SOLUȚII

PROGRAMARE LINIARĂ

Notă: Toate problemele au fost rezolvate folosind fiecare din următoarele programe utilitare:

QM, Scientific WorkPlace, WinQSB şi MATLAB

Pentru eventualele erori sau nelămuriri scrieți la e-mail: dorinm@ase.ro

Problema 1.

a) Modelul matematic asociat este problema de programare liniară:

$$\max(x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 4800 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq & 3600 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

iar bazei corespunzătoare variabilelor x_2 şi x_3 îi corespunde soluția de bază admisibilă:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4800 \\ 3600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 1560 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Deoarece vectorul Δ asociat acestei baze este:

$$\Delta_B = \left(\frac{9}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{10}\right)$$

rezultă că această soluție de bază este chiar soluție optimă. Soluția optimă este unică, deoarece este nedegenerată şi singurele componente ale vectorului Δ_B egale cu 0 sunt doar cele corespunzătoare bazei. În concluzie, pentru a se obține profitul maxim se vor fabrica 120 de bunuri de tipul B_2, 1560 bunuri de tipul B_3 şi nici un produs de tipul B_1. În acest caz, profitul obținut va fi $P_{max} = c_B^T \cdot x_B = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 1560 \end{pmatrix} = 4920$ u.m.

b) pentru ca baza curentă să fie realizabilă este necesar ca soluția de bază corespunzătoare să fie admisibilă ($x_B \geq 0$). În concluzie, o modificare a disponibilului maşinii M_2:

$$3600 \to 3600 + y$$

va păstra baza realizabilă doar dacă:

$$x_B(y) = B^{-1}\begin{pmatrix} 4800 \\ 3600 + y \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4800 \\ 3600 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 + \frac{3}{10}y \\ 1560 - \frac{1}{10}y \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 120 + \frac{3}{10}y & \geq & 0 \\ 1560 - \frac{1}{10}y & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in [-400, 15600]$$

deci disponibilul maşinii M_2 poate varia în intervalul [3200, 19200].

c) dacă $\tilde{c}$ =(3,2,2) baza curentă rămâne admisibilă (deoarece nu se modifică soluția asociată) dar nu mai este optimă deoarece noul vector $\tilde{\Delta}$ devine $\left(-\frac{3}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{5}\right)$ şi conține şi componente strict negative. Putem folosi totuşi baza actuală deoarece este admisibilă şi putem demara algoritmul simplex de la aceasta. Tabelul simplex asociat este:

3	2	2	0	0	

c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_2	120	$\boxed{\frac{4}{5}}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{2}$
2	x_3	1560	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	5
		3360	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	

Intră în bază x_1 (corespunzătoare unicului Δ_j negativ şi iese din bază x_2 corespunzătoare lui θ minim, rezultând noua soluţie optimă şi noul tabel:

			3	2	2	0	0
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	150	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
2	x_3	1500	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
		3450	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

De asemenea, şi în acest caz soluţia este unica optimă.

d) soluţia corespunzătoare bazei actuale va fi:

$$x_B(b') = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

şi nu este admisibilă. Totuşi, ea este dual admisibilă deoarece vectorul Δ nu se modifică. Din acest motiv, putem aplica algoritmul simplex dual pornind de la această soluţie. Tabelul corespunzător este:

			1	2	3	0	0
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_2	–100	$\frac{4}{5}$	1	0	$\boxed{-\frac{1}{5}}$	$\frac{3}{10}$
3	x_3	1700	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$
		4900	$\frac{9}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$

Va ieşi din bază variabila x_2 (singura negativă) şi intră în baza variabila x_4 (singura corespunzătoare unei poziţii negative pe linia lui x_2) rezultând noua soluţie şi noul tabel:

			1	2	3	0	0
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	500	-4	-5	0	1	$-\frac{3}{2}$
3	x_3	1500	2	2	1	0	$\frac{1}{2}$
		4500	5	4	0	0	$\frac{3}{2}$

După cum se observă, această soluţie este optimă (şi unica optimă).

e) Iese din bază variabila corespunzătoare lui θ minim. Justificarea acestei alegeri rezultă din observaţia că numai pentru această alegere nouă soluţie de bază rămâne admisibilă (cu toate componentele pozitive).

Problema 2.

Notăm cu x_{ij} cantitatea în tone de cahle de tipul i pe care îl va produce fabrica j, conform tabelului:

	Fabrica	Chitila	Colentina	Periş
Cahle	j / i	1	2	3
mici	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
mijlocii	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
mari	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

Condiţiile impuse se pot traduce matematic prin restricţiile:

$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}}{500} = \frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}}{600} = \frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{300}$ (încărcare uniformă a fabricilor)

$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31} \le 500 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} \le 600 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} \le 300 \end{array}\right\}$ fabricile nu pot produce mai mult decât producţia maximă posibilă

$\left.\begin{array}{l} 1{,}44x_{11}+2{,}25x_{21}+4x_{31} \le 810 \\ 1{,}44x_{12}+2{,}25x_{22}+4x_{32} \le 720 \\ 1{,}44x_{13}+2{,}25x_{23}+4x_{33} \le 315 \end{array}\right\}$ fabricile nu pot stoca mai mult decât capacitatea maximă de stocare

$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 500 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 800 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 600 \end{array}\right\}$ nu are rost să se producă mai mult decât s-a estimat că se poate vinde

$x_{ij} \ge 0$ toate variabilele reprezintă *cantităţi* de cahle.

Obiectivul este maximizarea profitului, exprimat prin funcţia liniară:

$(\max)P = 90(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 100(x_{21}+x_{22}+x_{23}) + 120(x_{31}+x_{32}+x_{33})$

Se obţine o problemă de programare liniară cu 9 variabile, 2 restricţii de tip egalitate şi 9 restricţii de tip "≤". După rezolvarea problemei se obţine unica soluţie optimă (exactă):

	Chitila	Colentina	Periş
mici	0	$296\frac{8}{27}$	$203\frac{19}{27}$
mijlocii	$349\frac{53}{63}$	$130\frac{10}{27}$	$9\frac{17}{27}$
mari	$5\frac{5}{7}$	0	0

prin care se obţine profitul maxim $P = 94669\frac{5}{6}$ u.m.

Problema 3

Notăm cu x_{ij} cantitatea în tone din componenta de tipul i care va fi folosită la obţinerea tipului de benzină j, conform tabelului:

	Benzina	CO98	CO90	CO75
Componenta	j / i	1	2	3
CT	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}

RG	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
RC	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}
NC5	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}

Condițiile impuse se pot traduce matematic prin restricțiile:

$x_{11} \leq 0.3(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$
$x_{21} \geq 0.4(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$
$x_{31} \leq 0.5(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$
$x_{12} \leq 0.5(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42})$
$x_{22} \geq 0.1(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42})$
$x_{31} \leq 0.7(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43})$
$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 3000$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2000$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 4000$
$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1000$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 3000$
$x_{ij} \geq 0$

Obiectivul este maximizarea profitului, exprimat matematic prin funcția:

$8.5(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 7(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + 6(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) - 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 8(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 6(x_{31} + x_{32} + x_{33}) - 7(x_{41} + x_{42} + x_{43})$

Prin rezolvarea problemei de programare liniară cu 11 necunoscute şi 12 variabile rezultată, obținem soluția optimă dată în tabelul de mai jos:

	CO98	CO90	CO75
CT	$\frac{1400}{3}$	$\frac{2000}{3}$	$\frac{5600}{3}$
RG	$\frac{5600}{3}$	$\frac{400}{3}$	0
RC	$\frac{7000}{3}$	$\frac{1600}{3}$	$\frac{3400}{3}$
NC5	0	0	0
Cantități produse	$\frac{14000}{3}$	$\frac{4000}{3}$	3000

prin care se obține profitul maxim: P = 12000 u.m.

Problema 4

Notând cu x_j = cantitatea ce va fi produsă din produsul P_j j = 1...4, avem de rezolvat problema de programare liniară:

$$\max(3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 60 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 & \leq & 80 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 & \leq & 90 \end{cases}$$
$$2 \leq x_1 \leq 20, 2 \leq x_2 \leq 10$$
$$3 \leq x_3 \leq 25, 1 \leq x_4 \leq 30$$

Prin rezolvarea acestei probleme se obține soluția:

$x_1 = 2$, $x_2 = \frac{279}{34}$, $x_3 = \frac{117}{17}$, $x_4 = 1$ care duce la un profit maxim de $\frac{1726}{17}$ u.m.

Problema 5

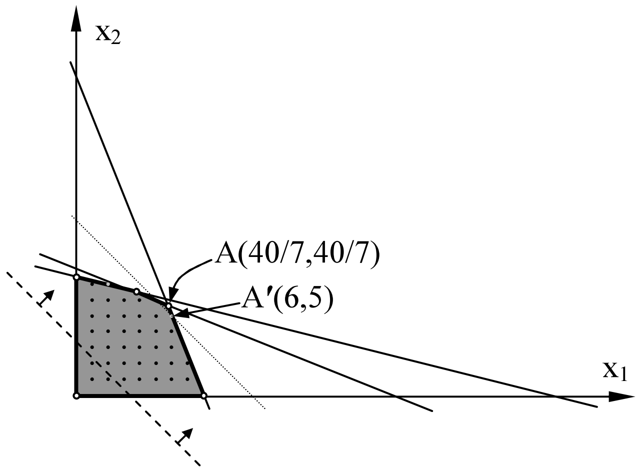
Notând cu x_A = cantitatea ce va fi produsă din sortimentul A şi cu x_B = cantitatea ce va fi produsă din sortimentul B, avem de rezolvat problema de programare liniară:

$$\max(x_A + x_B)$$
$$\begin{cases} 0{,}2x_A + 0{,}8x_B & \leq & 6 \\ 0{,}4x_A + x_B & \leq & 8 \\ x_A + 0{,}4x_B & \leq & 8 \end{cases}$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

Prin rezolvarea acestei probleme se obține soluția:

$$x_A = \frac{40}{7},\ x_B = \frac{40}{7}.$$

Această soluție nu este evident acceptabilă, deoarece fiecare variabilă reprezintă un număr de produse ce trebuie fabricat, adică trebuie să fie număr întreg. Problema poate fi rezolvată folosind metode de programare în numere întregi, totuşi, în acest caz, fiind doar două variabile, putem folosi reprezentarea grafică pentru identificarea soluției.



În figura de mai sus, au fost reprezentate, în sistemul de coordonate (x_1, x_2), domeniul soluțiilor admisibile (poligonul haşurat), două linii de nivel ale funcției obiectiv (liniile punctate), soluția optimă în numere reale A(40/7, 40/7), soluțiile admisibile în numere întregi (punctele îngroşate) şi soluția optimă în numere întregi A′(6,5) (ultimul punct din domeniul soluțiilor întregi atins de o linie de nivel în deplasarea lor în sensul dat de săgeți) care duce la un număr maxim de produse fabricare $x_A + x_B = 11$.

Problema 6

Problema face parte din clasa problemelor de dietă, modelul matematic asociat fiind problema de programare liniară:

$$\min(240x_1 + 25x_2 + 17x_3 + 60x_4 + 105x_5 + 110x_6)$$
$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}3x_3 + 0{,}1x_4 + x_6 & \geq & 0{,}08 \\ 0{,}5x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}3x_4 + x_5 + x_6 & \geq & 0{,}24 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}3x_5 & \geq & 0{,}23 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1...6$$

Soluția optimă este:

$$x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0,\ x_2 = \frac{176}{375},\ x_3 = \frac{4}{15}$$

care duce la un cost minim $C = \dfrac{244}{15} = 16{,}2667$ u.m./zi×animal.

Dacă această soluție ar fi nerealistă practic, am putea introduce îmbunătățiri în ceea ce priveşte ″gustul″ (prin impunerea respectării anumitor proporții între alimentele folosite) sau prin limitări inferioare şi/sau superioare în ceea ce priveşte cantitățile din fiecare aliment încorporate în furaj. Ne putem imagina o rezolvare în care, de fiecare dată când rezultă un furaj inacceptabil, să identificăm motivul pentru care nu este aplicabilă soluția și să introducem o restricție suplimentară care să elimine această soluție, până când se ajunge la o variantă acceptabilă.

Problema 7

1. Forma standard:

$$(\max) f = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 12\cdot x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 48 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_6 = 81 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_7 = 60 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

2. Duala:

$$(\min)\ g = 48\cdot u_1 + 81\cdot u_2 + 60\cdot u_3$$

$$\begin{cases} 3u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq 3 \\ 2u_1 + 4u_2 + 3u_3 \geq 2 \\ u_1 + 6u_2 + 5u_3 \geq 5 \\ 4u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geq 12 \end{cases}$$

$u_1 \geq 0,\ u_2 \leq 0,\ u_3 \geq 0$

3. Tabelul corespunzător bazei optime este:

			3	2	5	12	0	0	0	-M
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
3	x_1	9	1	0	0	18	2	7	8	-7
2	x_2	9	0	1	0	-31	-3	-13	-15	13
5	x_3	3	0	0	1	12	1	5	6	-5
		60	0	0	0	40	5	20	24	M-20

deci soluția optimă este $x_{\text{opt}} = (x_1 = 9, x_2 = 9, x_3 = 3, x_4 = 0)$, soluția dualei este formată din acei z care corespund bazei unitate inițiale (x_5, x_8 și x_7) adică $u_{\text{opt}} = (u_1 = 5, u_2 = -20, u_3 = 24)$, pentru cele două soluții obținându-se același optim al celor două probleme: $\max(f(x)) = \min(g(u)) = 60$.

Observație: Cele două soluții se pot obține mult mai ușor folosind direct formulele lor de calcul: $x_B = B^{-1}b$ și $u_B = c_B^T B^{-1}$.

Verificarea teoremei ecarturilor complementare se reduce la a verifica egalitățile:

$$\begin{cases} (3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 48)u_1 = 0 \\ (3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 81)u_2 = 0 \\ (2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 60)u_3 = 0 \\ (3u_1 + 3u_2 + 2u_3 - 3)x_1 = 0 \\ (2u_1 + 4u_2 + 3u_3 - 2)x_2 = 0 \\ (u_1 + 6u_2 + 5u_3 - 5)x_3 = 0 \\ (4u_1 + 2u_2 + 3u_3 - 12)x_4 = 0 \end{cases}$$ pentru soluțiile optime găsite pentru primală și duală.

După înlocuire avem: $$\begin{cases} (3\cdot 9 + 2\cdot 9 + 3 + 4\cdot 0 - 48)\cdot 5 = 0 \\ (3\cdot 9 + 4\cdot 9 + 6\cdot 3 + 2\cdot 0 - 81)\cdot(-20) = 0 \\ (2\cdot 9 + 3\cdot 9 + 5\cdot 3 + 3\cdot 0 - 60)\cdot 24 = 0 \\ (3\cdot 5 + 3\cdot(-20) + 2\cdot 24 - 3)\cdot 9 = 0 \\ (2\cdot 5 + 4\cdot(-20) + 3\cdot 24 - 2)\cdot 9 = 0 \\ (5 + 6\cdot(-20) + 5\cdot 24 - 5)\cdot 3 = 0 \\ (4\cdot 5 + 2\cdot(-20) + 3\cdot 24 - 12)\cdot 0 = 0 \end{cases}$$ (Adevărat)

4. Se verifică în primul rând dacă noua restricție este verificată de soluția optimă actuală:

$$9 \leq 3 + 5 \ \ \text{(Fals)}$$

Deoarece nu este verificată se trece la căutarea unei noi soluții optime.
Se rescrie sistemul de restricții din forma standard folosind tabelul soluției optime:

$$\begin{cases} x_1 + 18x_4 + 2x_5 + 7x_6 + 8x_7 = 9 \\ x_2 - 31x_4 - 3x_5 - 13x_6 - 15x_7 = 9 \\ x_3 + 12x_4 + 1x_5 + 5x_6 + 6x_7 = 3 \end{cases}$$

din care se scot variabilele principale (x_1, x_2, x_3) în funcție de cele secundare (x_4, x_5, x_6 x_7):

$$\begin{cases} x_1 = 9 - 18x_4 - 2x_5 - 7x_6 - 8x_7 \\ x_2 = 9 + 31x_4 + 3x_5 + 13x_6 + 15x_7 \\ x_3 = 3 - 12x_4 - 1x_5 - 5x_6 - 6x_7 \end{cases}$$

şi se înlocuiesc în restricția suplimentară $x_1 \leq x_3 + 5$ rezultând ecuația:

$$9 - 18x_4 - 2x_5 - 7x_6 - 8x_7 \leq 3 - 12x_4 - 1x_5 - 5x_6 - 6x_7 + 5 \Leftrightarrow$$
$$-6x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7 \leq -1$$

Se introduce o nouă variabilă de abatere x_9 pentru a obține egalitate:

$$-6x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7 + x_9 = -1$$

şi obținem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 18x_4 + 2x_5 + 7x_6 + 8x_7 = 9 \\ x_2 - 31x_4 - 3x_5 - 13x_6 - 15x_7 = 9 \\ x_3 + 12x_4 + 1x_5 + 5x_6 + 6x_7 = 3 \\ -6x_4 - x_5 - 2x_6 - 2x_7 + x_9 = -1 \end{cases}$$

în care baza asociată variabilelor x_1, x_2, x_3 şi x_9 este matricea unitate I_4.

Tabelul asociat acestei baze se obține din fostul tabel optim adăugând o linie (pentru noua restricție) şi o coloană (pentru variabila de abatere x_9). Coloana corespunzătoare fostei variabile artificiale x_8 este eliminată deoarece nu mai este necesară în rezolvare.

			3	2	5	12	0	0	0	0
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_9
3	x_1	9	1	0	0	18	2	7	8	0
2	x_2	9	0	1	0	-31	-3	-13	-15	0
5	x_3	3	0	0	1	12	1	5	6	0
0	x_8	-1	0	0	0	-6	**-1**	-2	-2	1
		60	0	0	0	40	5	20	24	0

Din acest tabel se observă că soluția este dual admisibilă dar nu este optimă, deci va fi necesară aplicarea algoritmului simplex dual pentru a rezolva problema.

Conform algoritmului simplex dual iese din bază x_8 şi intră x_5:

			3	2	5	12	0	0	0	0
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_9
3	x_1	7	1	0	0	6	0	4	4	2
2	x_2	12	0	1	0	-13	0	-7	-9	-3
5	x_3	2	0	0	1	6	0	3	4	1
0	x_5	1	0	0	0	6	1	2	2	-1
		55	0	0	0	10	0	10	14	5

şi se obţine noua soluţie optimă: x_{opt} = (x_1 = 7, x_2 = 12, x_3 = 2, x_4 = 0) şi noul optim max($f(x)$) = 55.

5. Pentru b = b(λ) = $\begin{pmatrix} 48+3\lambda \\ 81-\lambda \\ 60+2\lambda \end{pmatrix}$ şi baza B = (a^1, a^2, a^3) obţinem soluţia:

$$x_B(\lambda) = B^{-1}\cdot b(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1 = 9+29\lambda \\ x_2 = 9-52\lambda \\ x_3 = 3+20\lambda \end{pmatrix}$$

Deoarece vectorul Δ nu se schimbă soluţia va fi optimă dacă şi numai dacă $x_B(\lambda) \geq 0$ adică:

$$\begin{cases} 9+29\lambda \geq 0 \\ 9-52\lambda \geq 0 \\ 3+20\lambda \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in [-\frac{3}{20}, \frac{9}{52}]$$

Problemele 8 – 14

	8	9	10	11	12	13	14
x_B	$x_1 = 1$ $x_2 = 12$ $x_3 = 4$ $x_4 = 0$	$x_1 = 1$ $x_2 = 3$ $x_3 = 2$ $x_4 = 0$	$x_1 = 4$ $x_2 = 1$ $x_3 = 8$ $x_4 = 0$	$x_1 = 5$ $x_2 = 3$ $x_3 = 2$ $x_4 = 0$	$x_1 = 4$ $x_2 = 85$ $x_3 = 2$ $x_4 = 0$	$x_1 = 4$ $x_2 = 13$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0$	$x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $x_3 = 8$ $x_4 = 0$
u_B	$u_1 = 8$ $u_2 = -6$ $u_3 = 1$	$u_1 = 1$ $u_2 = -3$ $u_3 = 9$	$u_1 = 16$ $u_2 = -8$ $u_3 = 12$	$u_1 = 4$ $u_2 = -1$ $u_3 = 4$	$u_1 = 7$ $u_2 = -2$ $u_3 = 18$	$u_1 = 1$ $u_2 = -10$ $u_3 = 20$	$u_1 = 8$ $u_2 = -2$ $u_3 = 4$
noul x_B	$x_1 = 1{,}25$ $x_2 = 13{,}5$ $x_3 = 0{,}125$ $x_4 = 0{,}125$	$x_1 = 3$ $x_2 = 3$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$	$x_1 = 9$ $x_2 = 0$ $x_3 = 5$ $x_4 = 1$	$x_1 = 3$ $x_2 = 4$ $x_3 = 0$ $x_4 = 1$	$x_1 = 2$ $x_2 = 85$ $x_3 = 3$ $x_4 = 1$	$x_1 = 1/3$ $x_2 = 41/3$ $x_3 = 17/3$ $x_4 = 1/3$	$x_1 = 4{,}5$ $x_2 = 0{,}125$ $x_3 = 7{,}25$ $x_4 = 0{,}375$
λ	$[-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}]$	$[-\frac{1}{38}, \frac{2}{45}]$	$[-\frac{1}{15}, \frac{4}{57}]$	$[-\frac{4}{15}, \frac{4}{5}]$	$[-\frac{2}{3}, \frac{18}{4}]$	$[-\frac{1}{7}, \frac{57}{64}]$	$[-4, \frac{1}{6}]$

Problema 15

Aplicând algoritmul simplex se ajunge la tabelul final:

			6	4	12	0	0	0	0
c_B^T	VB	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
6	x_1	6	1	0	0	0	2/19	1/19	2/19
4	x_2	4	0	1	0	0	-3/19	2/19	0
12	x_3	4	0	0	1	0	0	2/19	-1/19
0	x_4	4	0	0	0	1	28/19	-2/19	-21/19
		100	0	0	0	0	0	2	0

Deoarece în afară de Δ corespunzători bazei mai exista Δ_5 şi Δ_7 egali cu zero rezultă că problema admite soluţie multiplă. Celelalte soluţii optime de bază se găsesc introducând succesiv în bază variabilele x_5 şi x_7, obţinându-se în final 4 soluţii de bază:

$$x^1 = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 4 \end{cases} ; x^2 = \begin{cases} x_1 = 40/7 \\ x_2 = 31/7 \\ x_3 = 4 \\ x_5 = 19/7 \end{cases} ; x^3 = \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_3 = 7 \\ x_4 = 67 \\ x_7 = 57 \end{cases} ; x^4 = \begin{cases} x_2 = 397/49 \\ x_3 = 276/49 \\ x_5 = 1273/49 \\ x_7 = 1520/49 \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor optime a problemei este formată din toate combinaţiile convexe ale celor patru soluţii optime de bază de mai sus.

Problema 16

Introducem variabilele de abatere s_1, s_2, s_3 şi s_4 în cele 4 ecuaţii şi variabilele artificiale a_2 şi a_3 în ecuaţiile 2 şi 3 pentru a obţine matricea unitate ca bază iniţială:

$$(\max) f = 3x - y + 2z$$

$$\begin{cases} x + y + s_1 = 4 \\ y + z - s_2 + a_2 = 3 \\ x + y + z - s_3 + a_3 = 7 \\ y + 2z + s_4 = 5 \end{cases}$$

$$x, y, z, s_1, s_2, s_3, s_4, a_2, a_3 \geq 0$$

Tabelul simplex asociat acestei baze este:

			3	-1	2	0	0	0	0	-M	-M
c_B^T	VB	x_B	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	a_2	a_3
0	s_1	4	1	1	0	1	0	0	0	0	0
-M	a_2	3	0	1	1	0	-1	0	0	1	0
-M	a_3	7	1	1	1	0	0	-1	0	0	1
0	s_4	5	0	1	2	0	0	0	1	0	0
		-10M	-M-3	-2M+1	-2M-2	0	M	M	0	0	0

Conform algoritmului simplex primal intră in bază variabila y şi iese variabila a_2 (este perechea care corespunde celei mai mari creşteri a funcţiei obiectiv), după pivotare obţinându-se tabelul simplex:

			3	-1	2	0	0	0	0	-M	-M
c_B^T	VB	x_B	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	a_2	a_3
0	s_1	1	1	0	-1	1	1	0	0	-1	0
-1	y	3	0	1	1	0	-1	0	0	1	0
-M	a_3	4	1	0	0	0	1	-1	0	-1	1
0	s_4	2	0	0	1	0	1	0	1	-1	0
		-4M-3	-M-3	0	-3	0	-M+1	M	0	2M-1	0

Soluţia nu este optimă şi conform algoritmului simplex intră variabila x în locul variabilei s_1, obţinându-se noul tabel:

			3	-1	2	0	0	0	0	-M	-M
c_B^T	VB	x_B	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	a_2	a_3
3	x	1	1	0	-1	1	1	0	0	-1	0
-1	y	3	0	1	1	0	-1	0	0	1	0
-M	a_3	3	0	0	1	-1	0	-1	0	0	1
0	s_4	2	0	0	1	0	1	0	1	-1	0
		-3M	0	0	-M-6	M+3	4	M	0	M-4	0

Soluția nu este optimă, întră z în locul lui s_4 şi obținem tabelul:

			3	-1	2	0	0	0	0	-M	-M
c_B^T	VB	x_B	x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	a_2	a_3
3	x	3	1	0	0	1	2	0	1	-2	0
-1	y	1	0	1	0	0	-2	0	-1	2	0
-M	a_3	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	1	1
2	z	2	0	0	1	0	1	0	1	-1	0
		-M+12	0	0	0	M+3	M+10	M	M+6	2M-2	0

În acest tabel avem toți Δ pozitivi şi cum în soluția optimă mai avem încă variabile artificiale nenule ($a_3 = 1$) rezultă că problema inițială nu are soluții admisibile.

Problemele 17, 18, 19

Nu au soluție

Problema 20