tehnice, de posibilităţile de procurare şi rezervele existente ale inputurilor sau pur şi simplu de motive subiective, care duc la situaţii în care este necesară schimbarea tehnologiei de producţie fără a modifica outputul obţinut.

Este evident că în mod normal nu există o infinitate de tehnologii posibile sau că nu putem substitui orice input prin celelalte sau în orice cantitate, dar acceptarea acestor ipoteze este utilă în ceea ce priveşte modelarea matematică a activităţii firmei şi, respectând anumite limite, duce la rezultate suficient de apropiate de valorile reale.

Pentru a exprima posibilităţile de substituire între factori se folosesc următoarele obiecte matematice:

1. Izocuanta unui output dat y_0:

$$\mathrm{Isoq}(\mathrm{y}_0) = \{\mathrm{x} \mid f(\mathrm{x}) = \mathrm{y}_0,\ \mathrm{x} \geq 0\} \qquad (53)$$

reprezentând mulţimea tuturor combinaţiilor de inputuri cu care se poate obţine outputul y_0.

2. Raza unui input dat x_0 în spaţiul inputurilor:

$$\mathrm{R}(\mathrm{x}_0) = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} = \lambda\cdot\mathrm{x}_0,\ \lambda \geq 0\} \qquad (54)$$

reprezentând mulţimea tuturor modificările proporţionale ale inputului x_0.

3. Rata marginală de substituire tehnică între două inputuri x_i şi x_j. Această mărime reprezintă acea cantitate din inputul x_j care este necesară pentru a compensa scăderea unei unităţi

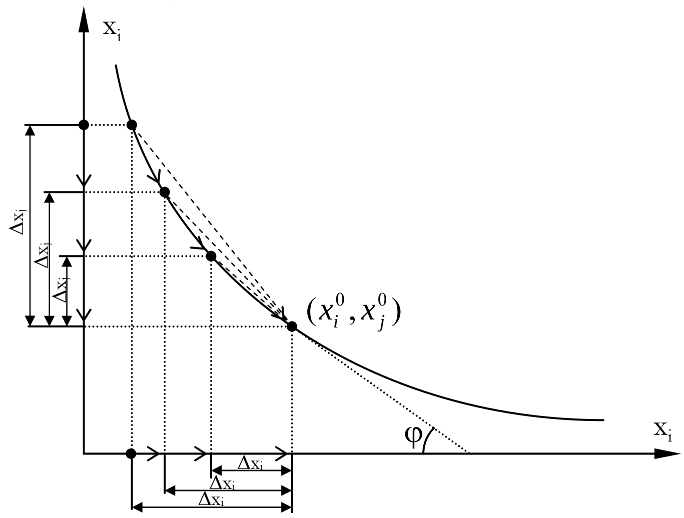


Figura 25

din inputul x_i, în condiţiile în care programul de producţie este (x_0,y_0). În figura 25 a fost reprezentată intersecţia dintre izocuanta lui y_0 şi ortantul pozitiv al spaţiului bidimensional (x_i,x_j) precum şi proporţiile în care trebuie substituiţi cele două inputuri pentru a obţine acelaşi output.

Matematic, această rată se calculează cu formula:

$$\gamma_{ij} = -\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} \qquad (55)$$

unde:

$$f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_j^0 + \Delta x_j, \ldots, x_n^0) = f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_j^0, \ldots, x_n^0) \qquad (56)$$

şi este egală cu tangenta unghiului φ format de tangenta la izocuantă în punctul (x_i^0, x_j^0) cu axa Ox_i. Dezvoltând funcţia din termenul din stânga al relaţiei (I-56) în serie Taylor de ordinul I obţinem:

$$f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_j^0 + \Delta x_j, \ldots, x_n^0) =$$

$$= f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_j^0, \ldots, x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \cdot \Delta x_j + \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_j)^2} \cdot \omega(x_i,x_j)$$

unde $\omega(x_i,x_j)$ este continuă şi nulă în (x_i^0, x_j^0).Înlocuind în (I-56) obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \cdot \Delta x_j = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_j)^2} \cdot \omega(x_i,x_j) \qquad (57)$$

Împărţind cu Δx_i, şi ţinând cont că Δx_j tinde la 0 dacă Δx_i tinde la zero avem:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \qquad (58)$$

sau:

$$\gamma_{ij}(x_i,x_j) = \frac{f_i}{f_j}(x_i,x_j) \qquad (59)$$

4. Se numeşte ***izoclină*** curba de ecuaţie:

$$\frac{f_i}{f_j}(x_i,x_j) = \gamma_{ij}(x_i^0, x_j^0) \qquad (60)$$

5. Elasticitatea ratei marginale de substituţie:

$$\sigma(x_i,x_j) = \lim_{(x_i,x_j)\to(x_i^0,x_j^0)} \frac{\dfrac{\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_i^0}{x_j^0}}{\frac{x_i^0}{x_j^0}}}{\dfrac{\gamma_{ij} - \gamma_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0}} = \frac{\dfrac{d\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\frac{x_i}{x_j}}}{\dfrac{d(\gamma_{ij})}{\gamma_{ij}}} \qquad (61)$$

unde:

$$f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + \Delta x_i, \ldots, x_j^0 + \Delta x_j, \ldots, x_n^0) = f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_j^0, \ldots, x_n^0) \qquad (62)$$

care arată cu câte procente se modifică raportul $\frac{x_i}{x_j}$ prin deplasare de-a lungul izocuantei dacă rata marginală de substituţie se modifică cu un procent.

Cele mai utilizate funcţii de producţie sunt:

I. Funcţii de producţie de tip putere (Cobb-Douglas):

$$f(\mathrm{x}) = C \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N} \qquad (63)$$

unde C este o constantă pozitivă egală cu nivelul producţiei corespunzător folosirii câte unei unităţi din fiecare input iar exponenţii α_i, i = 1…N, sunt pozitivi, în general subunitari.

II. Funcţii de producţie cu elasticitatea ratei marginale de substituţie constantă:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{C}{\left(\frac{\beta_1}{x_1^{\rho}} + \frac{\beta_2}{x_2^{\rho}} + \ldots + \frac{\beta_N}{x_N^{\rho}}\right)^{\frac{\delta}{\rho}}} \qquad (64)$$

unde C, β_i, δ şi ρ sunt constante pozitive.

III. Funcţii de producţie cu proporţii constante:

$$f(\mathrm{x}) = C \cdot \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \ldots, \frac{x_N}{a_N}\right\} \qquad (65)$$

unde C şi a_i sunt constante pozitive.

5. Subsistemul preţuri-cost-profitabilitate

Este evident că orice decizie luată de întreprindere trebuie analizată din punct de vedere calitativ, în ceea ce priveşte oportunitatea, profitabilitatea, posibilităţile de aplicare concretă etc., cât şi cantitativ, în ceea ce priveşte investiţiile de care va fi nevoie, cheltuielile implicate, posibilul profit, optimalitatea soluţiei alese etc.

Astfel, orice maşină utilizată în procesul tehnologic se va uza mai devreme sau mai târziu până la punctul în care întreţinerea ei va deveni mai costisitoare decât înlocuirea ei cu una nouă, fiecare tehnologie existentă la un moment dat va fi depăşită în ceea ce priveşte eficienţa de alte tehnologii nou apărute, ajungând să devină ineficientă datorită costurilor mai mari pe care le implică şi deci apărând necesitatea schimbării ei, fiecare produs va trebui mai devreme sau mai târziu înlocuit cu unul mai performant etc.

În orice întreprindere va trebui să existe un grup de oameni care să analizeze permanent profitabilitatea producţiei, pe baza informaţiilor de pe piaţa bunurilor şi factorilor de producţie, pentru a alege permanent nivelul şi structura optimă a producţiei, să decidă, pe baza fondurilor disponibile, nivelul investiţiilor viitoare şi să compare permanent rezultatele concurenţei cu propriile rezultate, pentru ca firma să rămână competitivă.

În acest sens, este nevoie de existenţa unor instrumente şi metode specifice de analiză, de noţiuni, indicatori şi modele matematice adecvate scopului şi de suportul logistic necesar utilizării şi aplicării acestor modele în timp real.

Personalul implicat în aceste activităţi, acţiunile acestora şi mijloacele utilizate pentru desfăşurarea lor formează un ansamblu unitar, ele constituind un subsistem bine conturat al firmei, numit subsistemul preţuri-cost-profitabilitate. Relaţiile acestui subsistem cu celelalte subsisteme ale firmei şi cu mediul extern acesteia sunt reprezentate în figura 26:

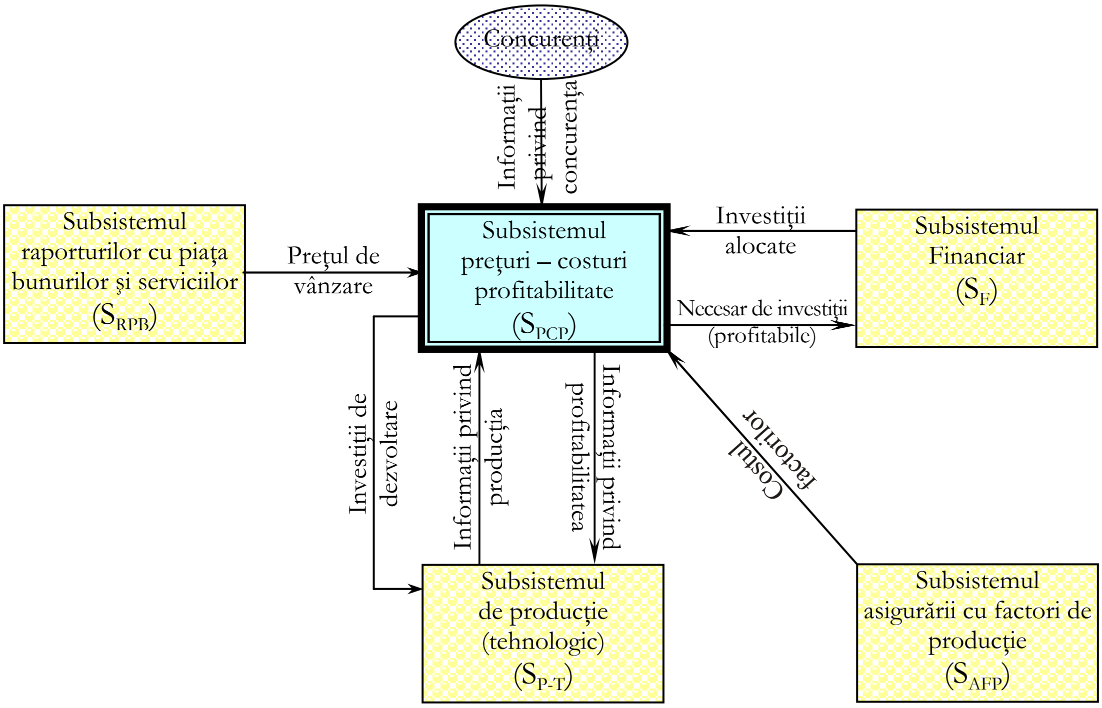


Figura 26

Cele mai utilizate noţiuni în analiza acestui subsistem sunt ***funcţia de cost*** şi ***funcţia de profit***.

Funcţia de cost este necesară pentru calcularea cheltuielilor necesare pentru producerea outputului dat de funcţia de producţie utilizată de subsistemul tehnologic şi va depinde evident de cantitatea produsă, de cantităţile folosite din fiecare input pentru obţinerea acestei producţii şi de costurile inputurilor pe pieţele pe care se comercializează acestea.

Funcţia cost se defineşte prin:

$$c : R^m \times R^n \to R,\ c(w,y) = \min_{x \geq 0} \{w \cdot x \mid f(x) \geq y\} \qquad (66)$$

unde $y \in R^n$, $y \geq 0$ este vectorul cantităţilor de outputuri care trebuie realizate, $x \in R^m$, $x \geq 0$ vectorul cantităţilor de inputuri ce vor fi necesare pentru obţinerea acestora, $w \in R^m$, $w > 0$(nu există inputuri gratis) este vectorul costurilor inputurilor iar f este funcţia de producţie utilizată de subsistemul de producţie.

Pentru un nivel fixat al outputului $\bar{y}$ şi ţinând cont de monotonia funcţiei de producţie, valorile funcţiei cost se găsesc rezolvând problema de programare matematică:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_m} \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot x_i$$
$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \bar{y} \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0 \end{cases} \qquad (67)$$

în care s-a presupus că preţurile unitare ale inputurilor sunt fixate, nedepinzând de cantitatea cumpărată sau furnizorul folosit şi că sigura restricţie a problemei de minimizare este dată de tehnologia folosită în producţie.

Pentru aceleaşi motive invocate la analiza funţiei de producţie, putem presupune că funcţia de cost are proprietăţile:

P_1: Este bine definită (problema de minim are soluţie finită unică) şi strict pozitivă pentru x > 0 şi w > 0 (nu putem produce ceva la cost zero).

P_2: Funcţia cost este crescătoare în w, care economic arată că creşterea preţului inputurilor va duce la creşterea costului de producţie.

P_3: Funcţia cost este concavă şi continuă în w, care economic arată că la modificări mici ale costului inputurilor corespund modificări mici ale costului producţiei şi viteza de creştere a costului producţiei este mai mică decât viteza de creştere a costului inputurilor.

P_4: Funcţia cost este omogenă de gradul I în w, care rezultă din definiţia funcţiei cost.

P_5: Funcţia cost este crescătoare în y (orice unitate în plus de output necesită costuri suplimentare sau costul marginal este pozitiv).

P_6: $c(w,0) = 0$, condiţie destul de restrictivă, deoarece în general, în perioadele de oprire a producţiei apar întotdeauna cheltuieli de întreţinere, salarizare etc, cuprinse în costurile fixe. Totuşi, pe termen lung putem considera că aceste costuri sunt neglijabile.

În practica economică sunt utilizate mai multe categorii de costuri, în funcţie de inputurile luate în considerare, de durata pe care se face estimarea acestora etc, vorbindu-se de costuri fixe (care nu depind de cantitatea de output produsă) sau variabile (care depind de cantitatea de output produsă), costuri pe termen lung sau costuri pe termen scurt etc. În continuare voi face o trecere în revistă a celor mai utilizate tipuri de costuri:

I. ***Costuri pe termen lung***. La calcularea acestor costuri se presupune că toate inputurile sunt disponibile în oric cantitate. În acest caz putem calcula:

1. ***costul total pe termen lung***. Acest cost se calculează rezolvând problema de programare matematică:

$$\mathrm{CTL(w,y)} = \min_{x_1, x_2, \dots, x_m} \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot x_i$$
$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = y \\ x_1, x_2, \dots, x_m \geq 0 \end{cases}$$

2. ***Costul mediu pe termen lung***. Se calculează cu formula:

$$\mathrm{CML(w,y)} = \frac{\mathrm{CTL(w,y)}}{\mathrm{y}}$$

şi reprezintă costul mediu pentru obţinerea unei unităţi de output.

3. ***Costul marginal pe termen lung***. Se găseşte cu formula:

$$\mathrm{C_mL(w,y)} = \frac{\partial \mathrm{CTL(w,y)}}{\partial \mathrm{y}}$$

şi reprezintă costul necesar măririi producţiei cu o unitate.

4. ***Elasticitatea costului total pe termen lung în raport cu outputul*** se calculează cu relaţia:

$$\varepsilon_c = \frac{\dfrac{\partial CTL(w,y)}{\partial y}}{\dfrac{CML(w,y)}{y}} = \frac{C_mL(w,y)}{CML(w,y)}$$

şi arată cu câte procente creşte costul dacă mărim producţia cu un procent.

Cele trei costuri sunt reprezentate în figura 27.

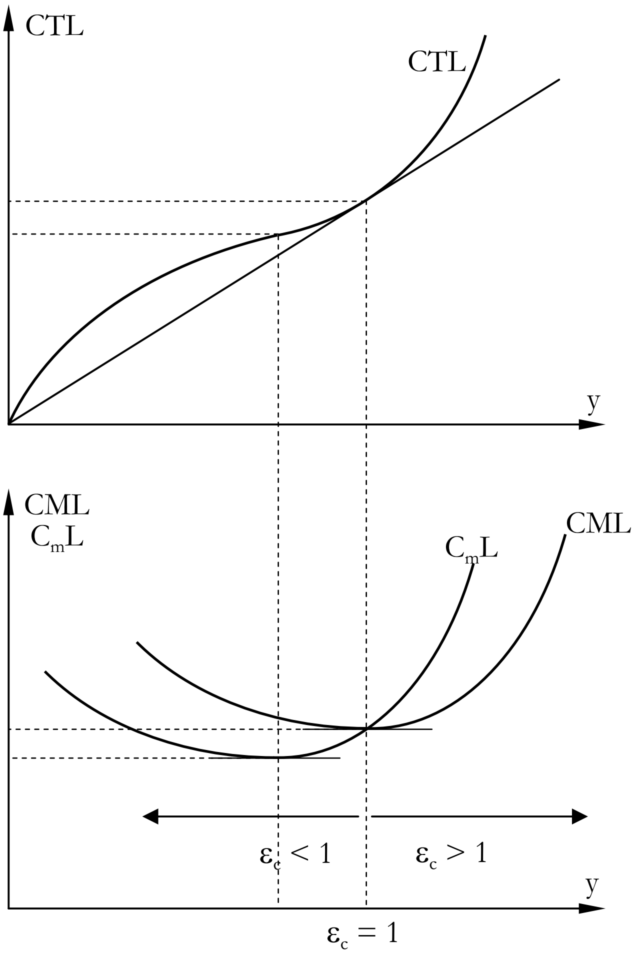


Figura 27

II. ***Costuri pe termen scurt***. În acest caz anumite inputuri pot fi procurate doar în cantităţi limitate. Costurile cel mai des folosite în analiza economică sunt:

1. ***Costul total pe termen scurt***. Se calculează rezolvând problema de programare matematică:

$$CTS(w,y) = \min_{x_1, x_2, \ldots, x_m} \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot x_i$$
$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y \\ x_j \le l_j, j \in J \subset \{1,2,\ldots,M\} \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \ge 0 \end{cases}$$

Soluţia are forma CTS(w,y) = $\sum_{j \in J_1} w_j \cdot x_j + \sum_{j \in J_2} w_j \cdot l_j$ cu $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ şi $J_1 \cup J_2 = \{1,\ldots,M\}$.

Datorită restricţiilor suplimentare costul total pe termen scurt este mai mare sau egal cu costul total pe termen lung. De asemenea se observă că putem împărţi costul total pe termen scurt în două componente:

a. ***Costul variabil pe termen scurt***

$$CVS(w,y) = \sum_{j\in J_1} w_j \cdot x_j \text{ , } j \in J_1$$

b. ***Costul fix pe termen scurt***

$$CFS(w,y) = \sum_{j\in J_2} w_j \cdot l_j \text{ , } j \in J_2$$

2. ***Costul mediu pe termen scurt***

$$CMS(w,y) = \frac{CTS(w,y)}{y} = \frac{CVS(w,y)}{y} + \frac{CFS(w,y)}{y} = CVMS(w,y) + CFMS(w,y)$$

care de asemenea poate fi împărţit în două componente: ***costul variabil mediu pe termen scurt*** CVMS(w,y) şi ***costul fix mediu pe termen scurt*** CFMS(w,y).

3. ***Costul marginal pe termen scurt***

$$C_mS(w,y) = \frac{\partial CTS(w,y)}{\partial y} = \frac{\partial CVS(w,y)}{\partial y} + \frac{\partial CFS(w,y)}{\partial y} = C_mVS(w,y)$$

Aceste costuri pot fi urmărite în figura 28.

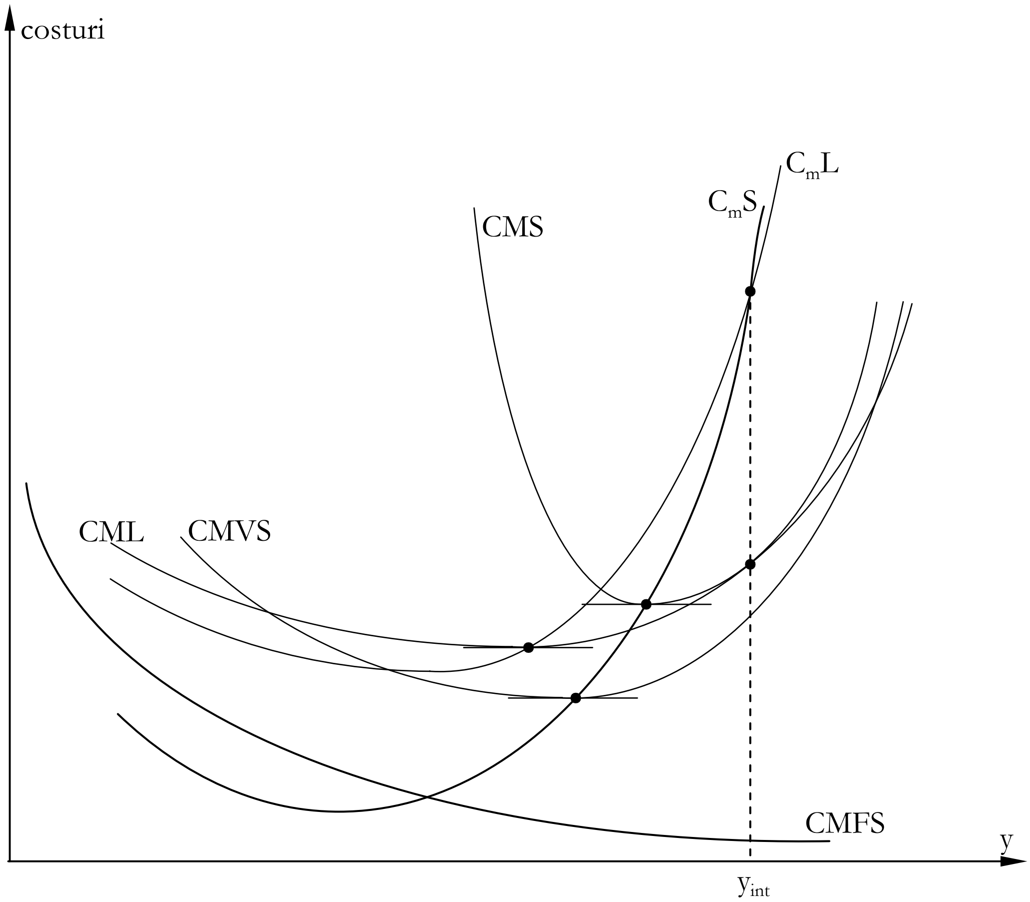


Figura 28

Se poate demonstra că, aşa cum se vede şi din desen, între aceste costuri există următoarele relaţii:

1. C_mL se intersectează cu CML în punctul de minim al CML.
2. C_mS se intersectează cu CMS în punctul de minim al CMS.
3. Curba CMS este întotdeauna curbei CML.
4. Curba CMS(y) intersectează curba CML(y) într-un singur punct, de aceaşi abcisă y_{int} cu cel în care se intersectează C_mS cu C_mL.
5. Curbele CMS(y) şi CML(y) au pante egale în punctul de abcisă y_{int}.
6. Curba C_mS intersectază curba CVMS în punctul de minim al CVMS.

De asemenea, pentru a analiza influenţa multiplicării preţurilor factorilor şi a volumului outputului asupra inputurilor şi asupra costului rezultat se pot calcula următorii indicatori:

1. Elasticitatea cererii din inputul x_i la o creştere cu un procent a preţului inputului x_j:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\dfrac{\partial x_i(w,y)}{\partial w_j}}{\dfrac{x_i(w,y)}{w_j}} \quad \text{oricare ar fi i,j = 1,…,m}$$

care arată cu câte procente se modifică cererea din inputul x_i dacă preţul inputului x_j creşte cu un procent. Avem $\varepsilon_{ii} \le 0$ şi, în general, $\varepsilon_{ij} \ne \varepsilon_{ji}$, între acestea existând relaţia:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{w_j \cdot x_j(w,y)}{w_i \cdot x_i(w,y)} \cdot \varepsilon_{ji}$$

2. Elasticitatea costului de producţie în raport cu preţul inputului x_i:

$$\varepsilon_c^i = \frac{\dfrac{\partial c(w,y)}{\partial w_i}}{\dfrac{c(w,y)}{w_i}} = \frac{w_i \cdot x_i(w,y)}{c(w,y)}$$

care arată cu câte procente se modifică costul la o creştere cu un procent al preţului inputului x_i.

3. Elasticitatea costului mediu:

$$\varepsilon_{CML}^i = \frac{\dfrac{\partial c(w,y)}{\partial w_i}}{\dfrac{c(w,y)}{w_i}} = \frac{w_i \cdot x_i(w,y)}{c(w,y)} = \varepsilon_c^i$$

care arată cu câte procente se modifică costul mediu pe termen lung la o creştere cu un procent al preţului inputului x_i.

4. Modificarea costului marginal pe termen lung la o creştere cu o unitate a preţului inputului x_i:

$$\Delta_{C_mL}^i = \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{\partial c(w,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 c(w,y)}{\partial w_i \partial y} = \frac{\partial x_i(w,y)}{\partial y}$$

5. Elasticitatea costului în raport cu nivelul outputului:

$$\varepsilon_c^y = \frac{\dfrac{\partial c(w,y)}{\partial y}}{\dfrac{c(w,y)}{y}} = \frac{\partial \ln c(w,y)}{\partial \ln(y)} = \frac{C_mL}{CML}$$

care arată cu câte procente se modifică costul dacă nivelul outputului se modifică cu un procent.

În ultimă instanţă, cel mai important obiectiv al firmei rămâne maximizarea profitului, de aceea este foarte importantă introducerea şi analiza unei funcţii care să-l exprime în funcţie de variabilele care îl influenţează, numită ***funcţia de profit***.

Funcţia de profit se defineşte prin:

$$\pi : R^n \to R,\ \pi(y) = V(y) - c(y)$$

unde V(y) reprezintă venitul obţinut de firmă prin vânzarea outputului y iar c(y) costul implicat de obţinerea acestui output.

Dacă firma acţionează pe o piaţă pe care concurenţa poate fi presupusă perfectă atunci funcţia de profit va avea forma:

$$\pi(y) = p \cdot y - c(w,y) = \sum_{j=1}^{N} p_j \cdot y_j - \sum_{i=1}^{M} w_i \cdot x_i \quad \text{unde } f(x) = y$$

unde p este preţul de vânzare al outputurilor îar f funcţia de producţie.

Dacă firma acţionează pe o piaţă cu competiţie imperfectă atunci preţul outputurilor depinde de cantitatea de output vândută, conform funcţiei inverse a cererii, funcţia profit având forma:

$$\pi(y) = p(y) \cdot y - c(w,y) = \sum_{j=1}^{N} p_j(y) \cdot y_j - \sum_{i=1}^{M} w_i \cdot x_i \quad \text{unde } f(x) = y$$

Pentru o anumită producţie a firmei (x^o,y^o) putem considera funcţia profit ca depinzând numai de preţurile inputurilor şi de preţurile de vânzare ale outputurilor:

$$\pi : R^m \times R^m \times R^n \to R,\ \ \pi = \pi(w,p) = p \cdot y^o - c(w,y^o)$$

Cele mai importante proprietăţi ale funcţiei profit sunt:

P_1) Funcţia profit are, cel puţin pe termen lung, numai valori pozitive, altfel firma ar da faliment:

$$\pi(p,w) \geq 0 \text{ oricare ar fi } y \geq 0$$

P_2) Funcţia profit este crescătoare în p, profitul crescând odată cu creşterea preţului produselor comercializate de firmă:

$$p^1 \geq p^2 \Rightarrow \pi(p^1,w) \geq \pi(p^1,w) \text{ oricare ar fi } p^1, p^2 \in R^N \text{ şi } w \in R^M \text{ pozitivi}$$

P_3) Funcţia profit este descrescătoare în preţurile inputurilor, utilizarea unor inputuri mai scumpe ducând la scăderea profitului:

$$w^1 \geq w^2 \Rightarrow \pi(p,w^1) \leq \pi(p,w^2) \text{ oricare ar fi } w^1, w^2 \in R^M \text{ şi } p \in R^N \text{ pozitivi}$$

P_4) Funcţia profit este continuă şi convexă în (p,w):

P_5) Funcţia profit este omogenă de gradul 1 în (p,w):

$$\pi(\lambda p,\lambda w) = \lambda \cdot \pi(p,w)$$

P_6) Dacă funcţia profit este diferenţiabilă în (p,x) atunci pentru un nivel dat al preţurilor pe piaţa inputurilor w şi al outputurilor p, există o unică tehnologie de producţie (x^*, y^*) unde:

$$\begin{cases} x^*(p,w) = -\dfrac{\partial \pi(p,w)}{\partial w} \\ y^*(p,w) = \dfrac{\partial \pi(p,w)}{\partial p} \end{cases}$$

care maximizează profitul firmei.

P_7) Dacă firma acţionează pe o piaţă cu concurenţă imperfectă atunci funcţia de profit:

$$\pi(y) = p(y) \cdot y - c(y)$$

este o funcţie concavă.

Dacă dorim maximizarea profitului pe termen scurt în cazul unei pieţe cu concurenţă perfectă pentru un nivel al preţurilor dat (w,p) atunci avem de rezolvat problema de maximizare:

$$\max_{x_V} \pi(x) = p \cdot f(x_V, x_F) - w_V \cdot x_V - w_F \cdot x_F$$

unde x_V sunt inputurile variabile şi $w_V \cdot x_V$ este costul variabil pe termen scurt CVS iar x_F sunt inputurile fixe şi $w_F \cdot x_F$ este costul fix pe termen scurt CFS. Soluţia optimă este obţinută prin rezolvarea sistemului:

$$\frac{\partial \pi(x)}{\partial x_V} = 0 \Leftrightarrow p \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_V} - w_V = 0 \Leftrightarrow p \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_V} = w_V$$

adică acel nivel al producţiei pentru care profitul marginal este egal cu preţul inputurilor.

Pentru ca soluţia sistemului să fie optimă este necesar ca:

$$\frac{\partial^2 \pi(x)}{\partial^2 x_V} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_V} \leq 0$$

adică exact condiţia ca funcţia de producţie să prezinte randamente descrescătoate.

Dacă la nivelul firmei costul se exprimă în funcţie de outputul realizat atunci, pentru o piaţa a outputurilor cu concurenţă perfectă, problema se reduce la problema de maximizare:

$$\max_{y} \pi(y) = p \cdot y - c(y)$$

soluţia fiind dată de condiţia:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow p = C_m(y) = CV_m(y)$$

În cazul unei pieţe cu concurenţă imperfectă trebuie rezolvată problema:

$$\max_{y} \pi(y) = p(y) \cdot y - c(y)$$

soluţia fiind dată de condiţia:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow p(y) + \frac{\partial p(y)}{\partial y} = C_m(y) = CV_m(y) \Leftrightarrow V_m(y) = CV_m(y)$$

adică firma va mări cantitatea de output până când venitul adus de ultima unitate de output produsă va fi egal cu costul necesar pentru producerea acesteia.

6. Subsistemul asigurării cu factori de producţie (inputuri) (AFP)

Desfăşurarea activităţii firmei presupune un proces continuu de procurare a inputurilor necesare fabricării propriilor produse. Această activitate presupune o informare cât mai detaliată asupra potenţialilor furnizori pe pieţele specifice, în ceea ce priveşte cantităţile posibile de contractat de la aceştia, seriozităţii în ceea ce priveşte livrarea inputurilor cât şi a fluctuaţiilor posibile ale preţurilor. Toate acestea presupun un schimb continuu de informaţii între firmă şi piaţa factorilor de producţie un flux permanent de inputuri dinspre piaţă spre firmă pe baza unui flux de numerar corespunzător preţului acestora.

Controlul acestor fluxuri presupune: permanenta analiză a situaţiei de către subsistemul preţuri costuri profitabilitate (S_{PCP}), care va decide cât şi de la cine se vor achiziţiona inputuri, necesitatea asigurării unei sincronizări între momentele intrării inputurilor în firmă cu momentele livrării acestora către subsistemul de producţie şi existenţa în timp util a fondurilor necesare achiziţionării inputurilor, menţinerii prestigiului firmei faţă de furnizori şi asigurării lichidităţilor necesare firmei în orice moment, de către subsistemul financiar.

Toate aceste corelaţii au fost schematizate în figura 29.

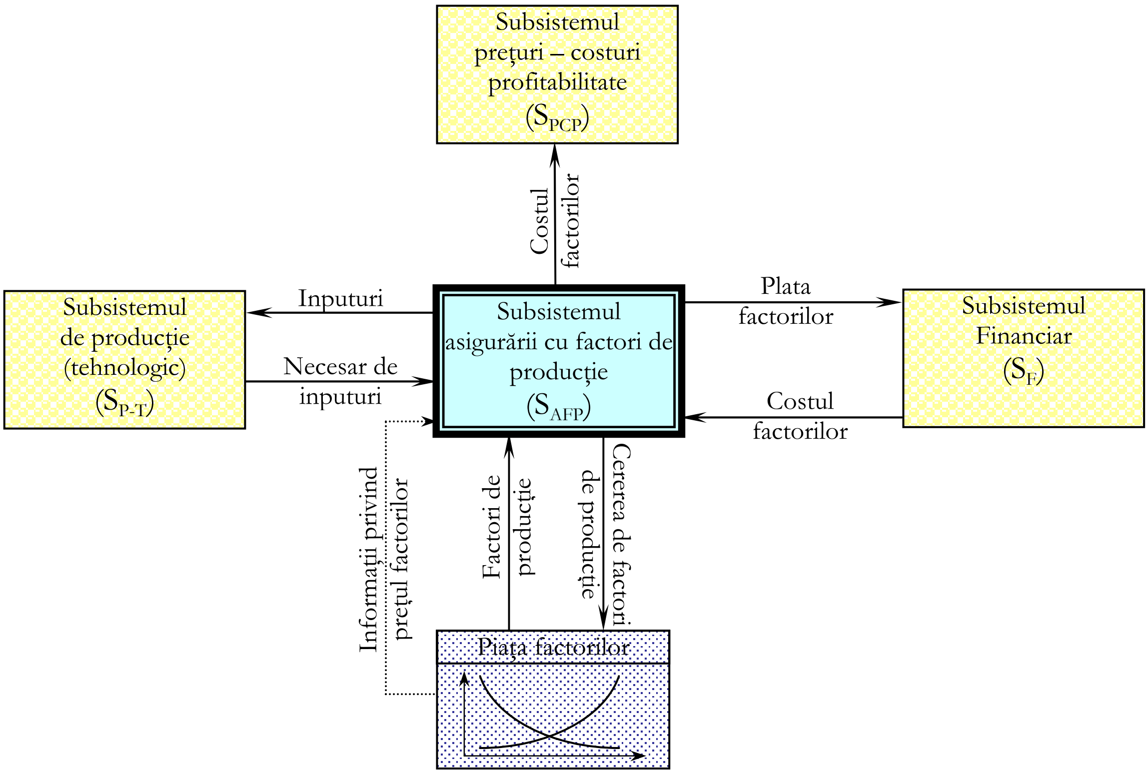


Figura 29

Analiza pieţei (pieţelor) de factori de producţie necesită identificarea cât mai precisă a funcţiilor de cerere şi ofertă de pe aceste pieţe.

Presupunând că, în ultimă instanţă, scopul firmei este maximizarea profitului, firma utilizând m inputuri x_i cu preţurile unitare w_i, $i = 1,\ldots,m$ pentru a obţine n outputuri q_j cu preţurile de vânzare p_j, $j = 1,\ldots,n$, valoarea cererii de inputuri va fi aceea care duce la maximizarea profitului, adică soluţia problemei:

$$\max_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot q_j(x) - C_F - \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot x_i\right) \qquad (68)$$

dacă firma acţionează pe pieţe ale inputurilor şi outputurilor perfecte, sau a problemei:

$$\max_{x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j(q) \cdot q_j(x) - C_F - \sum_{i=1}^{m} w_i(x) \cdot x_i\right) \qquad (69)$$

dacă firma acţionează pe pieţe cu concurenţă imperfectă.

În primul caz, condiţiile de optim de ordinul întâi duc la sistemul de ecuaţii:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial q_j(x)}{\partial x_i} \quad ,i = 1,\ldots,m \qquad (70)$$

care arată că firma foloseşte acele cantităţi din inputuri care corespund situaţiei în care costul fiecărui input pe piaţă, w_i, sunt egal cu produsul lui marginal (profitul adus de utilizarea unei unităţi în plus din acest input) $\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial q_j(x)}{\partial x_i}$. Condiţiile de optim de ordinul 2 implică concavitatea funcţiei profit în inputuri, adică faptul că matricea hessian:

$$H = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial^2 q_j(x)}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{i,k=1,\dots,m} \qquad (71)$$

este negativ definită.

Dacă presupunem că firma produce un singur output atunci analiza unui singur input în condiţiile în care nivelurile celorlalţi se presupun fixate duce la soluţia:

$$w_i = p \cdot q'(x_i) \qquad (72)$$

cu condiţia de ordinul 2:

$$q''(x_i) < 0 \qquad (73)$$

adică exact legea randamentelor descrescătoare.

Curba cererii pe piaţa inputurilor se obţine ca mulţime a punctelor de coordonate (w, x_w), unde x_w este cantitatea de input care duce la profitul maxim, dacă preţul inputurilor este w.

Conform legii randamentelor descrescătoare, funcţiile $\frac{\partial q_j(x)}{\partial x_i}$ sunt descrescătoare, ceea ce implică faptul că, pentru o valoare mai mare a preţului inputurilor, $w_2 > w_1$ (sau, ţinând cont de sistemul I-70, $\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial q_j(x_{w_2})}{\partial x_i} > \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial q_j(x_{w_1})}{\partial x_i}$), rezultă o soluţie $x_{w_2} < x_{w_1}$, adică firma va utiliza mai puţini factori de producţie.

Pentru o piaţă cu concurenţă imperfectă, condiţiile de optim de ordinul întâi duc la sistemul de ecuaţii:

$$\frac{\partial (w_i(x) \cdot x_i)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (p_j(q) \cdot q_j(x))}{\partial x_i} \quad ,i = 1,\dots,m \qquad (74)$$

sau:

$$w_i(x) + \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot \frac{\partial w_k(x)}{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial p_j(q)}{q_l} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial x_i} \right) \cdot q_j(x) + p_j(q) \cdot \frac{\partial q_j(x)}{\partial x_i} \right) \quad ,i = 1,\dots,m \qquad (75)$$

adică aceeaşi condiţie ca venitul marginal să egaleze costul marginal.

Curba cererii pe piaţa inputurilor se obţine ca mulţime a punctelor de coordonate ($w(x_{opt})$, x_{opt}), unde x este cantitatea de input care duce la profitul maxim, preţul inputurilor fiind $w(x_{opt})$.

În final, utilizând curba cererii pe piaţa inputurilor găsită în combinaţie cu curba ofertei pe piaţa inputurilor, obţinem nivelul optim al inputurilor pe care trebuie să le utilizeze firma pentru a-şi maximiza profitul, ca intersecţie a celor două curbe.

Analiza depinde evident de diferitele tipuri de competiţii imperfecte, de posibilele restricţii impuse variabilelor, de existenţa şi importanţa altor criterii de optim urmărite de firmă etc.

Odată decisă cantitatea ce va fi utilizată din fiecare input urmează organizarea aprovizionării şi gestionării acestora, activitate care implică luarea de decizii asupra dimensiunilor tranşelor în care vor fi aduse inputurilor, momentele la care vor fi aduse, furnizorii care vor fi solicitaţi, luarea în considerare a problemelor care ar putea să apară datorita unor disfuncţionalităţi faţă de programul iniţial etc.

Datorită complexităţii problemei, intervalului relativ lung de timp căreia i se adresează şi dinamicii mediului economic, modelel utilizate în acest scop sunt în general modele probabilistice, utilizând cu precădere tehnici de simulare, modele ale programării dinamice implicând multe etape în desfăşurare, modele care necesită utilizarea tehnicii de calcul ca o consecinţă a volumului imens de calcule, modele care iau în considerare posibilitatea trecerilor bruşte dintr-o stare în alta, modele multicriterioale sau multiobiectiv etc.

Astfel, să presupunem că analizăm utilizarea unei anumite materii prime în procesul de producţie, consumul din acesta nefiind uniform şi continuu în timp, implicând o anumită imprecizie în ce priveşte estimarea cantităţii necesare, momentelor la care va fi nevoie de aceasta cât şi în ceea ce priveşte posibilităţile de procurare a ei. Deoarece aducerea spre utilizare în producţie a acestei materii prime necesită costuri ridicate, cât şi pierderi mari în cazul absenţei acesteia, care cresc rapid cu cantitatea şi durata lipsei, este necesară crearea unui stoc tampon în depozitele întreprinderii. Eficacitatea şi operativitatea aprovizionării implică o formalizare relativ simplă a modului în care este adusă materia primă în întreprindere, de aceea este bine ca aducerea materiei prime să se facă la intervale egale şi în cantităţi egale.

Presupunem că cererea zilnică din materia primă respectivă este o variabilă aleatoare discretă cu un număr finit de valori, estimată pe baza experienţei anterioare:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Costul aferent organizării unei aprovizionări normale este de C_L u.m. şi nu depinde de cantitatea adusă. În cazul în care cantitatea din depozit scade sub o anumită cantitate critică S_C, se face o comandă specială, cu o cantitate Q_S, care necesită un cost mai mare decât cel necesar unei aprovizionări normale $C_S > C_L$. De asemenea, în cazul acesta, şi preţul unitar al materiei prime este mai mare decât costul normal $p_S > p_L$. Chiar dacă este lansată această comandă, se estimează că ea va putea fi obţinută doar cu o probabilitate p, intervalul de timp dintre momentul lansării acesteia şi momentul intrării mărfei în depozit fiind o variabilă aleatoare discretă cu un număr finit de valori:

$$t = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

Presupunem că într-un interval nu se poate obţine decât cel mult o comandă specială.

Costul unitar de stocare este presupus constant c_S (unităţi monetare pe unitate de timp ori unitate de măsură a materiei prime) iar în cazul lipsei materiei prime vor apărea pierderi unitare $c_P > c_S$.

În aceste condiţii se doreşte alegerea acelui interval dintre două aprovizionări T şi acelei cantităţi Q ce va fi adusă la fiecare aprovizionare astfel încât costul mediu cu aprovizionarea să fie minim.

Deoarece modelarea matematică a situaţiei şi existenţa variabilelor aleatoare, este practic imposibilă găsirea unei soluţii analitice, de aceea este utilizată tehnica simulării, fiind generat un număr foarte mare de scenarii pentru diferite perechi posibile (T,Q), până când este identificată acea pereche (T_{opt},Q_{opt}) care duce la un cost total mediu minim.

Un scenariu posibil se obţine în felul următor:

pasul 1. Se alege o pereche posibilă (T,Q). Avem deci, la începutul primului interval T din perioada analizată, cantitatea Q în depozit. De asemenea, costul total iniţial va fi $C_L + Q \cdot p_S$.
pasul 2. Se generează un număr aleator prin care va fi decisă cantitatea d_i necesară în prima zi din materia primă respectivă.
*pas*ul 3. Se micşorează stocul din depozit cu cantitatea d_i: $Q \to Q - d_i$.

pasul 4. Se compară stocul rămas $Q - d_i$ cu stocul critic S_C. Dacă stocul rămas este mai mic decât stocul critic se lansează o comandă specială şi se trece la pasul 5. Dacă nu, atunci se adaugă la costul total costul mediu de stocare $c_m = \frac{Q + (Q - d_i)}{2} \cdot c_S$ şi se reia algoritmul de la pasul 2.

pasul 5. Se verifică dacă în intervalul actual a mai fost lansată o comandă specială. Dacă da se trece la pasul 8, altfel se trece la pasul 6.

pasul 6. Se generează un număr aleator prin care se decide dacă această comandă va putea fi obţinută sau nu. Dacă nu putem obţine comanda se trece la pasul 8. Dacă putem obţine comanda se adaugă la costul total valoarea C_S iar apoi se generează un număr prin care se decide peste câte zile va intra comanda în stoc.

pasul 7. Dacă în ziua respectivă a intrat o comandă specială, stocul creşte cu Q_S şi costul total cu $p_S \cdot Q_S$.

pasul 8. Se compară stocul rămas cu valoarea zero. Dacă stocul rămas e pozitiv, se adaugă la costul total valoarea:

$$c_m = \frac{Q + (Q - d_i)}{2} \cdot c_S$$

Dacă stocul rămas e negativ, se adaugă la costul total valoarea:

$$c_m = -\frac{Q + (Q - d_i)}{2} \cdot c_P \text{ dacă } Q < 0$$

$$c_m = \frac{Q^2}{2d_i} \cdot c_S + \frac{(d_i - Q)^2}{2d_i} \cdot c_P \text{ dacă } Q > 0$$

apoi se reia algoritmul de la pasul 2.

Se efectuează simularea pentru un număr suficient de mare de intervale sau se alege un număr finit de intervale şi se face simularea de foarte multe ori. În final se calculează costul total mediu ca raport între costul total obţinut şi lungimea intervalului sau ca medie între costurile medii ale simulărilor efectuate. Valoarea obţinută reprezintă cea mai probabilă valoare a costului dacă se alege intervalul de reaprovizionare T şi cantitatea adusă la fiecare aprovizionare Q.

Tehnica de mai sus se va aplica pentru diferite perechi ($Q.T$) până când va fi identificată a cea pereche pentru care costul total mediu este minim.

Din cele de mai sus se vede că această tehnică este imposibil de aplicat fără ajutorul calculatorului, volumul de calcule fiind imens.

7. Subsistemul financiar

Aşa cum s-a desprins şi din analiza celorlalte subsisteme, rolul subsistemului financiar este de a asigura necesarul de fonduri pentru plata factorilor de producţie, susţinerea investiţiilor, plata dividendelor, taxelor şi datoriilor etc., pe baza veniturilor proprii şi/sau a împrumuturilor, de a analiza şi fructifica oportunităţile apărute şi de a gestiona toate fluxurile de băneşti din întreprindere.

Legătura acestui subsistem cu celelalte subsisteme şi cu mediul extern este reprezentată în figura 30.

Politica financiară a firmei constă în luarea de decizii privind modul în care sunt procurate resursele financiare şi felul în care sunt utilizate.

Resursele financiare pot proveni fie din *surse interne* fie din *surse externe*. Sursele interne (proprii) pot proveni din:

- capitalul particular al fondatorilor firmei sau a celorlalţi acţionari;
- o parte din profit;
- fondul de amortizare;

- emisiuni de acţiuni;
- vânzarea sau dezafectarea unor utilaje sau clădiri, etc.

Sursele externe (atrase) se constituie din:

- credite bancare interne şi externe
- subvenţii de la stat
- alocaţii de la buget pentru obiective economice "comandă de stat" etc.

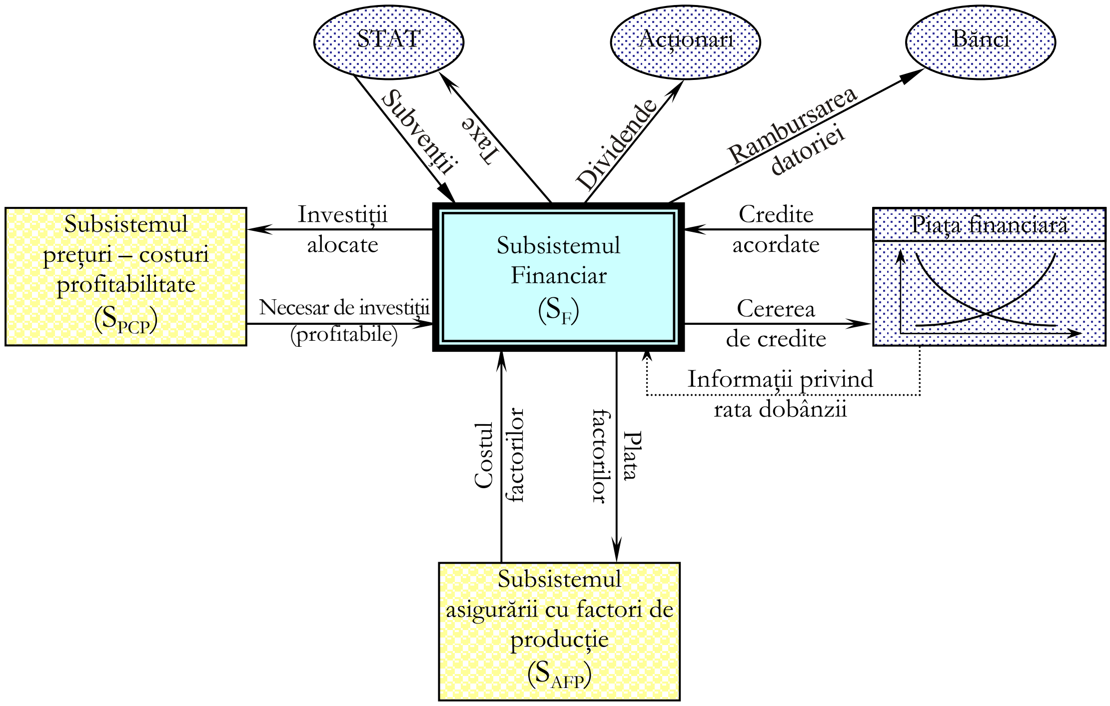


Figura 30

Aceste resurse sunt utilizate pentru:

- constituirea stocurilor de producţie şi acoperirea cheltuielilor până la încasarea creanţelor;
- investiţii;
- rezerve de trezorerie preventive;
- amenzi, penalizări, pierderi la bursă etc.

Cele mai importante decizii, atât prin efectul lor cât şi prin complexitate sunt cele ce privesc investiţiile. Acestea se pot concretiza în:

- maşini, utilaje, instalaţii şi linii tehnologice, aparate de măsură şi control etc.
- lucrări de construcţii-montaj
- prospectări geologice
- plantaţii, achiziţionare animale etc.

Investiţiile pot fi *directe* (pentru obiectivul de bază), *colaterale* (pentru asigurarea utilităţilor obiectivului de bază) sau *conexe* (în alte obiective pentru a asigura materiile prime obiectivului principal). Ele se pot concretiza în *obiective noi* sau în *dezvoltări*, *modernizări*, *reutilări*, *reprofilări* ale unor obiective deja existente.

Deoarece investiţiile reprezintă un efort foarte mare din partea firmei şi determină profitabilitatea şi supravieţuirea firmei, este necesară o analiză continuă a eficienţei acestora. Analiza se face în principal prin sisteme de indicatori, modele matematice de optimizare sau control optimal, prospectări ale pieţei etc.

Sistemul de indicatori utilizaţi la nivelul firmei poate fi împărţit (după sfera de cuprindere) în:

- *indicatori cu caracter general* (utilizaţi pentru formarea unei imagini globale asupra eforturilor şi efectelor ce vor caracteriza activitatea şi eficienţa viitoare a obiectivului);
- *indicatori de bază* (utilizaţi pentru a exprima eficienţa investiţiilor);
- *indicatori suplimentari* (utilizaţi pentru a completa sistemul de informaţii, se referă la activităţi adiacente: bilanţul termic şi energetic al firmei, bilanţ contabil, structura personalului, parametrii tehnicii ai utilajelor etc.)
- *indicatori specifici* (surprind particularităţile fiecărei ramuri sau domeniu de activitate în care îşi desfăşoară firma activitatea).

Indicatorii cu caracter general sunt:

1. *capacitatea de producţie*
2. *numărul de salariaţi*
3. *cheltuielile de producţie*
4. *valoarea producţiei*
5. *profitul*
6. *productivitatea muncii*
7. *consumurile specifice etc.*

Indicatorii de bază sunt:

1. *valoarea investiţiei*

$$I_t = I + M_O + C_S$$

unde:

I_t = investiţia totală
I = investiţia calculată conform devizului general
M_O = necesarul de mijloace circulante pentru începerea funcţionării obiectivului
C_S = cheltuieli cu pregătirea cadrelor, supravegherea lucrărilor etc.

2. *durata de execuţie a lucrărilor de investiţii*

3. *durata de funcţionare a obiectivului în care se va investi*

4. *investiţia specifică*:

$$s_i = \frac{I_i}{q_i} \text{ sau } s_i = \frac{I_i}{Q_i} \quad \text{– în cazul unui obiectiv nou}$$

$$s_i = \frac{I_{mi}}{q_{mi} - q_0} \text{ sau } s_i = \frac{I_{mi}}{Q_{mi} - Q_0} \quad \text{– în cazul modernizării, dezvoltării sau retehnologizării unui obiectiv existent}$$

$$s_c = \frac{I_i - I_j}{q_i - q_j} \text{ sau } s_c = \frac{I_i - I_j}{Q_i - Q_j} \quad \text{– pentru compararea variantelor}$$

unde:

s_i = investiţia specifică
s_c = necesarul suplimentar de investiţii în varianta *i* faţă de varianta *j* pentru a obţine o capacitate suplimentară de producţie de o unitate fizică (sau valorică), în varianta *i* faţă de varianta *j*.
I_i, I_j = investiţia aferentă variantele *i* şi *j*
q_i, q_j = capacitatea de producţie (tone, bucăţi, metri pătraţi etc.) în variantele *i* şi *j*
Q_i = valoarea producţiei în variantele *i* şi *j*
I_{mi} = investiţia alocată pentru modernizare, dezvoltare sau retehnologizare în varianta *i*

q_{mi} = capacitatea de producţie după modernizare
Q_{mi} = valoarea producţiei după modernizare
q_0 = capacitatea de producţie existentă înainte de modernizare
Q_0 = valoarea producţiei existentă înainte de modernizare
i, j = variante de investiţie.

5. *termenul de recuperare al investiţiilor*

$$T_i = \frac{I_i}{P_{hi}} \quad \text{– pentru obiectivele noi}$$

$$T_i = \frac{I_{mi}}{P_{hmi} - P_{h0}} \quad \text{– pentru modernizare, dezvoltare sau retehnologizare}$$

$$T_i = \frac{I_i - I_j}{P_{hi} - P_{hj}} \quad \text{– pentru comparare}$$

unde:

T_i = termenul de recuperare
P_{hi}, P_{hj} = profitul anual al variantelor *i* şi *j*
P_{hmi}= profitul anual al variantei *i* după de modernizare
P_{h0} = profitul anual înainte de modernizare.

6. *Coeficientul de eficienţă economică a investiţiilor* (profitul anual la o u.m. investită)

$$c_i = \frac{P_{hi}}{I_i} \text{– pentru obiective noi}$$

$$c_i = \frac{P_{hmi} - P_{h0}}{I_{mi}} \quad \text{– pentru modernizări}$$

7. *Cheltuieli echivalente sau recalculate*

$$K_i = I_i + C_{hi} \cdot T_n$$

unde:

K_i = cheltuielile recalculate
C_{hi} = cheltuielile anuale de producţie aferente variantei *i*
I_i = valoarea investiţiei în varianta *i*
T_n = termenul normat de recuperate

8. R*andamentul economic al investiţiilor*

$$R_i = \frac{P_{ni}}{I_i}$$

unde:

R_i = randamentul economic al variantei *i*
P_{ni} = profitul net în varianta *i*
I_i = investiţia efectuată în varianta *i*

Deoarece procesul de materializare a investiţiilor prin recuperarea cheltuielilor şi obţinerea profitului se desfăşoară pe o perioadă mare de timp, efectele utile ale investiţiilor sunt puternic influenţate de factorul timp.

Legătura dintre investiţii şi timp este urmărită pe mai multe segmente ale procesului investiţional, cum sunt:

- în programarea realizării investiţiilor prin optimizarea funcţiei cost-durată;
- efectul economic al imobilizărilor de fonduri băneşti şi mijloace materiale necesare efectuării investiţiilor;

- perioada de atingere a parametrilor proiectaţi;
- efectul uzurii morale;
- durata de funcţionare a viitorului obiectiv etc.

În mod concret, timpii operatori în procesul operaţional sunt:

- durata necesară pentru proiectarea şi elaborarea documentaţiei tehnico-economice;
- durata de execuţie a lucrărilor de investiţii;
- durata atingerii parametrilor proiectaţi;
- durata de recuperare a fondurilor de investiţii cheltuite;
- perioada stabilită pentru restituirea creditelor;
- durata de funcţionare a obiectivului respectiv.

Durata de execuţie a lucrărilor este aceea în care se consumă cea mai mare parte din valoarea investiţiei, pentru evaluarea eficienţei economice pe această perioadă folosindu-se o serie de indicatori care surprind mărimea pierderilor datorate imobilizării fondurilor investiţionale:

1. *Mărimea imobilizărilor totale*

$$M_i = \sum_{h=1}^{d} I_h (d - h + k)$$

unde:

M_i = mărimea imobilizărilor totale
d = durata de execuţie a obiectivului
I_h = fondul de investiţii cheltuit în anul h
k = parametru care poate fi 0 sau 1 după cum investiţia s-a cheltuit la sfârşitul, respectiv începutul anului.

2. *Imobilizarea specifică*

$$m_i = \frac{M_i}{q} = \frac{\sum_{h=1}^{d} I_h (d - h + k)}{q}$$

3. *Efectul economic al imobilizărilor* (efectul nerealizat prin imobilizarea fondurilor)

$$E_i = e_n \cdot M_i = e_n \cdot \sum_{h=1}^{d} I_h (d - h + k)$$

unde e_n este coeficientul de eficienţă economică mediu pe ramura sau domeniul de activitate respectiv.

4. *Efectul economic specific al imobilizărilor*

$$\delta_i = \frac{E_i}{q_i}$$

unde q_i este capacitatea anuală de producţie.

Indicatorii de mai sus nu surprind însă şi efectele propagate (un câştig aduce şi alte câştiguri iar o pierdere şi alte pierderi), fiind necesare metode care să contorizeze şi aceste efecte, una dintre cele mai cunoscute tehnici fiind cea a actualizării.

Această tehnică pleacă de la observaţia că utilizarea unei sume de bani x în producţie va duce, după o perioadă de timp, la un anumit profit p. În concluzie, dacă presupunem că rata profitului rămâne constantă în timp, o investiţie de x unităţi monetare făcută azi echivalează, peste h ani, cu suma $x \cdot \left(1 + \frac{p}{x}\right)^h$.

Raportul $\frac{p}{x}$ este numit coeficient de actualizare, şi în mod normal, el trebuie să acopere rata inflaţiei, rata dobânzii şi rata de risc investiţional pentru ca proiectul să fie luat în considerare în vederea investirii în acesta:

$$a > r_p + r_d + r_i$$

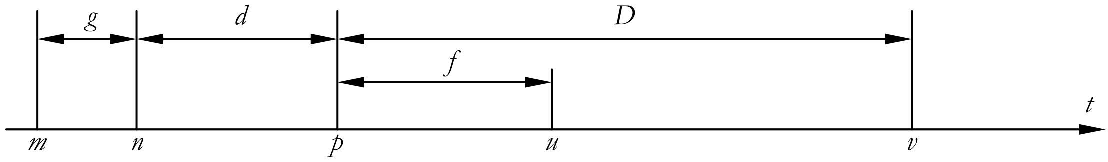
unde:

a = factorul de actualizare
r_p = rata modificării preţurilor (rata inflaţiei)
r_d = rata dobânzii pe piaţa financiară
r_i = rata de risc investiţional

Calculele de actualizare se pot efectua faţă de orice moment, totuşi este de preferat ca acest moment să fie unul dintre principalele momente din viaţă economică a obiectivului investiţional, adică:

- momentul adoptării deciziei de investiţii (*m*);
- momentul începerii lucrărilor de investiţii (*n*);
- momentul punerii în funcţiune a noului obiectiv (*p*);
- momentul începerii restituirii creditelor primite (*u*);
- momentul scoaterii din funcţiune a obiectivului în care s-a investit (*v*).

Aceste momente sunt reprezentate în figura de mai jos:



Indicatorii cel mai des utilizaţi în analiza dinamică a eficienţei investiţiilor sunt:

- investiţiile totale actualizate (I_{ta});
- profitul actualizat (P_{ta})
- randamentul economic actualizat al investiţiilor (R_a);
- termenul actualizat de recuperare a investiţiilor (T_a);

În tabelul de mai jos sunt sintetizaţi aceşti indicatori în funcţie de *momentul de referinţă* ales:

	I_{ta}	P_{ta}	R_a	T_a
m	$I_{ta}^m = \sum_{h=g+1}^{g+d} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot I_h$	$P_{ta}^m = \sum_{h=g+d+1}^{g+d+D} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$	$R_a^m = \frac{P_{ta}^m}{I_{ta}^m} - 1$	$I_{ta}^m = \sum_{h=g+d+1}^{g+d+T_a^m} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$
n	$I_{ta}^n = \sum_{h=1}^{d} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot I_h$	$P_{ta}^n = \sum_{h=d+1}^{d+D} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$	$R_a^n = \frac{P_{ta}^n}{I_{ta}^n} - 1$	$I_{ta}^n = \sum_{h=d+1}^{d+T_a^n} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$
p	$I_{ta}^p = \sum_{h=0}^{d-1} (1+a)^h \cdot I_h$	$P_{ta}^p = \sum_{h=1}^{D} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$	$R_a^p = \frac{P_{ta}^p}{I_{ta}^p} - 1$	$I_{ta}^p = \sum_{h=1}^{T_a^p} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$
u	$I_{ta}^u = \sum_{h=f}^{f+d-1} (1+a)^h \cdot I_h$	$P_{ta}^u = \sum_{h=0}^{f-1} (1+a)^h \cdot P_h + \sum_{h=1}^{D-f} \frac{1}{(1+a)^h} \cdot P_h$	$R_a^u = \frac{P_{ta}^u}{I_{ta}^u} - 1$	$I_{ta}^u = \sum_{h=0}^{T_a^u-1} (1+a)^h \cdot P_h$
v	$I_{ta}^v = \sum_{h=D}^{d+D-1} (1+a)^h \cdot I_h$	$P_{ta}^v = \sum_{h=0}^{D-1} (1+a)^h \cdot P_h$	$R_a^v = \frac{P_{ta}^v}{I_{ta}^v} - 1$	$I_{ta}^v = \sum_{h=D-T_a^v}^{D-1} (1+a)^h \cdot P_h$

Pentru aprecierea eficienţei economice a proiectelor de investiţii pot fi folosiţi şi următorii indicatori:

1. *Fluxul de numerar (cash-flow-ul)*

$$F_h = V_h - (C_h + I_h)$$

unde:

F_h = fluxul de numerar pentru anul h
V_h = venitul pe anul h
C_h = cheltuielile de producţie pe anul h
I_h = cheltuielile cu investiţiile pe anul h

2. *Venitul net actualizat (VNA)*

$$\text{VNA} = \sum_{h=1}^{d+D} \frac{V_h - I_h - C_h}{(1+a)^h}$$

unde:

d = durata de realizare a proiectului de investiţii
D = durata de funcţionare a obiectivului

3. *Rata internă de rentabilitate a investiţiei (RIR).* Este acea rată de actualizare pentru care venitul net actualizat ar fi zero:

$$0 = \sum_{h=1}^{d+D} \frac{V_h - I_h - C_h}{(1+RIR)^h}$$

4. *Cursul de revenire net actualizat* (eforturile totale actualizate, cu investiţia şi producţia, exprimate în lei, ce se fac pentru obţinerea unei unităţi valutare nete):

$$R_{na} = \frac{\sum_{h=1}^{d+D} \frac{I_h + C_h}{(1+a)^h}}{\sum_{h=1}^{d+D} \frac{V'_h - I'_h - C'_h}{(1+a)^h}}$$

unde: V'_h, I'_h şi C'_h sunt mărimile cunoscute, exprimate în valută.

5. *Pragul de rentabilitate.* Este nivelul minim de folosire a capacităţilor de producţie din proiectul analizat, exprimat procentual, de la care profitul devine pozitiv.

De asemenea, ţinând cont de multitudinea de factori care pot influenţa desfăşurarea proiectului, este utilă şi calcularea efectului acestora asupra ratei interne de rentabilitate, prin măsurarea senzitivităţii acesteia la:

- prelungirea duratei de execuţie a proiectului;
- prelungirea intervalului până la atingerea parametrilor de funcţionare proiectaţi;
- depăşirea volumului de investiţii prevăzut iniţial;
- creşterea preţurilor la materii prime, energie etc.;
- creşterea salariilor;
- modificarea preţurilor produselor finite desfăcute de firmă etc.

Una dintre cele mai importante probleme este alegerea acelor proiecte de investiţii, în limita fondurilor disponibile, care duc la obţinerea profitului maxim. În acest scop există o multitudine de modele şi tehnici, dintre care amintim:

- metode ale programării matematice;
- programarea secvenţială;

- programarea dinamică;
- analiza drumului critic;
- modele de analiză structurală a investiţiilor (modelul static şi dinamic al lui Leontief, modelul Lange, determinarea investiţiilor conexe etc.)
- modele de prognoză a investiţiilor etc.

În fine, unul din cele mai importante aspecte ale activităţii subsistemului financiar este *politica de dividend*.

Deoarece distribuirea dividendelor reprezintă pentru firmă o privare de resurse pentru finanţarea internă, apare permanent conflictul între interesele acţionarilor de a-şi mări dividendele şi interesele conducerii firmei de a utiliza o parte cât mai mare din profit pentru autofinanţare în scopul măririi puterii firmei.

Plecând de la relaţia de bază privind valoarea acţiunilor (Gordon-Shapiro):

$$V_a = \frac{\text{Dividende platite}}{\text{Rata de preferinta a investitorului - Rata de crestere a dividendului}}$$

rezultă ca plata unor dividende mari va creşte valoarea actuală a acţiunilor. Aceasta duce însă la investiţii mai mici, care duc la micşorarea viitoare a ratei de creştere aşteptată de acţionari şi în final la scăderea valorii investiţiilor.

În concluzie, valoarea dividendelor nu poate fi nici foarte mare nici foarte mică, soluţia optimă fiind acea valoare de echilibru care duce la maximizarea preţului acţiunilor.

Chiar dacă plata dividendelor pare să fie un factor de slăbire a firmei, Modigliani şi Miller au demonstrat că, în anumite condiţii de piaţă, politica de dividend nu are nici o influenţă asupra valorii firmei. În ultimă instanţă, politica de dividend nu este decât o alegere între finanţarea din surse proprii interne şi finanţarea din surse proprii externe.

Plecând de la schemele utilizate în analiza fiecărui subsistem, putem obţine, prin agregare, schema întregului sistem al firmei, reprezentată în figura 31.

SISTEMUL CIBERNETIC AL FIRMEI

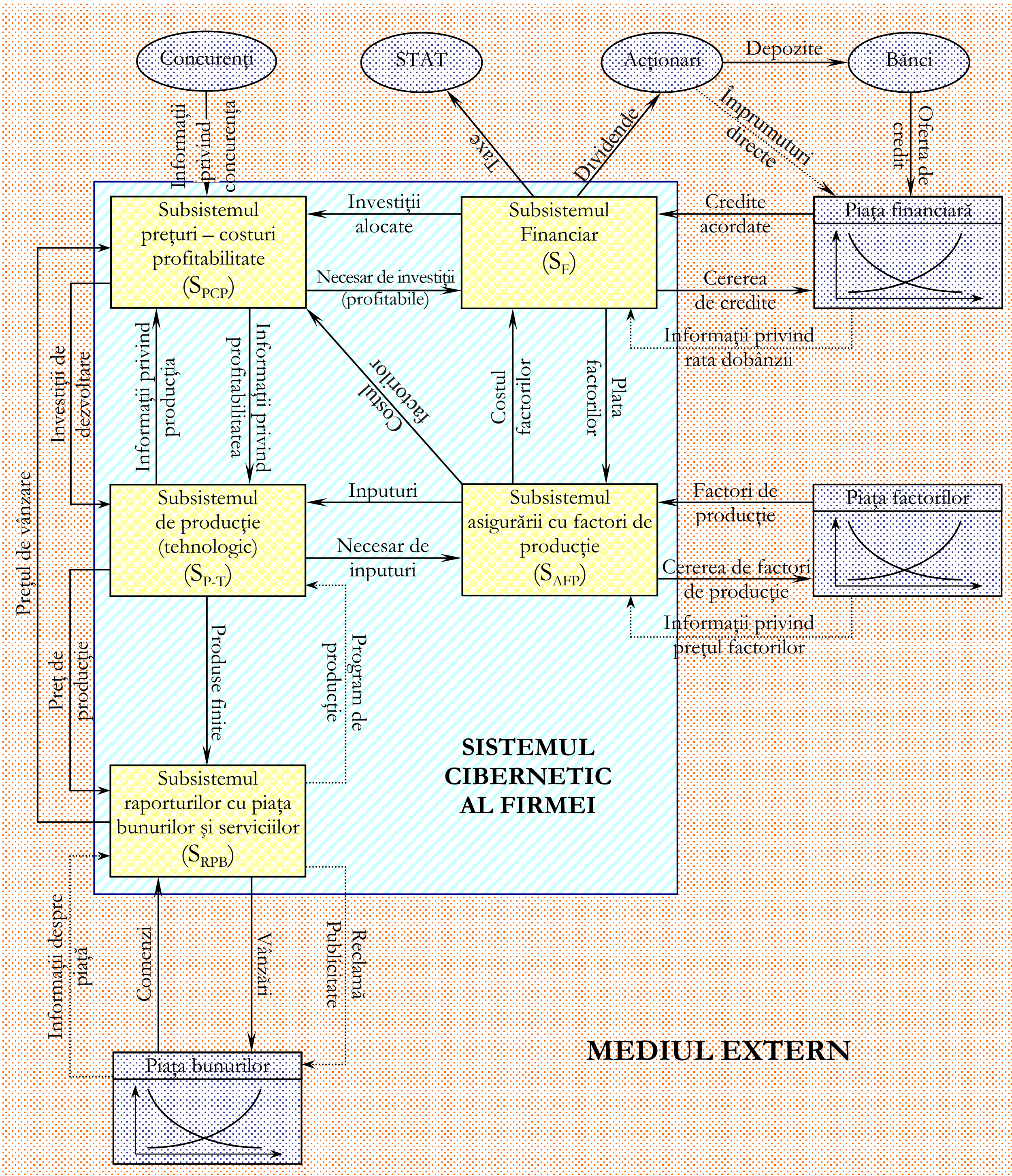


Figura 31

Modelul de mai sus reuşeşte să creeze o imagine de ansamblu asupra firmei dar nu constituie prin el însuşi o modalitate de găsire a soluţiilor optime în ceea ce priveşte deciziile firmei şi nici nu furnizează un set de reguli sau indicaţii după care firma să-şi creeze o strategie proprie de conducere a firmei. În capitolele următoare se va încerca tocmai găsirea unor modele matematice care să răspundă cerinţelor de mai sus.