Reoptimizare

Presupunem că am rezolvat o problemă de programare liniară, cunoscând pentru aceasta soluția optimă de bază $x_B = B^{-1} \cdot b$, inversa bazei B^{-1} şi tabelul simplex corespunzător soluției optime. Ne propunem să vedem, în condițiile în care se modifică unele din datele problemei, ce anume din rezolvarea fostei probleme mai poate fi folosit la rezolvarea noii probleme, în încercarea de a rezolva noua problemă într-un timp mai scurt decât cel necesar rezolvării acesteia de la zero, cu algoritmul simplex. Acest deziderat corespunde ideii de a folosi experiența anterioară. De asemenea, ne propunem să vedem ce influență au diferitele tipuri de modificări ale datelor problemei asupra soluțiilor, atât din punct de vedere matematic cât şi economic.

Datele problemei sunt constituite din:

- coeficienții funcției obiectiv = componentele vectorului c
- termenii liberi ai restricțiilor = componentele vectorului b
- coeficienții variabilelor din restricții = elementele matricii A

O modificare poate afecta toate cele trei grupe.

Vom analiza efectele modificărilor începând de la cazurile cele mai simple:

Cazul 1. **Dacă se modifică doar elementele vectorului** $c \to c'$

Deoarece matricea A şi vectorul b rămân aceleaşi, avem acelaşi sistem de restricții şi deci aceeaşi mulțime de soluții admisibile. Soluția optimă a fostei probleme, fiind în particular soluție de bază admisibilă a sistemului de restricții, va fi soluție admisibilă de bază şi în noua problemă. Dispunem deci de o soluție inițială admisibilă de bază şi, deci, putem aplica algoritmul simplex primal direct de la faza a doua. Se construieşte tabelul simplex corespunzător soluției, în problema modificată:

			c'_B	c'_S
c'_B	x_B	x_B	x_B	x_S
		$B^{-1} \cdot b$	I_m	$B^{-1} \cdot S$
		$c'_B \cdot B^{-1} \cdot b$	0	Δ'_j

care este de fapt fostul tabel, în care se recalculează Δ'_j. Avem două cazuri:

a) Dacă toți $\Delta'_j = z'_j - c' = c'_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - c' \geq 0$, soluția este optimă;

b) Dacă există un $\Delta'_j < 0$, se aplică în continuare algoritmul simplex primal, până la găsirea soluției optime.

Exemplu: Pentru problema:

$$(\max) f = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_2 + 2x_3 \leq 5 \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

F.S.

$$(\max) f = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - Ma_1 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ x_2 + x_3 - s_2 + a_1 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + s_3 = 5 \end{cases} \qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_1 \geq 0$$

obținem în final următorul tabel simplex:

			3	-1	2	0	0	0	-M
c'_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
3	x_1	3	1	0	0	1	1	2	-2
2	x_3	2	0	0	1	0	1	1	-1
-1	x_2	1	0	1	0	0	-1	-2	2
		12	0	0	0	3	6	10	M - 10

1. Dacă noua funcție obiectiv este $f' = x_1 - 2x_2 + 5x_3$ atunci tabelul corespunzător va fi:

			1	-2	5	0	0	0	-M
c'_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
1	x_1	3	1	0	0	1	1	2	-2
5	x_3	2	0	0	1	0	1	1	-1
-2	x_2	1	0	1	0	0	-1	-2	2
		11	0	0	0	1	8	11	M - 11

toți $\Delta'_j \geq 0$, ne aflăm în cazul a) şi soluția care dădea optimul fostei probleme este soluția optimă şi în noua problemă.

2. Dacă noua funcție obiectiv este $f'' = x_1 + 3x_2 - 2x_3$ atunci tabelul corespunzător va fi:

			1	3	-2	0	0	0	-M
c'_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
1	x_1	3	1	0	0	1	1	2	-2
-2	x_3	2	0	0	1	0	1	1	-1
3	x_2	1	0	1	0	0	-1	-2	2
		2	0	0	0	1	-4	-6	M + 6

există $\Delta'_j < 0$ (de exemplu $\Delta_{s_2} = -4$), ne aflăm în cazul b) şi soluția care dădea optimul fostei probleme nu este optimă şi în noua problemă, pentru găsirea celei optime (dacă există!) trebuind să aplicăm în continuare algoritmul simplex primal.

Cazul 2 Dacă se modifică doar componentele vectorului **b** $\rightarrow$ **b'**

Deoarece matricea A rămâne aceeaşi, fosta bază rămâne bază şi în noua problemă. Soluția corespunzătoare va fi: $x'_B = B^{-1} \cdot b'$ iar $\Delta'_j = c_B \cdot B^{-1} \cdot a_j - c_j = \Delta_j$. În concluzie, noua soluție ar putea sau nu să aibă toate componentele pozitive (după cum este noul b'), dar sigur toți Δ_j rămân pozitivi (fiind aceeaşi cu cei ai soluției fostei probleme, care era optimă), deci soluția este cel puțin dual admisibilă de bază. Vom avea două cazuri:

a) Dacă $x'_B \geq 0$ atunci soluția este şi primal admisibilă, deci este soluția optimă a noii probleme;
b) Dacă x'_B are cel puțin o componentă negativă atunci soluția este doar dual admisibilă de bază şi vom continua cu algoritmul simplex dual pentru găsirea celei optime (dacă ea există!).

Exemplu Pentru problema:

$$(\max) f = -4x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 17 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 14 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 \ge -15 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

F.S.

$$(\max) f = -4x_1 - x_2 + 2x_3 - Ma_1$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + s_1 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - s_2 + a_1 = 14 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + s_3 = 15 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \ge 0$$

obținem în final următorul tabel simplex:

			-4	-1	2	0	0	0	-M
c'_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
0	s_1	22	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	s_2	11	$-\frac{11}{3}$	$\frac{22}{3}$	0	0	1	$\frac{5}{3}$	-1
2	x_3	5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
		10	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	M

din care obținem inversa bazei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ca fiind $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

1. Dacă noul vector al termenilor liberi, din problema la forma standard, ar fi $b' = (2, 5, 6)^T$ atunci tabelul corespunzător ar fi:

			-4	-1	2	0	0	0	-M
c_B	x_B	x'_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
0	s_1	4	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	s_2	5	$-\frac{11}{3}$	$\frac{22}{3}$	0	0	1	$\frac{5}{3}$	-1
2	x_3	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
		4	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	M

toate componentele soluției ar fi pozitive, ne-am afla în cazul a) şi soluția găsită ar fi soluția optimă în noua problemă.

2. Dacă noul vector al termenilor liberi din problema la forma standard ar fi $b' = (5, 6, 3)^T$ atunci tabelul corespunzător ar fi:

			-4	-1	2	0	0	0	-M
c_B	x_B	x'_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
0	s_1	6	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	s_2	-1	$-\frac{11}{3}$	$\frac{22}{3}$	0	0	1	$\frac{5}{3}$	-1
2	x_3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0
		2	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	M

ar exista componente ale soluţiei strict negative (de exemplu $x_3 = -1$), ne-am afla în cazul b), soluţia nu ar fi primal admisibilă şi, pentru găsirea celei optime, (dacă există!) vom aplica în continuare algoritmul simplex dual.

Cazul 3. Dacă apar k variabile suplimentare, cu coeficienţii corespunzători, în funcţia obiectiv şi în restricţii.

Această modificare are ca efect adăugarea a k coloane la matricea A şi a k elemente la vectorul c, numărul de restricţii (şi deci de linii ale matricii A şi de elemente ale vectorului b) rămânând acelaşi.

Deoarece, în momentul ajungerii la soluţia optimă, în sistem se află doar restricţii independente între ele, rangul matricii este egal cu numărul de linii (care este mai mic decât numărul de coloane) şi, din acest motiv, adăugarea oricâtor coloane nu îl va modifica. Baza fostei matrici rămâne deci bază şi în noua matrice, soluţia $x_B = B^{-1}\cdot b \geq 0$ rămâne soluţie de bază a noului sistem de restricţii (B şi b fiind aceeaşi), deci este şi o soluţie de bază primal admisibilă a noii probleme. Tabelul corespunzător acestei baze, în noua problemă, este cel anterior, la care se adaugă k coloane astfel:

- pe linia variabilelor se adaugă noile variabile;
- pe linia coeficienţilor funcţiei obiectiv se adaugă coeficienţii corespunzători noilor variabile;
- în interiorul tabelului, sub fiecare variabilă nou introdusă, se adaugă coloana $B^{-1}\cdot a_k$, unde a_k este vectorul coloană format din coeficienţii variabilei x_k, nou introduse în restricţiile problemei;
- Δ_k, corespunzători noilor variabile, se calculează cu formula cunoscută: $\Delta_k = c_B^T\cdot B^{-1}\cdot a_k - c_k$.

Vom avea două cazuri:

a) Dacă toţi Δ_k sunt pozitivi, soluţia optimă a fostei probleme este soluţie optimă şi pentru noua problemă;
b) Dacă există un indice k, pentru care $\Delta_k < 0$, atunci soluţia este doar primal admisibilă şi vom aplica în continuare algoritmul simplex primal, pentru găsirea soluţiei optime (dacă ea există!)

Exemplu Fie problema:

F.S.

$$(\max) f = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \qquad\qquad (\max) f = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - Ma_1$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 - x_3 \geq 36 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 - x_3 - s_1 + a_1 = 36 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + s_2 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

pentru care obținem tabelul simplex final:

			3	4	-2	0	0	0	-M
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
4	x_2	4	0	1	0	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
3	x_1	1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
-2	x_3	2	0	0	1	0	1	-1	0
		15	0	0	0	$\frac{1}{3}$	4	2	$M-\frac{1}{3}$

de unde găsim inversa bazei B = $\begin{pmatrix} 7 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ca fiind B^{-1} = $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Dacă introducem, în plus, variabilele x_4, x_5 şi x_6, obținând problema la forma standard:

$$(\max) f = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 20x_5 - x_6 - Ma_1$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + 3x_6 - s_1 + a_1 = 36 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 + 2x_6 + s_2 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 - x_6 + s_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

vom obține tabelul corespunzător bazei B, în noua problemă, prin:

- adăugarea variabilelor x_4, x_5, x_6 la linia variabilelor;
- adăugarea coeficienților 2, -20, -1 corespunzători acestor variabile la linia coeficienților funcției obiectiv;
- adăugarea coloanelor:

$$a_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$a_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{28}{3} \\ \frac{19}{3} \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$a_6 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

– adăugăm:
  - $\Delta_4 = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot a_4 - c_4 = 1$
  - $\Delta_5 = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot a_5 - c_5 = \frac{11}{3}$
  - $\Delta_6 = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot a_6 - c_6 = \frac{17}{3}$

şi, final, obţinem tabelul:

			3	4	-2	2	-20	-1	0	0	0	-M
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	a_1
4	x_2	4	0	1	0	5	$-\frac{28}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
3	x_1	1	1	0	0	-3	$\frac{19}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
-2	x_3	2	0	0	1	4	-1	3	0	1	-1	0
		15	0	0	0	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{1}{3}$	4	2	$M-\frac{1}{3}$

Se observă că toţi Δ_j sunt pozitivi, deci soluţia este optimă.

2. Dacă, pentru aceeaşi modificare, alegem coeficientul lui x_5 egal cu –10, în loc de –20, în tabel se va modifica doar Δ_5, care va avea valoarea $-\frac{19}{3}$ şi ne vom afla în cazul b) (deoarece $\Delta_5 < 0$); vom continua căutarea soluţiei optime cu algoritmul simplex primal.

Cazul 4. Dacă se adaugă o restricţie

Efectul este adăugarea unei linii la matricea A şi a unui element la vectorul b.

Se verifică dacă fosta soluţie de optim verifică noua restricţie. Dacă o verifică, ea este soluţia de optim şi a noii probleme. Dacă nu o verifică, vom căuta în continuare noua soluţie de optim (dacă ea există!).

Deoarece rangul matricii A era egal cu numărul de linii (care era mai mic decât numărul de coloane), prin adăugarea unei linii rangul noii matrici va fi cu 1 mai mare (dacă nu s-ar întâmpla aşa ar rezulta că noua restricție este o combinație a celor anterioare şi, deci, nu are nici un efect asupra mulțimii soluțiilor, putând fi eliminată din sistem, noua problemă fiind de fapt aceeaşi cu fosta problemă, care e deja rezolvată).

În acest caz, fosta bază nu mai este bază în noua matrice, ci doar un minor cu determinantul diferit de zero, de dimensiune cu 1 mai mică decât rangul matricii. Pentru a obține baza noii probleme vom borda fosta bază cu noua linie şi o coloană.

Din ultimul tabel simplex al fostei probleme, putem scrie fostul sistem la forma:

$$x_B + B^{-1}\cdot S\cdot x_S = B^{-1}\cdot b = x_B$$

de unde scoatem variabilele principale în funcție de cele secundare, le înlocuim în noua restricție şi apoi aranjăm ca termenul liber b_{m+1} obținut să fie pozitiv (înmulțind eventual restricția cu –1). Adăugăm noua restricție, sub forma obținută, la sistemul inițial, scris sub forma corespunzătoare ultimului tabel simplex. Avem trei cazuri:

a) Dacă restricția este de tipul "≤", introducem variabila de abatere s, care va avea coeficientul +1 şi baza va fi formată din coloanele corespunzătoare fostelor variabile principale, plus coloana variabilei s, obținând matricea unitate. Tabelul corespunzător în noua problemă va fi fostul tabel, la care se adaugă:

   – o linie în plus, pe care: $c_s = 0$ în coloana coeficienților din funcția obiectiv ai variabilelor din baza, s în coloana variabilelor bazei, b_{m+1} în coloana soluției de bază, coeficienții noii restricții (adusă la ultima formă) în interiorul tabelului şi 1 in dreptul noii variabile s.
   – o coloană în plus corespunzătoare lui s, care va fi vector unitar.

   În acest caz, noii Δ_j vor fi foştii Δ_j (deoarece $c_s = 0$), la care se adaugă cel corespunzător lui s (egal cu 0, deoarece s este din bază). Soluția are toate componentele pozitive şi toți Δ_j pozitivi, deci este soluția optimă căutată.

b) Dacă restricția este de tipul "≥" variabila de abatere va avea coeficientul –1 şi soluția corespunzătoare este doar dual admisibilă (deoarece $s = -b_{m+1} < 0$); vom continua căutarea soluției optime cu algoritmul simplex dual.

c) Dacă restricția este cu "=", se introduce variabila artificială a, cu $c_a = -M$, se construieşte tabelul asociat ca la cazul a) şi se obține o soluție admisibilă (deoarece $a = b_{m+1} \geq 0$), cu Δ_j depinzând de M (deoarece $c_a = -M$). Se continuă cu algoritmul simplex primal.

Exemplu Fie problema:

F.S.

$$(\max) f = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad\qquad (\max) f = x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 18 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + s_1 = 9 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 - s_2 + a_1 = 18 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + s_3 = 18 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

pentru care obținem tabelul final:

			1	-3	2	0	0	0	-M
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
0	s_2	54	0	11	0	2	1	3	-1
2	x_3	99	0	22	1	3	0	4	0
1	x_1	27	1	6	0	1	0	1	0
		225	0	53	0	7	0	9	M

din care putem scrie sistemul de restricţii sub forma:

$$\begin{cases} s_2 + 11x_2 + 2s_1 + s_3 = 54 \\ x_3 + 22x_2 + 3s_1 + 4s_3 = 99 \\ x_1 + 6x_2 + s_1 + s_3 = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_2 = 54 - 11x_2 - 2s_1 - s_3 \\ x_3 = 99 - 22x_2 - 3s_1 - 4s_3 \\ x_1 = 27 - 6x_2 - s_1 - s_3 \end{cases}$$

1. Dacă noua restricţie ar fi $2x_1 + x_2 - x_3 \le 7$ atunci soluţia de optim ($x_1 = 27$, $x_2 = 0$, $x_3 = 99$) ar verifica noua restricţie şi ar fi soluţie de optim şi pentru noua problemă.

2. Dacă noua restricţie ar fi $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$ ea nu ar fi verificată de fosta soluţie de optim. Înlocuind în această restricţie s_2, x_1 şi x_3, cu expresiile obţinute în sistemul de mai sus, rezultă:

$$3\cdot(27 - 6x_2 - s_1 - s_3) + 2x_2 + (99 - 22x_2 - 3s_1 - 4s_3) \le 8$$
$$\Leftrightarrow -38x_2 - 6s_1 - 7s_3 \le -172 \Leftrightarrow 38x_2 + 6s_1 + 7s_3 \ge 172$$
$$\Leftrightarrow 38x_2 + 6s_1 + 7s_3 - s = 172$$

şi sistemul: $\begin{cases} s_2 + 11x_2 + 2s_1 + s_3 = 54 \\ x_3 + 22x_2 + 3s_1 + 4s_3 = 99 \\ x_1 + 6x_2 + s_1 + s_3 = 27 \\ 38x_2 + 6s_1 + 7s_3 - s = 172 \end{cases}$ iar în final, tabelul:

			1	-3	2	0	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s
0	s_2	54	0	11	0	2	1	3	0
2	x_3	99	0	22	1	3	0	4	0
1	x_1	27	1	6	0	1	0	1	0
0	s	-172	0	38	0	6	0	7	1
		225	0	53	0	7	0	9	0

în care soluţia de bază este dual admisibilă. Se continuă rezolvarea problemei cu algoritmul simplex dual.

3. Dacă noua restricţie ar fi $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ ea nu ar fi verificată de fosta soluţie. Prin înlocuirea lui x_1 şi x_3 obţinem:

$$(27 - 6x_2 - s_1 - s_3) + x_2 + (99 - 22x_2 - 3s_1 - 4s_3) = 100$$
$$\Leftrightarrow -27x_2 - 4s_1 - 5s_3 = -26 \Leftrightarrow 27x_2 + 4s_1 + 5s_3 = 26$$
$$\Leftrightarrow 27x_2 + 4s_1 + 5s_3 + a = 26$$

rezultă sistemul: $\begin{cases} s_2 + 11x_2 + 2s_1 + s_3 = 54 \\ x_3 + 22x_2 + 3s_1 + 4s_3 = 99 \\ x_1 + 6x_2 + s_1 + s_3 = 27 \\ 27x_2 + 4s_1 + 5s_3 + a = 26 \end{cases}$ iar în final, tabelul:

			1	-3	2	0	0	0	-M
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a
0	s_2	54	0	11	0	2	1	3	0
2	x_3	99	0	22	1	3	0	4	0
1	x_1	27	1	6	0	1	0	1	0
-M	a	26	0	27	0	4	0	5	1
		-26M + 225	0	-27M + 53	0	-4M + 7	0	-5M + 9	0

în care soluția de bază este primal admisibilă. Se continuă rezolvarea problemei cu algoritmul simplex primal.

Cazul 5. Dacă se modifică coeficienții unei variabile x_j

Efectul este modificarea coloanei $a_j \to a'_j$ din A şi/sau a coeficientului $c_j \to c'_j$ din funcția obiectiv. Avem două variante:

Cazul 5.1 Coloana a_j nu face parte din B. În acest caz fosta bază B rămâne bază şi în noua problemă, soluția corespunzătoare este aceeaşi: $x_B = B^{-1}\cdot b$ şi tabelul corespunzător este fostul tabel, în care se modifică doar coloana corespunzătoare variabile x_j:

$c_j \to c'_j$, $B^{-1}\cdot a_j \to B^{-1}\cdot a'_j$, $\Delta_j \to \Delta'_j = c_B \cdot B^{-1} \cdot a'_j - c'_j$

Avem două cazuri:

- Dacă $\Delta'_j \geq 0$ fosta soluție optimă rămâne optimă şi în noua problemă.
- Dacă $\Delta'_j < 0$ fosta soluție optimă este doar primal admisibilă şi se va continua rezolvarea problemei cu algoritmul simplex primal.

Exemplu Fie problema:

F.S.

$$(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad\qquad (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - x_3 - s_1 + a_1 = 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + s_2 = 15 \\ -4x_1 + 5x_2 - x_3 + s_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

După rezolvare, se obține tabelul simplex final de mai jos, din care se găseşte inversa bazei

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ca fiind } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

c_B	x_B	x_B	2 x_1	3 x_2	4 x_3	0 s_1	0 s_2	0 s_3	-M a_1
2	x_1	10	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	s_1	90	0	0	15	1	5	6	-1
3	x_2	9	0	1	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
		47	0	0	2	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{14}{5}$	M

1. Dacă se modifică coeficienții variabilei x_3, problema devenind:

$$(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad \qquad \text{F.S.} \quad (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 - s_1 + a_1 = 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 3x_3 + s_2 = 15 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + s_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad \qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

noua coloană corespunzătoare lui x_3 va fi $a'_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ iar $\Delta'_3 = -\frac{19}{5} < 0$, deci ne aflăm în cazul b) şi vom continua rezolvarea problemei cu algoritmul simplex primal, de la tabelul:

c_B	x_B	x_B	2 x_1	3 x_2	2 x_3	0 s_1	0 s_2	0 s_3	-M a_1
2	x_1	10	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	s_1	90	0	0	-1	1	5	6	-1
3	x_2	9	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
		47	0	0	$-\frac{19}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{14}{5}$	M

2. Dacă se modifică coeficienții variabilei x_3, problema devenind:

$$(\max) f = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \qquad \qquad \text{F.S.} \quad (\max) f = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 5x_3 \leq 15 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 - s_1 + a_1 = 15 \\ 6x_1 - 5x_2 + 5x_3 + s_2 = 15 \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + s_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad \qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

noua coloană corespunzătoare lui x_3 va fi $a'_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 16 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ iar $\Delta'_3 = \frac{42}{5} < 0$, deci ne aflăm în cazul a) cu fosta soluție optimă şi pentru noua problemă, tabelul final fiind:

			2	3	-3	0	0	0	-M
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
2	x_1	10	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	s_1	90	0	0	16	1	5	6	-1
3	x_2	9	0	1	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
		47	0	0	$\frac{42}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{14}{5}$	M

Cazul 5.2 Coloana a_j face parte din baza B. În acest caz fosta bază nu mai există în noua matrice A. Noul minor B', obținut prin înlocuirea lui a_j cu a'_j în B, poate fi:

- neinversabil (det B' = 0) caz în care trebuie căutată altă bază;
- inversabil, soluția corespunzătoare $x_{B'} = (B')^{-1} \cdot b$ putându-se în următoarele situații:
  - are toate componentele pozitive ($x_{B'} \geq 0$), deci este primal admisibilă şi putem aplica în continuare algoritmul simplex primal;
  - are componente strict negative, dar are toți Δ_j pozitivi, deci este dual admisibilă şi putem aplica în continuare algoritmul simplex dual;
  - are componente strict negative şi există Δ_j strict negativi, deci nu este nici primal nici dual admisibilă şi trebuie căutată altă bază.

Se observă că există variante când trebuie căutate alte baze şi, chiar în cazurile când putem folosi noua bază, avem de făcut calcule laborioase (inversarea lui B', calculul produselor $B^{-1} \cdot b$ şi $B^{-1} \cdot A$ şi calculul noilor Δ_j). Din acest motiv vom aplica următorul procedeu (fără a mai verifica posibilitatea existenței unui caz favorabil de mai sus):

pasul 1. Se scriu în noua problemă (adusă la forma canonică) toți termenii cu variabila x_j ca o sumă de doi termeni, unul având coeficient fostul coeficient al variabilei x_j iar celălalt diferența dintre aceştia:

$$c'_j \cdot x_j = c_j \cdot x_j + (c'_j - c_j) \cdot x_j$$
$$a'_{ij} \cdot x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j + (a'_{ij} - a_{ij}) \cdot x_j$$

pasul 2. Se înlocuieşte în toți termenii de forma $(c'_j - c_j) \cdot x_j$ şi $(a'_{ij} - a_{ij}) \cdot x_j$, variabila x_j cu o nouă variabilă y şi se adaugă la sistem restricția $x_j = y$, obținându-se o problemă echivalentă.

pasul 3. Pentru noua problemă, se aplică procedeul de la **cazul 4** pentru varianta c), obținându-se o soluție de bază admisibilă cu care se continuă cu algoritmul simplex primal.

Exemplu După rezolvarea problemei:

F.S.

$$(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \qquad\qquad (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

se obţine soluţia optimă şi tabelul pentru baza corespunzătoare variabilelor (x_1, x_3, s_3), în care (x_1 = 2, x_3 = 2, s_3 = 0) şi tabelul:

			2	3	5	0	0	0
c_B	x_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
2	x_1	2	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0
5	x_3	2	0	$\frac{5}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0
0	s_3	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1
		14	0	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{11}{7}$	0

B şi B^{-1} fiind date mai jos:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă presupunem că se modifică coeficienţii variabilei x_3, noua problemă fiind:

F.S.

$$(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad\qquad (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

deoarece x_3 face parte din bază, vom face transformarea:

F.S.

$$(\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad\qquad (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3y$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - y + s_1 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2y + s_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 6 \\ x_3 = y \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, y \ge 0$$

Din primele trei ecuații scoatem variabilele fostei baze (x_1, x_3, s_3) în funcție de celelalte, înmulțind sistemul cu B^{-1}. Coeficienții fostelor variabile se iau din ultimul tabel iar ai lui y se calculează înmulțind coloana coeficienților lui cu B^{-1}. Avem:

$$B^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0\\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0\\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\ -\frac{5}{7}\\ \frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

deci sistemul va avea forma:
$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{7}x_2+\frac{1}{7}y+\frac{3}{7}s_1-\frac{2}{7}s_2=2\\ \frac{5}{7}x_2+x_3-\frac{5}{7}y-\frac{1}{7}s_1+\frac{3}{7}s_2=2\\ \frac{4}{7}x_2+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}s_1+\frac{1}{7}s_2+s_3=0\\ x_3=y\end{cases}$$

Din primele trei ecuații se scot variabilele bazei în funcție de celelalte:

$$\begin{cases} x_1=2+\frac{1}{7}x_2-\frac{1}{7}y-\frac{3}{7}s_1+\frac{2}{7}s_2\\ x_3=2-\frac{5}{7}x_2+\frac{5}{7}y+\frac{1}{7}s_1-\frac{3}{7}s_2\\ s_3=-\frac{4}{7}x_2-\frac{3}{7}y+\frac{5}{7}s_1-\frac{1}{7}s_2\end{cases}$$

apoi se înlocuiesc în ultima ecuație: $2-\frac{5}{7}x_2+\frac{5}{7}y+\frac{1}{7}s_1-\frac{3}{7}s_2=y \Leftrightarrow \frac{5}{7}x_2+\frac{2}{7}y-\frac{1}{7}s_1+\frac{3}{7}s_2=2$
în care se adaugă variabila de abatere a şi se adaugă la sistem. Se obține în final problema:

$$(\max) f = 2x_1+3x_2+5x_3-3y$$
$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{7}x_2+\frac{1}{7}y+\frac{3}{7}s_1-\frac{2}{7}s_2=2\\ \frac{5}{7}x_2+x_3-\frac{5}{7}y-\frac{1}{7}s_1+\frac{3}{7}s_2=2\\ \frac{4}{7}x_2+\frac{3}{7}y-\frac{5}{7}s_1+\frac{1}{7}s_2+s_3=0\\ \frac{5}{7}x_2+\frac{2}{7}y-\frac{1}{7}s_1+\frac{3}{7}s_2+a=2\end{cases}$$

Tabelul corespunzător va fi:

			2	3	5	-3	0	0	0	-M
c_B	x_B	$\bar{x}_B$	x_1	x_2	x_3	y	s_1	s_2	s_3	a
2	x_1	2	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	0
5	x_3	2	0	$\frac{5}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0
0	s_3	0	0	$\frac{4}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	0
-M	a	2	0	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1
		14-2M	0	$\frac{2}{7}-\frac{5}{7}M$	0	$-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}M$	$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}M$	$\frac{11}{7}-\frac{3}{7}M$	0	0

în care soluția de bază este admisibilă şi vom continua rezolvarea cu algoritmul simplex primal.

Din punct de vedere economic, situațiile de mai sus pot fi foarte bine exemplificate pe cazul unei întreprinderi care fabrică n produse folosind m materii prime şi doreşte găsirea acelor cantități ce trebuie fabricate din fiecare produs astfel încât să obțină profitul total maxim.

În acest caz coeficienții problemei vor fi:

- c_j = profiturile unitare obținute prin vânzarea celor n produse.
- b_i = disponibilurile din cele m materii prime.
- a_{ij} = coeficienții tehnologici.

1. Modificarea coeficienților funcției obiectiv poate însemna fie o reevaluare a profiturilor unitare, fie pur şi simplu schimbarea obiectivului propus (de exemplu maximizarea veniturilor sau minimizarea cheltuielilor în loc de maximizarea profitului, caz în care c_i ar avea alte semnificații (venit unitar, cost unitar) şi deci cu totul alte valori).
2. Modificarea termenilor liberi poate însemna modificarea posibilităților de procurare a materiilor prime prin pierderea unor furnizori sau realizarea de contracte cu noi furnizori.
3. Apariția de coloane în plus înseamnă lărgirea gamei de produse.
4. Apariția de noi restricții poate înseamnă existența unei resurse care nu fusese luată în considerare până acum, deoarece limitele datorate acesteia erau suficient de largi pentru a nu influența soluția, în urma modificării acestor limite ele putând modifica soluția.
5. Modificarea coloanelor poate însemna fie schimbarea gamei sortimentale, fie schimbarea tehnologiei de fabricație.