

## 6. Analiza sensibilității. Postoptimizare. Programare parametrică

Orice program liniar în formă standard în care funcția obiectiv se maximizează este perfect determinat de cunoașterea următoarelor trei masive:

$A \equiv$  matricea coeficienților sistemului de restricții

$b \equiv$  vectorul (coloană) al termenilor liberi

$c \equiv$  vectorul (linie) al coeficienților funcției obiectiv

drept care va fi identificat în continuare prin sigla  $P(A,b,c)$ :

$$P(A,b,c) \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{array} \right.$$

Până acum, elementele masivelor  $A$ ,  $b$ ,  $c$  au fost presupuse a fi *cunoscute cu exactitate și fixate*, de unde și numele de *constante* atribuit lor. În situațiile practice, suntem obligați să privim aceste "constante" și din alte unghiuri de vedere. Să presupunem că  $P(A,b,c)$  *modelează activitatea unei firme*. Atunci elementele  $a_{ij}$  ale matricii  $A$  au semnificația de consumuri de resurse, componentele  $b_i$  ale vectorului  $b$  reprezintă plafoanele resurselor disponibile iar componentele  $c_j$  ale vectorului  $c$  pot fi după caz, prețuri sau profituri unitare.

Se poate întâmpla ca unele dintre aceste elemente să nu fie cunoscute cu exactitate, ele oscilând în jurul unor valori "probabile", ca în următoarele exemple:

"experții firmei estimează că pentru luna următoare prețul bunului ... va fi *în jur* de 18 u.m." sau:

"directorul executiv apreciază că pentru luna următoare disponibilul resursei ... va fi *cam* de 130 unități"

În asemenea situații suntem interesați să știm dacă la variații "mici" ale unor constante corespund variații "mici" ale soluției modelului, altfel spus, dacă soluția modelului depinde "*continuu*" de aceste constante. Dacă este așa, vom spune că soluția modelului este *stabilă*.

Studiul stabilității este important din punct de vedere economic deoarece este posibil ca variații mici ale unor constante să antreneze modificări majore în soluția optimă și în acest caz este necesar să știm cauzele și proporțiile instabilității pentru a putea lua decizia adecvată.

În acest context, *analiza sensibilității* are ca obiect *studiul stabilității soluției optime a unei probleme de optimizare*. În cazul liniar, pentru fiecare constantă se poate determina un interval de variație cu proprietatea că baza optimală sau chiar soluția asociată rămân neschimbate. Acest interval se numește *interval de stabilitate al soluției optime în raport cu coeficientul considerat*.

Reluând problema firmei sunt situații în care constantele modelului sunt cunoscute cu exactitate și fixate doar pe o anumită perioadă, o parte din ele suferind modificări de mai mică sau mai mare amplitudine prin trecerea la o nouă perioadă. Ce efect au aceste schimbări asupra soluției optime este o altă chestiune cu serioase motivații economice. De exemplu, *suntem interesați în a afla dacă optimalitatea unei combinații de bunuri se mai menține când profitul unui bun rentabil scade. Mai departe, ne putem întreba ce se întâmplă dacă disponibilul de resurse suferă unele ajustări. Deasemeni este interesant de văzut ce efect are introducerea unei noi activități productive, considerarea unei noi resurse al cărei disponibil limitat face inoperant programul de producție actual sau modificarea tehnologiei de transformare a resurselor în bunuri*.

Evident, la toate aceste întrebări se poate răspunde rezolvând de sine stătător problema modificată. În continuare, vom arăta cum se obține soluția problemei modificate plecând de la soluția problemei originale. Subiectul în discuție este tentant din start, deoarece este din nou de așteptat ca, la mici modificări ale datelor inițiale, să rezulte schimbări de mică amploare în soluția optimă originală, schimbări ce se pot determina cu un efort de calcul relativ mic, oricum mai mic decât în cazul în care problema modificată ar fi rezolvată "de la capăt".

Problematica relevată este cunoscută sub numele de *postoptimizare*.

În fine, *programarea parametrică* se ocupă de studiul *comportării soluției unei probleme de optimizare atunci când una sau mai multe constante ale problemei depind de un sistem de parametri*. (Ne vom mărgini aici numai la cazul dependenței *liniare de un singur parametru*.)

Cele trei teme sunt strâns legate între ele. În esență, determinarea unui interval de stabilitate a soluției optime în raport cu un coeficient este o problemă parametrică în care însuși coeficientul respectiv este considerat ca parametru. Deasemeni o problemă de postoptimizare poate fi privită ca un caz particular al unei probleme mai generale, parametrice etc.

### 6.1 Analiza sensibilității. Studiu de caz

Conducerea firmei X, specializată în producerea de aparatură electronică a inițiat un ambițios program de îmbunătățire a activității sale. Ea dorește în primul rând să știe care este cel mai bun mod de utilizare a resurselor sale interne: capacități de producție, forță de muncă, spații de depozitare, etc. urmând ca în funcție de rezultate să-și definească programul de aprovizionare cu materii prime și componente semifabricate precum și programul de producție pe următoarele luni. Directorul executiv a apelat la o echipă de Cercetare Operațională care a propus programarea liniară ca mijloc de investigare și analiză. Pentru exemplificare, au fost alese trei resurse mai importante  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  și trei produse reprezentative  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$ . Din analiza situației curente a rezultat că pe durata unei luni activitățile având drept scop producerea celor trei bunuri pot fi considerate ca fiind liniare. În tabelul 6.1.1 sunt date cantitățile din resursele considerate, disponibile la nivelul unei luni și consumurile specifice pentru fiecare bun în parte.

| Produse →<br>Resurse ↓ | Consumuri specifice |       |       | Disponibil |
|------------------------|---------------------|-------|-------|------------|
|                        | $A^1$               | $A^2$ | $A^3$ |            |
| $R_1$                  | 1                   | 2     | 1     | 130        |
| $R_2$                  | 1                   | 1     | 2     | 100        |
| $R_3$                  | 2                   | 1     | 3     | 140        |

Tabelul 6.1.1

Desigur, în compararea diferitelor moduri de utilizare a resurselor trebuie avut în vedere un criteriu de performanță cum ar fi maximizarea profitului total sau a venitului total sau a ratei profitului, minimizarea costului producției etc. Se poate pune chiar problema elaborării unui program de fabricație acceptabil din punctul de vedere al mai multor criterii ca în cadrul *analizei multicriteriale*, dar acest subiect nu va fi tratat în lucrare.

*Pentru început, directorul executiv a cerut echipei să elaboreze o propunere de program de producție care, plecând de la resursele sus amintite, să maximizeze profitul total al firmei relativ la bunurile  $A^1, A^2, A^3$ .*

Profiturile pe unitatea de produs sunt estimate în momentul de față la 3, 4 respectiv 2 unități monetare (u.m.). Notând cu  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  cantitățile în care bunurile  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  vor fi realizate și ținând seama de ipoteza de liniaritate rezultă următorul model matematic:

$$(P) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 130 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 140 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ \max f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Aducem problema (P) la forma standard prin introducerea variabilelor de abatere  $x_4, x_5, x_6$ . Reamintim conținutul economic al noilor variabile. Deoarece expresia  $x_1 + 2x_2 + x_3$  din membrul stâng al primei restricții reprezintă cantitatea din resursa  $R_1$  necesară pentru realizarea combinației de bunuri ( $x_1, x_2, x_3$ ) iar termenul liber 130 este cantitatea disponibilă din aceeași resursă, urmează că diferența  $130 - (x_1 + 2x_2 + x_3)$ , ce definește valoarea variabilei de abatere  $x_4$ , va semnifica tocmai cantitatea din  $R_1$  nefolosită. Analog,  $x_5$  și  $x_6$  vor reprezenta cantitățile din  $R_2$  și  $R_3$  neutilizate.

Aplicăm algoritmul simplex plecând de la baza unitară de start  $E = [A^4, A^5, A^6]$ :

| CB | B     | VVB | $\frac{3}{A^1}$ | $\frac{4}{A^2}$ | $\frac{2}{A^3}$ | $\frac{0}{A^4}$ | $\frac{0}{A^5}$ | $\frac{0}{A^6}$ |
|----|-------|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0  | $A^4$ | 130 | 1               | 2               | 1               | 1               | 0               | 0               |
| 0  | $A^5$ | 100 | 1               | 1               | 2               | 0               | 1               | 0               |
| 0  | $A^6$ | 140 | 2               | 1               | 3               | 0               | 0               | 1               |
|    | $f$   | 0   | -3              | -4              | -2              | *               | *               | *               |
| 4  | $A^2$ | 65  | 1/2             | 1               | 1/2             | 1/2             | 0               | 0               |
| 0  | $A^5$ | 35  | 1/2             | 0               | 3/2             | -1/2            | 1               | 0               |
| 0  | $A^6$ | 75  | 3/2             | 0               | 5/2             | -1/2            | 0               | 1               |
|    | $f$   | 260 | -1              | *               | 0               | 2               | *               | *               |
| 4  | $A^2$ | 40  | 0               | 1               | -1/3            | 2/3             | 0               | -1/3            |
| 0  | $A^5$ | 10  | 0               | 0               | 2/3             | -1/3            | 1               | -1/3            |
| 3  | $A^1$ | 50  | 1               | 0               | 5/3             | -1/3            | 0               | 2/3             |
|    | $f$   | 310 | *               | *               | 5/3             | 5/3             | *               | 2/3             |

Tabelele 6.1.2 - 6.1.4

Pe baza informațiilor numerice cuprinse în tabelul 6.1.4 al soluției optime echipa C.O. a formulat următoarele concluzii:

- Profitul maxim pe care firma îl poate obține luând în calcul numai datele prezentate este de 310 u.m. Această valoare reprezintă limita superioară a posibilităților actuale și s-ar obține dacă nu ar exista nici un fel de probleme

în legătură cu procurarea altor resurse, cu situația vânzărilor și în general cu tot ce ține de actul complex al aprovizionării, producției și desfacerii. Marja de manevră a conducerii este limitată nu numai de plafoanele resurselor considerate ci și de o mulțime de alți factori (unii controlabili alții nu) astfel că în realitate profitul este mai mic. Totuși cifra obținută trebuie considerată ca o valoare de referință în raport cu care este necesar să fie evaluate toate celelalte decizii privind producția.

- În contextul dat, combinația optimă de bunuri se compune din:

$$x_1^* = 50 \text{ unități din } A^1 \text{ și } x_2^* = 40 \text{ unități din } A^2$$

Din punct de vedere economic, neincluderea produsului  $A^3$  în combinația optimă se justifică astfel (vezi raționamentul din secțiunea.7):

Notând cu B baza optimă  $[A^2, A^5, A^1]$  din tabelul 6.1.4 rezultă:

$$A^3 = B\bar{A}^3 = -\frac{1}{3}A^2 + \frac{2}{3}A^5 + \frac{5}{3}A^1$$

Se conchide că producerea unei unități din  $A^3$  ar implica creșterea producției din  $A^2$  cu  $1/3$  unități și diminuarea producției din  $A^1$  cu  $5/3$  unități. Variația profitului are expresia:

$$2 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{5}{3} \cdot 3\right) = -\frac{5}{3} \text{ u.m.} = -\bar{c}_3$$

Prin urmare profitul total ar scădea cu  $5/3$  u.m. la fiecare unitate din  $A^3$  inclusă în programul de fabricație. În consecință  $A^3$  nu este rentabil a fi realizat dacă se are în vedere în exclusivitate criteriul de performanță ales. După cum vom vedea în continuare, situația produsului  $A^3$  se va schimba în raport cu alte criterii de evaluare.

- Resursele  $R_1$  și  $R_3$  sunt prevăzute a se consuma în întregime deoarece în soluția optimă  $x_4^* = x_6^* = 0$ . Din resursa  $R_2$  rămân nefolosite  $x_5^* = 10$  unități. Cum aceste considerații premarg definitivarea programului de fabricație, analiza modului de utilizare a resursei  $R_2$  poate fi continuată în mai multe direcții. Astfel, conducerea firmei ar putea decide utilizarea celor 10 unități în alte activități productive care nu au fost luate în considerare. Alternativ, se poate impune condiția utilizării integrale a resursei  $R_2$  (vezi secțiunea următoare). În fine, o a treia cale ar fi suplimentarea disponibilelor din  $R_1$  și  $R_3$  în scopul utilizării mai bune a resursei  $R_2$ , firește în ipoteza că acest lucru este posibil și că structura sortimentală de producție găsită este în

concordanță cu opțiunile firmei. *Analiza acestui scenariu ne va prilejui o interesantă aplicare a teoriei dualității.* Într-adevăr, prețurile duale optime ale celor trei resurse sunt  $u_1^* = \frac{5}{3}$ ,  $u_2^* = 0$ ,  $u_3^* = \frac{2}{3}$  (vezi exemplul 4.4.2) și ele arată cu cât crește profitul maxim la o suplimentare cu o unitate a disponibilului acestora. Așa stând lucrurile, conducerea firmei ar fi mai interesată să mărească disponibilul din  $R_1$  decât pe cel din  $R_3$  dar nici o creștere combinată nu poate fi exclusă din start. Să notăm cu  $\partial b_1$  și  $\partial b_3$  cantitățile suplimentare din resursele  $R_1$ ,  $R_3$  pe care firma ar putea să le direcționeze către producerea bunurilor  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$ . Noul vector al disponibilului ar fi:

$$b' = \begin{bmatrix} 130 + \partial b_1 \\ 100 \\ 140 + \partial b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 100 \\ 140 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial b_1 \\ 0 \\ \partial b_3 \end{bmatrix} = b + \partial b$$

astfel că soluția asociată bazei B devine:

$$\begin{aligned} x'B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} &= B^{-1}b' = B^{-1}b + B^{-1}\partial b = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial b_1 \\ 0 \\ \partial b_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 40 + \frac{2}{3}\partial b_1 - \frac{1}{3}\partial b_3 \\ 10 - \frac{1}{3}\partial b_1 - \frac{1}{3}\partial b_3 \\ 50 - \frac{1}{3}\partial b_1 + \frac{2}{3}\partial b_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Menținerea structurii sortimentale optime actuale înseamnă:

$$x'B \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}\partial b_1 + \frac{1}{3}\partial b_3 \leq 40 \\ \frac{1}{3}\partial b_1 + \frac{1}{3}\partial b_3 \leq 10 \\ \frac{1}{3}\partial b_1 - \frac{2}{3}\partial b_3 \leq 50 \end{cases}$$

Variația valorii (optime) a funcției obiectiv la modificările survenite este dată de formula:

$$\begin{aligned}\partial f &= c^B x^1 B - c^B x^2 B = c^B (B^{-1}b + B^{-1}\partial b) - c^B B^{-1}b = c^B B^{-1}\partial b = u^* \partial b = \\ &= \frac{5}{3}\partial b_1 + \frac{2}{3}\partial b_3\end{aligned}$$

Maximizând  $\partial f$  pe domeniul determinat de inegalitățile precedente se găsește (fie grafic fie cu ajutorul algoritmului simplex):

$$(\partial b_1)^* = 30 \quad (\partial b_3)^* = 0 \rightarrow (\max)\partial f = 50$$

Recapitulând, dacă vectorul disponibilului ar fi:

$$b = \begin{bmatrix} 130 + 30 \\ 100 \\ 140 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 100 \\ 140 \end{bmatrix}$$

atunci resursele ar fi în întregime consumate, combinația optimă de bunuri ar fi:

$$x_1^* = 50 - \frac{1}{3} \cdot 30 = 40 \text{ unități din } A^1, x_2^* = 40 + \frac{2}{3} \cdot 30 = 60 \text{ unități din } A^2, x_3^* = 0$$

iar profitul maxim ar avea valoarea  $310 + 50 = 360$  u.m.

- Să presupunem acum că firma hotărăște să păstreze pentru mai multe perioade (luni) viitoare actuala structură sortimentală în cadrul căreia produce numai bunurile  $A^1$  și  $A^2$ . Pe parcurs însă pot interveni modificări ale profiturilor unitare sau schimbări de la o lună la alta în disponibilele resurselor (urmare a unor modificări în structura costurilor de producție, scăderi și/sau creșteri de prețuri pe piața de desfacere, schimbări în structura programelor de aprovizionare cauzate de modificarea prețurilor materiilor prime la furnizori etc.)

*În această situație conducerea este interesată în a ști între ce limite poate varia profitul unui produs sau disponibilul unei resurse astfel încât actuala structură a producției să se mențină.*

Să considerăm profitul unitar al bunului  $A^1$  a cărui valoare luată în calculele anterioare este 3u.m. Recalculăm costurile reduse  $\bar{c}_3$ ,  $\bar{c}_4$  și  $\bar{c}_6$  înlocuind 3 cu profitul variabil  $c_1$  (vezi tabelul 6.1.4) și impunem condiția de optimalitate  $\bar{c}_j \geq 0$ . Obținem:

$$\bar{c}_3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{5}{3} \cdot c_1 - 2 = \frac{5}{3} \cdot c_1 - \frac{10}{3} \geq 0$$

$$\bar{c}_4 = \frac{2}{3} \cdot 4 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot c_1 - 0 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \cdot c_1 \geq 0$$

$$\bar{c}_6 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot c_1 - 0 = \frac{2}{3} \cdot c_1 - \frac{4}{3} \geq 0$$

din care rezultă intervalul de stabilitate:  $2 \leq c_1 \leq 8$ . Deci atât timp cât profitul pe unitatea de produs  $A^1$  se menține între 2 și 8 u.m. programul de producție optim rămâne neschimbat:

$$x_1^* = 50 \quad x_2^* = 40 \quad x_3^* = 0$$

numai profitul total maxim variază:  $\max f = 50 \cdot c_1 + 4 \cdot 40 = 160 + 50 \cdot c_1$ .

Pentru profiturile unitare ale bunurilor  $A^2$  și  $A^3$  intervalele de stabilitate corespunzătoare sunt  $\frac{3}{2} \leq c_2 \leq 6$ ,  $c_3 \leq \frac{11}{3}$ .

Recalculăm valorile variabilelor bazice  $x_2$ ,  $x_5$  și  $x_1$  reunite în vectorul  $x^B$ , înlocuind disponibilul actual al resursei  $R_1$  de 130 unități cu disponibilul variabil  $b_1$ . Condiția de optimalitate  $x^B \geq 0$  conduce la inegalitățile:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 100 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 100 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}b_1 - \frac{140}{3} \\ -\frac{1}{3}b_1 + 100 - \frac{140}{3} \\ -\frac{1}{3}b_1 + \frac{280}{3} \end{bmatrix} \geq 0$$



$$b_1 \geq 70, b_1 \leq 160, b_1 \leq 280$$

din care rezultă intervalul de stabilitate:  $70 \leq b_1 \leq 160$ . În concluzie, dacă firma menține disponibilul resursei  $R_1$  între 70 și 160 unități în combinația optimă vor intra numai bunurile  $A^1$  și  $A^2$  dar în cantitățile variabile:

$$x_1^* = \frac{280}{3} - \frac{1}{3}b_1 \quad x_2^* = \frac{2}{3}b_1 - \frac{140}{3}$$

profitul maxim fiind și el variabil:

$$(\max)f = 3 \cdot \left(\frac{280}{3} - \frac{1}{3}b_1\right) + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}b_1 - \frac{140}{3}\right) = \frac{280}{3} + \frac{5}{3}b_1$$

*Încă o dată remarcăm faptul că viteza de creștere a profitului este dată tocmai de prețul dual optim  $u_1^* = \frac{5}{3}$  u.m. al resursei  $R_1$ .*

Pentru resursele  $R_2$  și  $R_3$  intervalele de stabilitate corespunzătoare sunt  $b_2 \geq 90$  respectiv  $65 \leq b_3 \leq 170$ .

## 6.2 Postoptimizare: cazul în care se modifică unii coeficienți din funcția obiectiv

Fie:

| Problema originală                                                  | Problema modificată                                                    |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $(P) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$ | $(P') \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f' = c'x \end{cases}$ |

unde  $c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$  este vectorul noilor coeficienți ai funcției obiectiv. Să presupunem că (P) a fost deja rezolvată cu ajutorul algoritmului simplex și că soluția optimă  $x^*$  este asociată unei baze B. Se remarcă faptul că (P) și (P') au aceeași mulțime de soluții admisibile. În consecință,  $x^*$  este o soluție de bază admisibilă pentru programul modificat (P'). Pentru a testa optimalitatea soluției  $x^*$  în raport cu noua funcție obiectiv se recalculează costurile reduse:

$$\bar{c}'_j = c'^B B^{-1} A^j - c'_j, \quad j \in J$$

Dacă toți  $\bar{c}'_j \geq 0$ ,  $j \in J$ ,  $x^*$  este soluție optimă și pentru (P'). În caz contrar, rezolvarea programului (P') se face cu ajutorul algoritmului simplex primal, luând  $x^*$  ca soluție de start.

**Exemplul 6.2.1** În studiul, de caz din secțiunea 6.1 am determinat intervalele de stabilitate ale soluției optime  $x^*$  în raport cu fiecare din coeficienții  $c_1, c_2, c_3$  ai funcției obiectiv. Deoarece valorile actuale 3, 4, 2 u.m. ale acestor coeficienți sunt situate *în interiorul* intervalelor de stabilitate corespunzătoare, conchidem că soluția  $x^*$  este stabilă în raport cu fiecare din ei și chiar cu ansamblul lor: variații "mici" (de câteva procente, să zicem) ale profiturilor unitare în jurul valorilor actuale nu modifică soluția optimă găsită și implică doar o variație "mică" a profitului total.

Pentru exemplificare, să presupunem că profiturile bunurilor  $A^1$  și  $A^3$  cresc cu 5% iar profitul bunului  $A^2$  scade cu 10%:

$$c'_1 = 3 + \frac{5}{100} \cdot 3 = 3,15 \quad c'_2 = 4 - \frac{10}{100} \cdot 4 = 3,6 \quad c'_3 = 2 + \frac{5}{100} \cdot 2 = 2,1$$

Înlocuind în tabelul 6.1.4 coeficienții  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 2$  cu coeficienții de mai sus și recalculând costurile reduse rezultă tabelul:

| CB   | B     | VVB   | $\frac{3,15}{A^1}$ | $\frac{3,6}{A^2}$ | $\frac{2,1}{A^3}$ | $\frac{0}{A^4}$ | $\frac{0}{A^5}$ | $\frac{0}{A^6}$ |
|------|-------|-------|--------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3,6  | $A^2$ | 40    | 0                  | 1                 | -1/3              | 2/3             | 0               | -1/3            |
| 0    | $A^5$ | 10    | 0                  | 0                 | 2/3               | -1/3            | 1               | -1/3            |
| 3,15 | $A^1$ | 50    | 1                  | 0                 | 5/3               | -1/3            | 0               | 2/3             |
| $f$  |       | 301,5 | *                  | *                 | 1,95              | 1,35            | *               | 0,9             |

Tabelul 6.2.1

Prin urmare efectul combinat al schimbărilor survenite în structura vectorului profiturilor unitare se materializează doar într-o reducere a profitului total cu  $310 - 301,5 = 8,5$  u.m. ceea ce reprezintă 2,74% din valoarea inițială!

Altfel stau lucrurile dacă, de exemplu, profitul unitar al bunului  $A^1$  ar fi de 2 u.m. în loc de 3 u.m. Ne reamintim că 2 este extremitatea stângă a intervalului de stabilitate al soluției  $x^*$  în raport cu  $c_1 = 3$ ! Introducem aceste modificări în tabelul 6.1.4 obținând tabelul 6.2.2.

| CB  | B     | VVB | $\frac{2}{A^1}$ | $\frac{4}{A^2}$ | $\frac{2}{A^3}$ | $\frac{0}{A^4}$ | $\frac{0}{A^5}$ | $\frac{0}{A^6}$ |
|-----|-------|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 4   | $A^2$ | 40  | 0               | 1               | -1/3            | 2/3             | 0               | -1/3            |
| 0   | $A^5$ | 10  | 0               | 0               | 2/3             | -1/3            | 1               | -1/3            |
| 2   | $A^1$ | 50  | 1               | 0               | 5/3             | -1/3            | 0               | 2/3             |
| $f$ |       | 260 | *               | *               | 0               | 2               | *               | 0               |

Tabelul 6.2.2

Se observă că  $\bar{c}_3 = 0$ ,  $\bar{c}_6 = 0$  de unde tragem concluzia că problema are mai multe soluții optime de bază (vezi secțiunea 4.2). Acestea se obțin introducând succesiv în baza curentă coloanele  $A^3$  și  $A^6$  (vezi tabelele 6.2.3 - 6.2.4).

2      4      2      0      0      0

| CB  | B     | VVB | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ |
|-----|-------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4   | $A^2$ | 45  | 0           | 1           | 0           | 1/2         | 1/2         | -1/2        |
| 2   | $A^3$ | 15  | 0           | 0           | 1           | -1/2        | 3/2         | -1/2        |
| 2   | $A^1$ | 25  | 1           | 0           | 0           | 3/2         | -5/2        | 3/2         |
| $f$ |       | 260 | *           | *           | *           | 2           | 0           | 0           |

Tabelul 6.2.3

| CB  | B     | VVB | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ |
|-----|-------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4   | $A^2$ | 65  | 1/2         | 1           | 1/2         | 1/2         | 0           | 0           |
| 0   | $A^5$ | 35  | 1/2         | 0           | 3/2         | -1/2        | 1           | 0           |
| 0   | $A^6$ | 75  | 3/2         | 0           | 5/2         | -1/2        | 0           | 1           |
| $f$ |       | 260 | 0           | *           | 0           | 2           | *           | *           |

Tabelul 6.2.4

Celelalte două soluții optime de bază au componentele:

$$x_1^{**} = 25, x_2^{**} = 45, x_3^{**} = 15 \text{ (val. var. de abatere: } x_4^{**} = x_5^{**} = x_6^{**} = 0)$$

respectiv:

$$x_1^{***} = 0, x_2^{***} = 65, x_3^{***} = 0 \text{ (val. var. de abatere: } x_4^{***} = 0, x_5^{***} = 35, x_6^{***} = 75)$$

Ne reamintim că în această situație există o infinitate de soluții optime de forma:

$$x = \alpha_1 x^* + \alpha_2 x^{**} + \alpha_3 x^{***} \text{ cu } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \text{ și } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

(combinații convexe ale soluțiilor optime de bază), în care:

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 \alpha_1 + 25 \alpha_2 & x_4 &= 0 \\ x_2 &= 40 \alpha_1 + 45 \alpha_2 + 65 \alpha_3 & x_5 &= 10 \alpha_1 + 35 \alpha_3 \\ x_3 &= 15 \alpha_2 & x_6 &= 75 \alpha_3 \end{aligned}$$

Dacă se ia de exemplu:  $\alpha_1 = 3/5$ ,  $\alpha_2 = 1/5$ ,  $\alpha_3 = 1/5$  se găsește soluția:

$$x_1 = 35, x_2 = 46, x_3 = 3 \text{ ( } x_4 = 0, x_5 = 13, x_6 = 15 \text{ )}$$

care, deși optimă, nu este o soluție de bază avînd cinci componente nenule, cu două mai mult decât numărul restricțiilor!

Să ne întoarcem la problema stabilității soluției  $x^*$  în situația micșorării profitului bunului  $A^1$  la 2 u.m.

Urmărind datele din tabelele 6.2.3 - 6.2.4 se constată că o nouă scădere oricât de mică a profitului bunului  $A^1$  face ca soluțiile  $x^{**}$  și  $x^{***}$  să nu mai fie optime! Soluția care maximizează profitul este  $x^{***}$  și ea prevede producerea în exclusivitate a bunului  $A^2$  spre deosebire de soluțiile  $x^*$  și  $x^{**}$  care au o structură sortimentală mai largă! Astfel o mică scădere a profitului bunului  $A^1$  sub valoarea actuală de 2 u.m. antrenează schimbări chiar în structura sortimentală a programului de producție! *În consecință, soluția  $x^*$  este instabilă în raport cu eventualele oscilații ale profitului bunului  $A^1$  în jurul valorii de 2 u.m.*

**Exemplul 6.2.2** În studiul de caz din secțiunea 6.1 a fost avansată o propunere de program de producție care urmărea maximizarea profitului total. În prezent, firma vinde produsele  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  la prețurile 12, 18 respectiv 16 u.m. astfel că profitul maxim de 310 u.m. ar corespunde unui venit total de:

$$50 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1320 \text{ u.m.}$$

În varianta construită rata profitului ar fi de  $\frac{310}{1320} \cdot 100 = 23,5\%$ . *Se pune firesc*

*întrebarea dacă propunerea de plan elaborată în 6.1 maximizează venitul total al firmei, bineînțeles în ipotezele date adică mărginindu-ne numai la resursele  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  și la bunurile  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  !* Pentru a răspunde la întrebare, în tabelul simplex optim 6.1.4 schimbăm coeficienții  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 2$  ai funcției "profit total"  $f$  cu coeficienții  $c'_1 = 12$ ,  $c'_2 = 18$ ,  $c'_3 = 16$  ai funcției "venit total"  $f$  și recalculăm costurile reduse  $\bar{c}'_3, \bar{c}'_4, \bar{c}'_6$ . Găsim:  $\bar{c}'_3 = -2$ ,  $\bar{c}'_4 = 8$ ,  $\bar{c}'_6 = 2$ . Deoarece  $\bar{c}'_3 < 0$ , soluția care maximizează profitul total nu conduce și la un venit maxim: introducerea bunului  $A^3$  în combinația actuală ar majora venitul actual de 1320 u.m. cu 2 u.m. pe unitatea de produs  $A^3$ !

Aplicând algoritmul simplex primal, într-o singură iterație se obține soluția care maximizează venitul total (vezi tabelele 6.2.5 - 6.2.6):

$$x_1^{**} = 25 \text{ u. din } A^1, \quad x_2^{**} = 35 \text{ u. din } A^2, \quad x_3^{**} = 15 \text{ u. din } A^3$$

\_\_\_\_\_                      12          18          16          0          0          0

| CB   | B     | VVB  | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ |
|------|-------|------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 18   | $A^2$ | 40   | 0           | 1           | -1/3        | 2/3         | 0           | -1/3        |
| 0    | $A^5$ | 10   | 0           | 0           | 2/3         | -1/3        | 1           | -1/3        |
| 12   | $A^1$ | 50   | 1           | 0           | 5/3         | -1/3        | 0           | 2/3         |
| $f'$ |       | 1320 | *           | *           | -2          | 8           | *           | 2           |
| 18   | $A^2$ | 35   | 0           | 1           | 0           | 1/2         | 1/2         | -1/2        |
| 16   | $A^3$ | 15   | 0           | 0           | 1           | -1/2        | 3/2         | -1/2        |
| 12   | $A^1$ | 25   | 1           | 0           | 0           | 1/2         | -5/2        | 3/2         |
| $f'$ |       | 1350 | *           | *           | *           | 7           | 3           | 1           |

Tabelele 6.2.5 - 6.2.6

La un venit maxim de 1350 u.m. profitul firmei ar fi de:  $25 \cdot 3 + 35 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 245$  u.m. iar rata profitului ar fi în acest caz de numai 18,1%.

Deși rata profitului a scăzut cu  $23,5 - 18,1 = 5,4\%$  noua soluție are o serie de calități: asigură o producție diversificată întrucât se produc toate bunurile și utilizează integral resursele disponibile. Să observăm deasemeni că prețurile duale optime ale celor trei resurse s-au modificat:

$$u_1^{**} = 7, u_2^{**} = 3, u_3^{**} = 1 \text{ față de } u_1^* = \frac{5}{3}, u_2^* = 0, u_3^* = \frac{2}{3}$$

*Se justifică astfel afirmația din secțiunea 2.4 potrivit căreia prețurile duale nu reflectă valoarea intrinsecă a resurselor ci arată măsura implicării acestora în procesul de optimizare a obiectivului urmărit.*

**Exemplul 6.2.3** Am văzut că în soluția care maximiza profitul, resursa  $R_2$  nu era folosită în întregime. Se poate pune problema determinării unei soluții care să maximizeze profitul cu condiția utilizării integrale a acestei resurse. Pentru a obține un răspuns prin reoptimizare, transformăm variabila de abatere  $x_5$  în variabilă artificială înlocuind în funcția obiectiv coeficientul său  $c_5 = 0$  cu o constantă negativă  $-M \ll 0$ . Introducem acest coeficient în tabelul 6.1.4 și aplicăm algoritmul simplex primal. Invităm cititorul să facă calculele necesare anunțându-l că va trebui să obțină soluția care maximizează venitul firmei.

### 6.3 Postoptimizare: cazul în care modificările se produc în vectorul termenilor liberi

| Problema originală                                                  | Problema modificată                                                   |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $(P) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$ | $(P') \begin{cases} Ax = b' \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$ |

unde  $b' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)^T$  este noul vector de termeni liberi. Se observă ușor că (P) și (P') au aceleași baze dual admisibile. Fie B o bază optimală a programului (P). Calculăm soluția  $x'$  a programului modificat (P'), asociată bazei B:

$$x'^B = B^{-1}b' \quad x'^S = 0$$

Cum am remarcat deja,  $x'$  este o soluție dual admisibilă pentru (P'). Dacă  $x'^B \geq 0$  atunci  $x'$  este și admisibilă și deci optimă. Altminteri, rezolvarea problemei (P') se va face cu ajutorul algoritmului simplex dual, luând  $x'$  ca soluție de start.

### 6.4 Postoptimizare: introducerea unei noi activități în model

| Problema originală                                                                                        | Problema modificată                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(P) \begin{cases} \sum_{j=1}^n A^j x_j = b \\ x_j \geq 0 \\ (\max) f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \end{cases}$ | $(P') \begin{cases} \sum_{j=1}^n A^j x_j + A^{n+1} \cdot x_{n+1} = b \\ x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n; x_{n+1} \geq 0 \\ (\max) f' = \sum_{j=1}^n c_j x_j + c_{n+1} x_{n+1} \end{cases}$ |

Dacă  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  este soluția optimă a programului (P), asociată unei baze B, atunci  $x' = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0)^T$  este evident o soluție admisibilă pentru (P') asociată aceleași baze B. Pentru a decide asupra optimalității soluției  $x'$  calculăm:

$$\bar{c}_{n+1} = c^B B^{-1} A^{n+1} - c_{n+1}$$

Dacă  $\bar{c}_{n+1} \geq 0$  atunci  $x'$  este soluție optimă pentru problema (P'): noua activitate  $A^{n+1}$  nu este "rentabilă" în raport cu grupul activităților reprezentate în  $x^*$ .

Dacă  $\bar{c}_{n+1} < 0$ , aplicăm în continuare algoritmul simplex, luând  $x'$  ca soluție de start; la prima iterație, noua coloană  $A^{n+1}$  va intra în bază.

**Exemplul 6.4.1** Considerăm problema maximizării profitului firmei X din secțiunea 6.1; firma dorește să introducă în fabricație și produsul A' ale cărui consumuri specifice din resursele  $R_1, R_2, R_3$  sunt 2, 3 respectiv 1 unități. Remarcăm faptul că A' realizează un consum superior din resursa  $R_2$  și este de așteptat ca includerea sa în programul de fabricație să conducă la o utilizare mai bună a acestei resurse (ne reamintim că în soluția care maximizează profitul total resursa  $R_2$  era excedentară!). Deocamdată prețul produsului A' nu este fixat și ca urmare nici profitul unitar nu este cunoscut. *În ce condiții ar putea fi inclus A' în combinația care maximizează profitul?*

Notăm cu  $A^7$  coloana consumurilor specifice relative la bunul A' și fie  $c_7$  profitul unitar al acestui bun. Din teoria generală rezultă că A' nu este inclus în combinația optimă atât timp cât costul său redus în raport cu baza optimă  $B = [A^2, A^5, A^1]$  este nenegativ. Calculăm  $\bar{c}_7$  folosind datele din tabelul 6.1.4:

$$\bar{c}_7 = c^B B^{-1} A^7 - c_7 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - c_7 = 4 - c_7$$

Atunci:

$$\bar{c}_7 \geq 0 \Rightarrow c_7 \leq 4 \text{ u.m.}$$

În concluzie, dacă profitul estimat pentru bunul A' este inferior valorii de 4 u.m. introducerea lui în fabricație nu implică o creștere a profitului total. Pentru a obține un profit superior, conducerea firmei poate acționa în două direcții: fie să crească prețul cu toate consecințele care decurg din această decizie în ceea ce privește desfacerea pe piață fie să reducă costurile de producție la acest bun. Dacă, de exemplu, profitul unitar al bunului A' ar putea atinge valoarea  $c_7 = 5$  u.m. atunci  $\bar{c}_7 = -1$  și profitul total ar crește cu 1 u.m. la fiecare unitate din produsul A' inclusă în programul de fabricație. Pentru a obține noua



Fie B baza optimă a programului (P) găsită prin aplicarea algoritmului simplex. În consecință, forma explicită a problemei (P) în raport cu baza B:

$$(P_B) \begin{cases} x_i + \sum_{j \in J} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, i \in I \\ x_i \geq 0, i \in I; x_j \geq 0, j \in J \\ f + \sum_{j \in J} \bar{c}_j x_j = \bar{f} \end{cases} \quad (6.5.1)$$

este disponibilă, constantele alcătuitoare formând tabelul simplex optim. Dacă soluția optimă  $x^*$  a programului (P) verifică restricția suplimentară atunci  $x^*$  este soluția optimă și a problemei extinse. În caz contrar, adică atunci când :

$$\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^* + \dots + \alpha_n x_n^* > \beta \quad (6.5.2)$$

procedăm după cum urmează:

- Transformăm inegalitatea suplimentară în egalitate adăugând variabila de abatere  $x_{n+1}$ :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + x_{n+1} = \beta \quad (6.5.3)$$

- Folosind forma explicită (6.5.1.) eliminăm din (6.5.3.) variabilele bazice  $x_i, i \in I$  (în caz că apar). Obținem o egalitate de forma:

$$\sum_{j \in J} \bar{\alpha}_j x_j + x_{n+1} = \bar{\beta} \quad (6.5.4.)$$

Se constată imediat că  $\bar{\beta}$  este negativ deoarece :

$$\bar{\beta} = \beta - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^* < 0$$

conform (6.5.2.)

Adăugând (6.5.4.) la (6.5.1) obținem forma explicită a programului extins P' în raport cu baza B' formată din coloanele bazei B (coloane extinse cu coeficienții corespunzători din restricția suplimentară ! ) plus coloana unitară:

$$A^{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Soluția asociată acestei baze:

$$x_i = \bar{b}_i, i \in I; x_{n+1} = \bar{\beta} < 0; x_j = 0, j \in J \quad (6.5.5)$$

nu este admisibilă dar verifică criteriul de optimalitate, altfel spus este dual admisibilă. În consecință, pentru rezolvarea problemei extinse (P') vom aplica algoritmul simplex dual, pornind de la soluția (6.5.5).

**Exemplul 6.5.1** În studiul de caz din secțiunea 6.1, la elaborarea programului de producție care maximizează profitul total, au fost avute în vedere numai resursele  $R_1, R_2, R_3$ . Dacă în procesul de producție sunt folosite și alte resurse, se naște întrebarea dacă nu cumva soluția găsită implică consumuri ce depășesc disponibilul din acestea. Pentru exemplificare, să considerăm o a patra resursă  $R_4$  al cărei stoc disponibil  $b_4$  nu este deocamdată stabilit. Pentru cele trei bunuri  $A^1, A^2, A^3$  consumurile specifice din  $R_4$  sunt de 2, 2 respectiv 1 unități. Condiția de încadrare a consumului din  $R_4$  în disponibil conduce la inegalitatea:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b_4 \quad (6.5.6)$$

Pentru ca soluția care maximizează profitul total:

$$x_1^* = 50 \quad x_2^* = 40 \quad x_3^* = 0 \quad (6.5.7)$$

să satisfacă restricția de mai sus este necesar ca:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 0 \leq b_4 \quad \Leftrightarrow \quad b_4 \geq 180$$

Prin urmare dacă firma reușește să asigure un disponibil de cel puțin 180 unități din  $R_4$ , programul (6.5.7) nu suferă modificări. Dacă  $b_4 < 180$ , soluția (6.5.7) nu mai satisface restricția suplimentară (6.5.6). Să vedem ce se întâmplă în acest caz!

Transformăm (6.5.6) în egalitate, adăugând variabila de abatere  $x_7$ :

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_7 = b_4 \quad (6.5.8)$$

Exprimăm variabilele bazice  $x_1, x_2$  în funcție de cele nebazice folosind datele din tabelul 6.1.4:

$$\begin{aligned} 40 &= x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 \Rightarrow x_2 = 40 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_6 \\ 50 &= x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6 \Rightarrow x_1 = 50 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_6 \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Eliminând  $x_1, x_2$  din (6.5.8) se găsește în final:

$$-\frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_6 + x_7 = b_4 - 180 \quad (6.5.10)$$

Introducem coeficienții egalității (6.5.10) în tabelul simplex 6.1.4:

| CB  | B     | VVB         | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ | $\bar{A}^7$ |
|-----|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4   | $A^2$ | 40          | 0           | 1           | -1/3        | 2/3         | 0           | -1/3        | 0           |
| 0   | $A^5$ | 10          | 0           | 0           | 2/3         | -1/3        | 1           | -1/3        | 0           |
| 3   | $A^1$ | 50          | 1           | 0           | 5/3         | -1/3        | 0           | 2/3         | 0           |
| 0   | $A^7$ | $b_4 - 180$ | 0           | 0           | -5/3        | -2/3        | 0           | -2/3        | 1           |
| $f$ |       | 310         | *           | *           | 5/3         | 5/3         | *           | 2/3         | *           |

Tabelul 6.5.1

Conform instrucțiunilor algoritmului simplex dual,  $A^7$  părăsește baza curentă. Raportând costurile reduse  $\bar{c}_j$  la elementele corespunzătoare, dar negative din linia " $A^7$ " a tabelului 6.5.1 găsim că  $A^3$  sau  $A^6$  trebuie să intre în bază pentru a asigura dual admisibilitatea noii soluții (adică satisfacerea testului de optimalitate). *Din punct de vedere economic, se impune introducerea lui  $A^3$  pentru că aceasta ar însemna includerea bunului  $A^3$  în programul de fabricație, bineînțeles în ipoteza că noua soluție ar fi și primal admisibilă!*

Înlocuind  $A^7$  cu  $A^3$  în baza curentă obținem soluția dual admisibilă din tabelul 6.5.2 (pivotal transformării este deja marcat în tabelul 6.5.1):

| CB  | B     | VVB              | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ | $\bar{A}^7$ |
|-----|-------|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4   | $A^2$ | $76 - (1/5)b_4$  | 0           | 1           | 0           | 4/5         | 0           | -1/5        | -1/5        |
| 0   | $A^5$ | $(2/5)b_4 - 62$  | 0           | 0           | 0           | -3/5        | 1           | -3/5        | 2/5         |
| 3   | $A^1$ | $b_4 - 180$      | 1           | 0           | 0           | -1          | 0           | 0           | 1           |
| 2   | $A^3$ | $108 - (3/5)b_4$ | 0           | 0           | 1           | 2/5         | 0           | 2/5         | -3/5        |
| $f$ |       | $130 + b_4$      | *           | *           | *           | 1           | *           | 0           | 1           |

Tabelul 6.5.2

Condiția de admisibilitate primală conduce la inegalitățile:

$$\left. \begin{array}{l} 76 - \frac{1}{5}b_4 \geq 0 \rightarrow b_4 \leq 380 \\ \frac{2}{5}b_4 - 62 \geq 0 \rightarrow b_4 \geq 155 \\ b_4 - 130 \geq 0 \rightarrow b_4 \geq 130 \\ 108 - \frac{3}{5}b_4 \geq 0 \rightarrow b_4 \leq 180 \end{array} \right\} \Rightarrow 155 \leq b_4 \leq 180 \quad (6.5.11)$$

În concluzie, dacă  $b_4$  satisface (6.5.11) atunci soluția din tabelul 6.5.2 adică:

$$x_1 = b_4 - 130 \quad x_2 = 76 - \frac{1}{5}b_4 \quad x_3 = 108 - \frac{3}{5}b_4 \quad (6.5.12)$$

este optimă, aducând firmei, în caz de realizare un profit de  $130 + b_4$  u.m. Toate resursele sunt prevăzute a fi utilizate integral cu excepția lui  $R_2$  din care rămân  $x_5 = \frac{2}{5}b_4 - 62$  unități.

Observăm că dacă  $b_4 = 155$  unități din  $R_4$ , toate resursele sunt folosite, programul de fabricație (6.5.12) va avea componentele :

$$x_1 = 25 \quad x_2 = 45 \quad x_3 = 15$$

și profitul corespunzător ar fi de  $130 + 155 = 285$  u.m.

Pe măsură ce  $b_4$  se apropie de valoarea maximă 180 crește și profitul către valoarea  $130 + 180 = 310$  u.m. În același timp cantitatea nefolosită din  $R_2$  se mărește apropiindu-se de valoarea 10 iar producția bunului  $A^3$  tinde către 0. Pentru  $b_4 = 180$  regăsim soluția (6.5.7).

**Exemplul 6.5.2** Reluăm problema maximizării profitului firmei X. Care va fi programul de producție dacă se impune cerința ca cel puțin 8% din venitul firmei să fie realizat din desfacerea bunului  $A^3$ ?

Folosind prețurile anunțate în exemplul 6.2.2 noua condiție se formalizează prin inegalitatea:

$$16x_3 \geq \frac{8}{100}(12x_1 + 18x_2 + 16x_3) \Leftrightarrow 6x_1 + 9x_2 - 92x_3 \leq 0 \quad (6.5.13)$$

Introducem variabila de abatere  $x_7$  și eliminăm variabilele bazice  $x_1, x_2$  folosind relațiile (6.5.9). Rezultă egalitatea:

$$-99x_3 - 4x_4 - x_6 + x_7 = -660$$

ai cărei coeficienți se atașează tabelului simplex 6.1.4, după care se aplică algoritmul simplex dual (vezi tabelele 6.5.3 - 6.5.4)

Într-o singură iterație se obține programul optim:

$$x_1^{**} = 38\frac{8}{9} \quad x_2^{**} = 42\frac{2}{9} \quad x_3^{**} = 6\frac{2}{3} \quad (\max)f = 298\frac{8}{9} \quad (6.5.14)$$

(valorile variabilelor de abatere:  $x_4^{**} = x_6^{**} = 0$ ,  $x_5^{**} = 5\frac{4}{9}$ )

|    |       |        | 3           | 4           | 2           | 0           | 0           | 0           | 0           |
|----|-------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| CB | B     | VVB    | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ | $\bar{A}^7$ |
| 4  | $A^2$ | 40     | 0           | 1           | -1/3        | 2/3         | 0           | -1/3        | 0           |
| 0  | $A^5$ | 10     | 0           | 0           | 2/3         | -1/3        | 1           | -1/3        | 0           |
| 3  | $A^1$ | 50     | 1           | 0           | 5/3         | -1/3        | 0           | 2/3         | 0           |
| 0  | $A^7$ | -660   | 0           | 0           | -99         | -4          | 0           | -1          | 1           |
|    | $f$   | 310    | *           | *           | 5/3         | 5/3         | *           | 2/3         | *           |
|    | $A^2$ | 380/9  |             |             |             |             |             |             |             |
|    | $A^5$ | 50/9   |             |             |             |             |             |             |             |
|    | $A^1$ | 350/9  |             |             |             |             |             |             |             |
|    | $A^3$ | 20/3   |             |             |             |             |             |             |             |
|    | $f$   | 2690/9 |             |             |             |             |             |             |             |

Tabelele 6.5.3 - 6.5.4

Acest exemplu ne oferă ocazia de a semnală și discuta un aspect nou, care nu a fost avut în vedere în considerațiile teoretice dezvoltate până acum. Deoarece firma X produce aparatură electronică este de presupus că bunurile  $A^1$ ,  $A^2$ ,  $A^3$  se măsoară în unități *indivizibile* ca de exemplu în bucăți. Dacă bunul  $A^1$  este în fapt un calculator, a produce o fracție din el este lipsit de sens; ori se fabrică un întreg calculator ori nu. *Prin urmare în orice soluție admisibilă valorile variabilelor  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  trebuie să fie nu numai nenegative dar și întregi!* Iată de ce soluția (6.5.14) nu poate fi înșușită.

Vom proceda la rotunjirea componentelor fracționare în ideea că soluția optimă întreagă se află în "apropierea" soluției optime "fracționare". Operația de rotunjire trebuie astfel făcută încât rezultatul să fie o soluție admisibilă adică să verifice restricțiile problemei. Este firesc să acceptăm soluția obținută în acest mod cel puțin ca soluție *suboptimală* - în unele contexte practice acest lucru este perfect justificat de faptul că valorile permise variabilelor sunt suficient de mari astfel încât efectul rotunjirii să fie neglijabil.

Rotunjind superior  $x_1^{**}$  și inferior  $x_2^{**}$ ,  $x_3^{**}$  se găsește combinația:

$$x_1 = 39 \quad x_2 = 42 \quad x_3 = 6$$

care se încadrează în disponibilele date dar nu verifică restricția suplimentară (6.5.13), deoarece valoarea producției din  $A^3$  reprezintă numai 7,3% din valoarea întregii producții.

Rotunjind inferior  $x_1^{**}$ ,  $x_2^{**}$  și superior  $x_3^{**}$  se obține o soluție admisibilă întreagă:

$$x_1 = 38 \quad x_2 = 42 \quad x_3 = 7 \quad f(x) = 296 \text{ u.m.}$$

care nu este optimă. Cea mai bună soluție întreagă este:

$$x_1^0 = 37 \quad x_2^0 = 43 \quad x_3^0 = 7 \quad f(x^0) = 297 \text{ u.m.} \quad (6.5.15)$$

În cadrul acestui program, valoarea producției din bunul  $A^3$  reprezintă 8,4% din valoarea întregii producții.

Soluția (6.5.15) va fi obținută în paragraful următor prin aplicarea unei proceduri care constă într-o suită de postoptimizări cu adăugare de restricții.

## 6.6 Postoptimizare: modificarea unei coloane din matricea coeficienților

Fie:

| Problema originală                                                                                                                                                     | Problema modificată                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(P) \begin{cases} A^1 x_1 + A^2 x_2 + \dots + A^n x_n = b \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ (\max) f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \end{cases}$ | $(P') \begin{cases} (A^1)' x_1 + A^2 x_2 + \dots + A^n x_n = b \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ (\max) f = c'_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \end{cases}$ |

unde:

$$(A^1)' = A^1 + \partial A^1, \quad c'_1 = c_1 + \partial c_1$$

După cum se observă, modificările apar în prima coloană a matricii  $A$  și ele sunt incluse în vectorul  $\partial A^1$ . A fost prevăzută și o modificare  $\partial c_1$  coeficientului variabilei  $x_1$  în funcția obiectiv și aceasta din rațiuni economice: de regulă, schimbarea tehnologiei de realizare a unui bun duce la modificarea costurilor de producție, cu efect nemijlocit asupra prețului și profitului. Formal, cazul strict indicat în titlul secțiunii se obține pentru  $\partial c_1 = 0$ .

Presupunem ca și pînă acum că problema originală (P) a fost rezolvată cu ajutorul algoritmului simplex primal; se cunoaște deci soluția sa optimă  $x^*$  și baza B căreia îi este asociată. Două situații sunt posibile:

1) *Coloana  $A^1$  care se modifică, nu face parte din baza B.* Atunci în soluția optimă  $x^*$  vom avea  $x_1^* = 0$  astfel că  $x^*$  va fi o soluție admisibilă a problemei modificate (P') și chiar o soluție de bază fiind asociată aceleleași

baze B. Perturbarea coloanei  $A^1$  are efect direct numai asupra costului redus al variabilei  $x_1$  conform formulei:

$$\bar{c}_1' = c^B B^{-1} (A^1)' - c_1' = (c^B B^{-1} A^1 - c_1) + (c^B B^{-1} \partial A^1 - \partial c_1) = \bar{c}_1 + \partial \bar{c}_1 \quad (6.6.1)$$

Atunci:

- dacă  $\bar{c}_1' \geq 0$  atunci  $x^*$  este soluție optimă și pentru (P');
- dacă  $\bar{c}_1' < 0$ , pentru rezolvarea problemei (P') vom aplica în continuare algoritmul simplex primal luând  $x^*$  ca soluție de start. Bineînțeles, în tabelul simplex asociat soluției  $x^*$  vom înlocui  $\bar{A}^1 = B^{-1} A^1$  cu :

$$(\bar{A}^1)' = B^{-1} (A^1)' = B^{-1} A^1 + B^{-1} (\partial A^1) = \bar{A}^1 + \partial \bar{A}^1 \quad (6.6.2)$$

și  $\bar{c}_1$  cu  $\bar{c}_1'$  calculat în (6.6.1).

După cum se vede modul de tratare al acestui caz este foarte asemănător cu cel prezentat în secțiunea 6.4 la adăugarea unei noi activități în model.

**Exemplul 6.6.1** Reluăm problema maximizării profitului firmei X din secțiunea 6.1. Ne reamintim că în raport cu criteriul de performanță amintit, bunul  $A^3$  nu era inclus în combinația optimă. Departamentul de cercetare al firmei a realizat însă o nouă tehnologie de fabricare a acestui bun care necesită consumurile unitare  $5/4$ ,  $7/4$ ,  $5/2$  din resursele  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Costurile de producție fiind altele, *conducerea firmei dorește să cunoască în ce condiții bunul  $A^3$  - realizat după noua tehnologie - ar putea deveni rentabil.*

Suntem în condițiile cazului tratat mai sus. Plecând de la:

$$(A^3)' = \bar{A}^3 + \partial \bar{A}^3$$

$$\begin{bmatrix} 5/4 \\ 7/4 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

și folosind elementele tabelului simplex 6.1.4, evaluăm:

$$\partial \bar{A}^3 = B^{-1}(\partial A^3) = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ -5/12 \end{bmatrix}$$

astfel că:

$$(A^3)' = \bar{A}^3 + \partial \bar{A}^3 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ -5/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

Cu formula 6.6.1 calculăm costul redus asociat bunului  $A^3$ :

$$\bar{c}_3' = \bar{c}_3 + \partial \bar{c}_3 = 5/3 + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ -5/12 \end{bmatrix} - \partial c_3 = 5/3 + 1/2 - \partial c_3 = 7/4 - \partial c_3$$

Bunul  $A^3$  rămîne în afara combinației optime atîta timp cît:

$$\bar{c}_3' \geq 0 \Leftrightarrow \partial c_3 \leq 7/4$$

Dacă de exemplu  $\partial c_3 = 2 \Leftrightarrow c_3' = c_3 + \partial c_3 = 2 + 2 = 4$  u.m. atunci  $\bar{c}_3' = -1/4$  și  $A^3$  devine rentabil așa cum rezultă din tabelele simplex 6.6.1 - 6.6.2:

| CB | B     | VVB | $\frac{3}{\bar{A}^1}$ | $\frac{4}{\bar{A}^2}$ | $\frac{4}{\bar{A}^3}$ | $\frac{0}{\bar{A}^4}$ | $\frac{0}{\bar{A}^5}$ | $\frac{0}{\bar{A}^6}$ |
|----|-------|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 4  | $A^2$ | 40  | 0                     | 1                     | 0                     | 2/3                   | 0                     | -1/3                  |
| 0  | $A^5$ | 10  | 0                     | 0                     | 1/2                   | -1/3                  | 1                     | -1/3                  |
| 3  | $A^1$ | 50  | 1                     | 0                     | 5/4                   | -1/3                  | 0                     | 2/3                   |
|    | $f$   | 310 | *                     | *                     | -1/4                  | 5/3                   | *                     | 2/3                   |
| 4  | $A^2$ | 40  | 0                     | 1                     | 0                     | 2/3                   | 0                     | -1/3                  |
| 4  | $A^3$ | 20  | 0                     | 0                     | 1                     | -2/3                  | 2                     | -2/3                  |
| 3  | $A^1$ | 25  | 1                     | 0                     | 0                     | 1/2                   | 5/2                   | 3/2                   |
|    | $f$   | 315 | *                     | *                     | *                     | 3/2                   | 1/2                   | 1/2                   |

Tabelele 6.6.1 - 6.6.2

| A               | rezultat        | programul       | optim                       |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------|
| $x_1^{**} = 25$ | $x_2^{**} = 40$ | $x_3^{**} = 20$ | $\max f = 315 \text{ u.m.}$ |

Se obține o creștere a valorii funcției obiectiv:  $\Delta f = x_3^{**} \cdot (-\bar{c}_3') = 20 \cdot (1/4) = 5$  unități monetare, conform formulei (4.2.3).

2) *Coloana  $A^1$  care se modifică face parte din baza optimă B.* Plecând de la problema originală (P) vom rezolva problema intermediară :

$$(P_1) \begin{cases} A^1 x_1 + A^2 x_2 + \dots + A^n x_n + (\partial A^1) x_{n+1} = b \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0 \\ (\max) f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + (\partial c_1) x_{n+1} \end{cases} \quad (6.6.3)$$

urmărind instrucțiunile date în secțiunea 6.4 (adăugarea unei noi activități în model). Este clar atunci că problema modificată (P') se deduce din (P<sub>1</sub>) prin adăugarea restricției egalitate:

$$x_1 = x_{n+1} \quad (6.6.4)$$

Pentru a putea folosi instrucțiunile secțiunii 6.5 (adăugarea unei restricții) transformăm (6.6.4) în două inegalități de tip " $\leq$ ":

$$x_1 = x_{n+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_{n+1} \\ x_1 \geq x_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_{n+1} \leq 0 \\ -x_1 + x_{n+1} \leq 0 \end{cases}$$

**Observație:** Este posibil ca programul intermediar (P<sub>1</sub>) să aibe optim infinit. În această situație revenim în rezolvarea problemei originale (P) și mai precis la iterația în care coloana  $A^1$  (care se modifică) a intrat în baza curentă B. Acolo, înlocuim coloana  $\bar{A}^1$  cu  $(\bar{A}^1)' = B^{-1}(A^1)'$ , recalculăm costul redus  $\bar{c}_1$  și reluăm aplicarea algoritmului simplex.

**Exemplul 6.6.2** Ne plasăm din nou în cadrul studiului de caz din secțiunea 6.1. Am văzut că bunul  $A^2$  intră în combinația care asigură profitul maxim. Să presupunem că tehnologia de fabricație a acestui bun se modifică astfel:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow (A^2)' = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} = A^2 + \partial A^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

Lăsăm variabil profitul bunului  $A^2$ :

$$c'_2 = c_2 + \partial c_2 = 4 + \partial c_2$$

propunându-ne să studiem toate situațiile posibile. Obținem următoarea problemă modificată:

$$(P') \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 130 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 100 \\ 2x_1 + \frac{3}{4}x_2 + 3x_3 + x_6 = 140 \\ x_j \geq 0 \\ (\max)f = 3x_1 + (4 + \partial c_2)x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

(am inclus deja și variabilele de abatere  $x_4, x_5, x_6$ ) Programul intermediar ( $P_1$ ) din (6.6.3) are următoarea formă:

$$(P_1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_7 + x_4 = 130 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - \frac{1}{4}x_7 + x_6 = 140 \\ x_j \geq 0 \\ (\max)f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + (\partial c_2)x_7 \end{cases}$$

După cum se vede programul ( $P_1$ ) se deduce din (P) adăugând activitatea  $A^7 \equiv \partial A^2$  cu coeficientul  $c_7 \equiv \partial c_2$  în funcția obiectiv  $f$ . Calculăm costul redus  $\bar{c}_7$  asociat noii activități:

$$\bar{A}^7 = \partial \bar{A}^2 = B^{-1}(\partial A^2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_7 = c^B \bar{A}^7 - c_7 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} - \partial c_2 = -1 - \partial c_2$$

Avem de examinat două situații:

$$1) \bar{c}_7 \geq 0 \Leftrightarrow \partial c_2 \leq -1 \Leftrightarrow c'_2 \leq 3$$

Soluția optimă a programului (P<sub>1</sub>) se obține din soluția optimă  $x^*$  a programului original (P) adăugând  $x_7 = 0$ . Tabelul simplex optim pentru programul (P<sub>1</sub>) se obține formal din tabelul simplex optim (6.1.4) al programului (P) adăugând  $\bar{A}^7$  și  $\bar{c}_7$  calculate mai sus:

|    |       |     | 3           | 4           | 2           | 0           | 0           | 0           | $\partial c_2$     |
|----|-------|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------------|
| CB | B     | VVB | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ | $\bar{A}^7$        |
| 4  | $A^2$ | 40  | 0           | 1           | -1/3        | 2/3         | 0           | -1/3        | -1/4               |
| 0  | $A^5$ | 10  | 0           | 0           | 2/3         | -1/3        | 1           | -1/3        | 1/4                |
| 3  | $A^1$ | 50  | 1           | 0           | 5/3         | -1/3        | 0           | 2/3         | 0                  |
|    | $f$   | 310 | *           | *           | 5/3         | 5/3         | *           | 2/3         | -1- $\partial c_2$ |

Tabelul 6.6.3

Trecem la rezolvarea programului modificat (P') completând (P<sub>1</sub>) cu restricția:

$$x_2 = x_7 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_7 \leq 0 \\ -x_2 + x_7 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_7 + x_8 = 0 \\ -x_2 + x_7 + x_9 = 0 \end{cases} \quad (6.6.5)$$

Eliminăm din (6.6.5) variabila bazică  $x_2$ . Din tabelul 6.6.3 obținem:

$$x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{4}x_7 = 40 \Rightarrow x_2 = 40 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{4}x_7$$

Înlocuind în (6.6.5) rezultă ecuațiile:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_6 - \frac{3}{4}x_7 + x_8 &= -40 \\ -\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{3}{4}x_7 &+ x_9 = 40 \end{aligned}$$

ai căror coeficienți îi atașăm la tabelul 6.6.3.

| CB  | B     | VVB | 3<br>$\bar{A}^1$ | 4<br>$\bar{A}^2$ | 2<br>$\bar{A}^3$ | 0<br>$\bar{A}^4$ | 0<br>$\bar{A}^5$ | 0<br>$\bar{A}^6$ | $\partial c_2$<br>$\bar{A}^7$ | 0<br>$\bar{A}^8$ | 0<br>$\bar{A}^9$ |
|-----|-------|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------------------|------------------|------------------|
| 4   | $A^2$ | 40  | 0                | 1                | -1/3             | 2/3              | 0                | -1/3             | -1/4                          | 0                | 0                |
| 0   | $A^5$ | 10  | 0                | 0                | 2/3              | -1/3             | 1                | -1/3             | 1/4                           | 0                | 0                |
| 3   | $A^1$ | 50  | 1                | 0                | 5/3              | -1/3             | 0                | 2/3              | 0                             | 0                | 0                |
| 0   | $A^8$ | -40 | 0                | 0                | 1/3              | -2/3             | 0                | 1/3              | -3/4                          | 1                | 0                |
| 0   | $A^9$ | 40  | 0                | 0                | -1/3             | 2/3              | 0                | -1/3             | 3/4                           | 0                | 1                |
| $f$ |       | 310 | *                | *                | 5/3              | 5/3              | *                | 2/3              | -1- $\partial c_2$            | *                | *                |

Tabelul 6.6.4

Tabelul 6.6.4 oferă o soluție dual admisibilă pentru programul (P'). Coloana  $A^8$  va ieși din baza curentă. Pentru a găsi coloana care intră în bază evaluăm rapoartele:

$$\left| \frac{5/3}{-2/3} \right| = 5/2 \quad \left| \frac{-1 - \partial c_2}{-3/4} \right| = \frac{4}{3}(-1 - \partial c_2)$$

(prin ipoteză  $-1 - \partial c_2 \geq 0$  !)

Există două cazuri de examinat.

$$1.1) \quad \frac{5}{2} \leq \frac{4}{3}(-1 - \partial c_2) \Leftrightarrow \partial c_2 \leq -\frac{23}{8} \Leftrightarrow c'_2 \leq \frac{9}{8}$$

Coloana  $A^4$  intră în bază. Într-o singură iterație (cu pivotul încadrat -2/3), algoritmul simplex dual produce următoarea soluție optimă pentru programul modificat (P'):  $x_1^{**} = 70$   $x_2^{**} = x_3^{**} = 0$  (max) $f = 210$  u.m.

$$1.2) \quad \frac{5}{2} > \frac{4}{3}(-1 - \partial c_2) \Leftrightarrow -\frac{23}{8} < \partial c_2 \leq -1 \Leftrightarrow \frac{9}{8} < c'_2 \leq 3$$

Coloana  $A^7$  intră în bază. Aplicăm algoritmul simplex dual pivotând tabelul 6.6.4 cu pivotul încadrat -3/4. În două iterații se obține următoarea soluție optimă pentru problema modificată (P'):

$$x_1^{**} = 52 \quad x_2^{**} = 48 \quad x_3^{**} = 0 \quad (\max)f = 348 + 48 \cdot \partial c_2$$

$$2) \quad \bar{c}_7 < 0 \Leftrightarrow \partial c_2 > -1 \Leftrightarrow c'_2 > 3 \text{ u.m.}$$

Tabelul simplex 6.6.3 arată că soluția optimă a problemei originale (P) completată cu  $x_7 = 0$  nu mai este optimă și pentru programul intermediar (P<sub>1</sub>). Pivotăm 6.6.3 cu pivotul încadrat 1/4 obținând tabelul:

|                |       |                       | 3           | 4           | 2                        | 0                       | 0                 | 0                        | $\partial c_2$ |
|----------------|-------|-----------------------|-------------|-------------|--------------------------|-------------------------|-------------------|--------------------------|----------------|
| CB             | B     | VVB                   | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$              | $\bar{A}^4$             | $\bar{A}^5$       | $\bar{A}^6$              | $\bar{A}^7$    |
| 4              | $A^2$ | 50                    | 0           | 1           | 1/3                      | 1/3                     | 1                 | -2/3                     | 0              |
| $\partial c_2$ | $A^7$ | 40                    | 0           | 0           | 8/3                      | -4/3                    | 4                 | -4/3                     | 1              |
| 3              | $A^1$ | 50                    | 1           | 0           | 5/3                      | -1/3                    | 0                 | 2/3                      | 0              |
| $f$            |       | $350+400\partial c_2$ | *           | *           | $13/3+(8/3)\partial c_2$ | $1/3-(4/3)\partial c_2$ | $4+4\partial c_2$ | $-2/3-(4/3)\partial c_2$ | *              |

Tabelul 6.6.5

Costurile reduse  $\bar{c}_3$ ,  $\bar{c}_4$ ,  $\bar{c}_5$ ,  $\bar{c}_6$  sunt expresii liniare în  $\partial c_2$ . Determinăm, în următorul tabel, semnul valorilor acestora.

| $\partial c_2$                         | -1 | -1/2 | 1/4 | $+\infty$ |
|----------------------------------------|----|------|-----|-----------|
| $\bar{c}_3 = (13/3)+(8/3)\partial c_2$ | +  | +    | +   | +         |
| $\bar{c}_4 = (1/3)-(4/3)\partial c_2$  | +  | +    | 0   | -         |
| $\bar{c}_5 = 4+4\partial c_2$          | 0  | +    | +   | +         |
| $\bar{c}_6 = -(2/3)-(4/3)\partial c_2$ | +  | 0    | -   | -         |

Tabelul 6.6.6

**2.1)** Din tabelul 6.6.6 rezultă că pentru:

$$-1 < \partial c_2 \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 < c'_2 \leq \frac{7}{2}$$

tabelul 6.6.5 oferă soluția optimă a problemei intermediare (P<sub>1</sub>). Procedând în continuare exact ca în cazul 1) trecem la rezolvarea prin postoptimizare a problemei modificate (P'). Se obține soluția:

$$x_1^{**} = 40 \quad x_2^{**} = 60 \quad x_3^{**} = 0 \quad (\max)f = 360 + 60 \cdot \partial c_2$$

Invităm cititorul să facă calculele necesare.

**2.2)** Dacă  $\partial c_2 > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c'_2 > \frac{7}{2}$  tabelul 6.6.6 arată că  $\bar{c}_6 < 0$  astfel că soluția din tabelul simplex 6.6.5 nu mai este optimă. Efectuăm o pivotare cu pivotul încadrat; rezultă tabelul simplex:

|                |       |                       | 3                 | 4           | 2                 | 0                | 0                 | 0           | $\partial c_2$ |
|----------------|-------|-----------------------|-------------------|-------------|-------------------|------------------|-------------------|-------------|----------------|
| CB             | B     | VVB                   | $\bar{A}^1$       | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$       | $\bar{A}^4$      | $\bar{A}^5$       | $\bar{A}^6$ | $\bar{A}^7$    |
| 4              | $A^2$ | 100                   | 1                 | 1           | 2                 | 0                | 1                 | 0           | 0              |
| $\partial c_2$ | $A^7$ | 140                   | 2                 | 0           | 6                 | -2               | 4                 | 0           | 1              |
| 0              | $A^6$ | 75                    | 3/2               | 0           | 5/2               | -1/2             | 0                 | 1           | 0              |
| $f$            |       | $400+140\partial c_2$ | $1+2\partial c_2$ | *           | $6+6\partial c_2$ | $-2\partial c_2$ | $4+4\partial c_2$ | *           | *              |

Tabelul 6.6.7

Cercetând semnele costurilor reduse din tabelul 6.6.7 și raționând ca mai sus se conchide că:

**2.2.1)** Dacă  $-\frac{1}{2} < \partial c_2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < c'_2 \leq 4$  soluția optimă a programului modificat (P') coincide cu cea obținută în cazul 2.1).

**2.2.2)** Dacă  $\partial c_2 > 0 \Leftrightarrow c'_2 > 4$  din tabelul simplex 6.6.7 rezultă că programul intermediar (P<sub>1</sub>) are optim infinit, astfel că el nu mai poate fi folosit la rezolvarea prin postoptimizare a programului modificat (P')! Suntem nevoiți să reluăm (P') de la capăt deoarece, dacă revedem tabelele simplex 6.1.2 - 6.1.4 (întocmite pentru rezolvarea problemei originale (P)), constatăm că în prima iterație a intrat în bază chiar coloana modificată!

|                  |       |                                      | 3                                | $4+\partial c_2$  | 2                               | 0                               | 0           | 0           |
|------------------|-------|--------------------------------------|----------------------------------|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------|-------------|
| CB               | B     | VVB                                  | $\bar{A}^1$                      | $\bar{A}^2$       | $\bar{A}^3$                     | $\bar{A}^4$                     | $\bar{A}^5$ | $\bar{A}^6$ |
| 0                | $A^4$ | 130                                  | 1                                | 3/2               | 1                               | 1                               | 0           | 0           |
| 0                | $A^5$ | 100                                  | 1                                | 1                 | 2                               | 0                               | 1           | 0           |
| 0                | $A^6$ | 140                                  | 2                                | 3/4               | 3                               | 0                               | 0           | 1           |
| $f$              |       | 0                                    | -3                               | $-4-\partial c_2$ | -2                              | *                               | *           | *           |
| $4+\partial c_2$ | $A^2$ | $260/3$                              | $2/3$                            | 1                 | $2/3$                           | $2/3$                           | 0           | 0           |
| 0                | $A^5$ | $40/3$                               | 1/3                              | 0                 | $4/3$                           | $-2/3$                          | 1           | 0           |
| 0                | $A^6$ | 75                                   | 3/2                              | 0                 | $5/2$                           | $1/2$                           | 0           | 1           |
| $f$              |       | $(1040/3)+$<br>$(260/3)\partial c_2$ | $-(1/3)+$<br>$(2/3)\partial c_2$ | *                 | $(2/3)$<br>$+(2/3)\partial c_2$ | $(8/3)$<br>$+(2/3)\partial c_2$ | *           | *           |

Tabelele 6.6.8 - 6.6.9

Deoarece  $\partial c_2 > 0$  costurile reduse  $\bar{c}_3$  și  $\bar{c}_4$  sunt pozitive.

**2.2.2.1)** Dacă:  $\bar{c}_1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\partial c_2 \geq 0 \Leftrightarrow \partial c_2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow c'_2 \geq \frac{1}{2}$

criteriul de optimalitate este satisfăcut și soluția optimă a problemei modificate este:

$$x_1^{**} = 0 \quad x_2^{**} = 260/3 \quad x_3^{**} = 0 \quad (\max)f = 1040/3 + 260/3 \partial c_2$$

$$\mathbf{2.2.2.2)} \text{ Dacă: } \bar{c}_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < \partial c_2 < 1/2 \Leftrightarrow 4 < c'_2 < 9/2$$

soluția din tabelul 6.6.9 nu mai este optimă. După pivotarea tabelului 6.6.9 cu pivotul încadrat 1/3 se obține:

| CB                | B     | VVB                   | 3           | 4+ $\partial c_2$ | 2                  | 0                  | 0                  | 0           |
|-------------------|-------|-----------------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------|
|                   |       |                       | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$       | $\bar{A}^3$        | $\bar{A}^4$        | $\bar{A}^5$        | $\bar{A}^6$ |
| 4+ $\partial c_2$ | $A^2$ | 60                    | 0           | 1                 | -2                 | 2                  | -2                 | 0           |
| 3                 | $A^1$ | 40                    | 1           | 0                 | 4                  | -2                 | 3                  | 0           |
| 0                 | $A^6$ | 15                    | 0           | 0                 | -7/2               | 5/2                | -9/2               | 1           |
| $f$               |       | 360+60 $\partial c_2$ | *           | *                 | 2-2 $\partial c_2$ | 2+2 $\partial c_2$ | 1-2 $\partial c_2$ | *           |

Tabelul 6.6.10

Ipoteza implică nenegativitatea tuturor costurilor reduse și ca urmare soluția optimă a problemei modificate (P') este în acest caz:

$$x_1^{**} = 40 \quad x_2^{**} = 60 \quad x_3^{**} = 0 \quad (\max)f = 360 + 60\partial c_2$$

Rezultatele acestui studiu, mai precis dependența soluției optime și a valorii maxime a funcției obiectiv de parametrul  $\partial c_2$ , sunt sintetizate în următorul tabel:

| $\partial c_2$                      | $c'_2 = 4 + \partial c_2$ | Soluția optimă                    | Valoarea maximă a funcției obiectiv |
|-------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| $-4 \leq \partial c_2 \leq -(23/8)$ | $0 \leq c'_2 \leq (9/8)$  | $x_1 = 70, x_2 = 0, x_3 = 0$      | 210                                 |
| $-(23/8) \leq \partial c_2 \leq -1$ | $(9/8) \leq c'_2 \leq 3$  | $x_1 = 52, x_2 = 48, x_3 = 0$     | $348 + 48\partial c_2$              |
| $-1 \leq \partial c_2 \leq (1/2)$   | $3 \leq c'_2 \leq (9/2)$  | $x_1 = 40, x_2 = 60, x_3 = 0$     | $360 + 60\partial c_2$              |
| $\partial c_2 \geq (1/2)$           | $c'_2 \geq (9/2)$         | $x_1 = 0, x_2 = (260/3), x_3 = 0$ | $(1040/3) + (260/3)\partial c_2$    |

Tabelul 6.6.11

Este util de asemenea să vizualizăm dependența maximului funcției obiectiv de costul  $c'_2$ . Pentru aceasta, în expresiile din ultima coloană a tabelului 6.6.11 înlocuim  $\partial c_2 = c'_2 - 4$ . Rezultatul este o funcție convexă, liniară pe porțiuni:

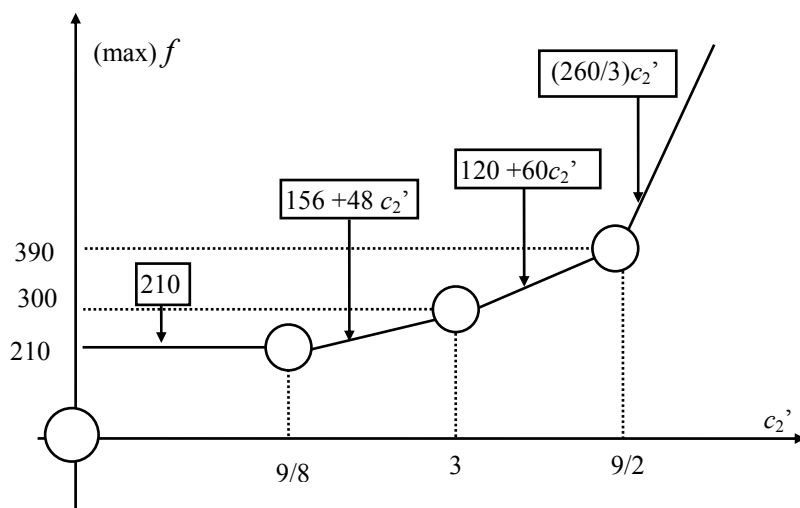


Fig.6.6.1

### 6.7 Programare parametrică

După cum s-a specificat deja în introducere, programarea parametrică are ca obiectiv studiul comportării optimului unui program liniar atunci când unele din elementele sale constitutive depind de un set de parametri.

Secțiunea nu introduce ceva esențialmente nou în raport cu problematica discutată anterior; într-adevăr, determinarea intervalelor de stabilitate ca și alte probleme în care anumite constante erau lăsate "libere", constituie exemple de analiză parametrică. O deosebire există totuși: postoptimizarea oferă o imagine "locală" asupra dependenței dintre soluția optimă a unui program liniar și elementele sale constitutive în timp ce programarea parametrică își propune să dea o imagine "globală" asupra acestei dependențe.

Obiectul precis al programării parametrice va fi prezentat în următoarele două cazuri relativ simple dar cu multe aplicații economice:

1) *Vectorul  $c$  al coeficienților funcției obiectiv depinde liniar de un parametru:*

$$P_c(\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sa se determine functia:} \\ \varphi(\lambda) = \max \{ c(\lambda)x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \quad , \lambda \in R \\ \text{unde:} \\ c(\lambda) = c^0 + \lambda c^1 \Leftrightarrow c_j(\lambda) = c_j^0 + \lambda c_j^1, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

2) Vectorul  $b$  al termenilor liberi depinde liniar de un parametru:

$$P_b(\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Sa se determine functia:} \\ \varphi(\lambda) = \{ \max cx \mid Ax = b(\lambda), x \geq 0 \} \quad , \lambda \in R \\ \text{unde:} \\ b(\lambda) = b^0 + \lambda b^1 \Leftrightarrow b_i(\lambda) = b_i^0 + \lambda b_i^1, i = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Indiferent de situație, domeniul valorilor admisibile ale parametrului  $\lambda$  poate fi mai mic decât  $R$ , funcție de specificul problemei. Atât  $P_c(\lambda)$  cât și  $P_b(\lambda)$  cu  $\lambda$  variabil în  $R$  se identifică cu niște familii de programe liniare uzuale, câte unul pentru fiecare valoare a lui  $\lambda$ . Toate programele din  $P_c(\lambda)$  au aceeași mulțime de soluții admisibile, numai funcția obiectiv se modifică "continuu", în timp ce programele din  $P_b(\lambda)$  au aceeași funcție obiectiv, mulțimea soluțiilor admisibile

deformându-se "continuu". Vom presupune că există cel puțin o valoare admisibilă  $\lambda_0$  pentru care programele corespunzătoare au optim finit; fără a restrânge generalitatea, putem considera că  $\lambda_0 = 0$ .

### 6.7.1 Parametrizarea vectorului coeficienților funcției obiectiv

În principiu, un program parametric de tipul  $P_c(\lambda)$ ,  $\lambda \in R$  se studiază astfel:

1) Cu ajutorul algoritmului simplex se rezolvă programul corespunzător valorii particulare  $\lambda_0 = 0$ :

$$P_c(0) \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \\ (\max) f = c^0 x \end{array} \right.$$

Fie  $B$  baza optimă a acestui program. Componentele bazice ale soluției optime  $x^*$  reunite în vectorul  $\bar{b} = B^{-1}b$  nu depind de  $\lambda$  și ca urmare  $x^*$  este o soluție de bază admisibilă pentru oricare dintre programele  $P_c(\lambda)$ ,  $\lambda \in R$ .

2) Recalculăm costurile reduse asociate soluției  $x^*$ , privită ca soluție de bază a programului "generic"  $P_c(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\bar{c}_j(\lambda) &= c^B(\lambda) B^{-1} A^j - c_j(\lambda) = [(c^0)^B B^{-1} A^j - c_j^0] + \lambda [(c^1)^B B^{-1} A^j - c_j^1] = \\ &= \bar{c}_j^0 + \lambda \bar{c}_j^1\end{aligned}$$

unde  $j \in J \equiv$  mulțimea indicilor coloanelor  $A^j$  care nu sunt în baza  $B$ . Știm din 1) că aceste costuri sunt nenegative pentru  $\lambda_0 = 0$ . Cercetăm dacă există și valori  $\lambda \neq 0$  pentru care ele rămân nenegative deci pentru care soluția  $x^*$  este optimă. Pentru aceasta:

3) Se rezolvă sistemul de inecuații liniare:

$$\bar{c}_j(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \bar{c}_j^0 + \lambda \bar{c}_j^1 \geq 0 \quad j \in J \quad (6.7.1)$$

Mulțimea soluțiilor acestui sistem este un interval  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  care va conține cu siguranță valoarea  $\lambda_0 = 0$ . Se conchide că pentru orice  $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  baza  $B$  și soluția  $x^*$  asociată sunt optime pentru programul  $P_c(\lambda)$  corespunzător.

4) Pentru  $\lambda < \underline{\lambda}$  cel puțin una din inecuațiile (6.7.1) este violată. Presupunând  $\lambda$  "foarte aproape" de  $\underline{\lambda}$  se găsește  $\bar{c}_k(\lambda) = \min \bar{c}_j(\lambda)$ .  $\bar{c}_k$  va fi cu siguranță  $< 0$ . Se actualizează  $B$  și  $x^*$  introducând în bază coloana  $A^k$  după care se repetă operațiile 2) și 3) determinându-se un alt interval de optimalitate de forma  $[\underline{\lambda}', \bar{\lambda}]$ .

5) Se repetă operația 4) - urmată de operațiile 2) și 3) - pînă la epuizarea "spre stînga" a domeniului valorilor admisibile ale parametrului  $\lambda$ , după care se iau în studiu, în manieră analoagă, valorile  $\lambda > \bar{\lambda}$ .

În final, domeniul valorilor admisibile ale lui  $\lambda$  este partiționat într-un număr finit de intervale printr-o secvență de puncte:

$$..... < \underline{\lambda}' < \underline{\lambda} < \bar{\lambda} < \bar{\lambda}' < .....$$

numite *puncte critice*, pe fiecare interval existând o singură bază optimă. Funcția  $\varphi(\lambda) = \max c(\lambda) \cdot x$  se dovedește a fi o funcție *convexă, liniară pe porțiuni*; De exemplu pe intervalul  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  avem:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i \in I} c_i(\lambda) \bar{b}_i = \sum_{i \in I} c_i^0 \bar{b}_i + \lambda \sum_{i \in I} c_i^1 \bar{b}_i$$

mulțimea  $I$  fiind ca de obicei mulțimea indicilor coloanelor baze.

**Exemplul 6.7.1** Considerăm programul parametric:

$$(P_c(\lambda)) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \\ \varphi(\lambda) = \max \{f = (2 + 3\lambda)x_1 + (3 + 2\lambda)x_2 + (5 + \lambda)x_3\} \end{cases} \quad \lambda \in R$$

Aducem problema la forma bună introducând variabilele de abatere  $x_4, x_5$  și variabilele artificiale  $x_6, x_7$ . Rezultă programul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 13 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 7 \\ (\max) f = (2 + 3\lambda)x_1 + (3 + 2\lambda)x_2 + (5 + \lambda)x_3 - Mx_6 - Mx_7 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

Rezolvăm problema corespunzătoare valorii  $\lambda = 0$ . Plecând cu baza  $[A^4, A^6, A^7]$ , în trei iterații se obține tabelul simplex:

| CB | B     | VVB  | 2<br>$\bar{A}^1$ | 3<br>$\bar{A}^2$ | 5<br>$\bar{A}^3$ | 0<br>$\bar{A}^4$ | 0<br>$\bar{A}^5$ | -M<br>$\bar{A}^6$ | -M<br>$\bar{A}^7$ |
|----|-------|------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 0  | $A^4$ | 1/2  | 1/2              | 0                | 0                | 1                | 0                | -1/2              | 0                 |
| 0  | $A^5$ | 3/2  | -5/2             | 2                | 0                | 0                | 1                | 1/2               | -1                |
| 5  | $A^3$ | 13/2 | 1/2              | 1                | 1                | 0                | 0                | 1/2               | 0                 |
|    | $f$   | 65/2 | 1/2              | 2                | *                | *                | *                | M+1/2             | M                 |

Tabelul 6.7.1

În continuare facem abstracție de coloanele "artificiale"  $\bar{A}^6$  și  $\bar{A}^7$  deoarece în fapt lucrăm cu forma standard a programului  $P_c(\lambda)$ . Recalculăm costurile reduse  $\bar{c}_1$  și  $\bar{c}_2$  în funcție de coeficienții "parametrizați" din funcția obiectiv:

$$\bar{c}_2(\lambda) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (5 + \lambda) \cdot 1 - (3 + 2\lambda) = 2 - \lambda$$

Variația semnului celor două mărimi poate fi urmărită în tabelul următor:

| $\lambda$      | $-\infty$   | $1/5$       | $2$         | $+\infty$   |
|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $c_1(\lambda)$ | + + + + + + | 0           | - - - - - - | - - - - - - |
| $c_2(\lambda)$ | + + + + + + | + + + + + + | 0           | - - - - - - |

Tabelul 6.7.2

*În concluzie, pentru orice  $\lambda \in (-\infty, 1/5]$  soluția asociată bazei  $[A^4, A^5, A^3]$  este optimă. Ea are componentele:*

$$x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 13/2$$

iar valoarea maximă a funcției obiectiv este:

$$\varphi(\lambda) = (\max)f = (5 + \lambda) \cdot \frac{3}{2} = \frac{65}{2} + \frac{13}{2} \cdot \lambda$$

Presupunem acum că  $\lambda > 1/5$  și "foarte aproape" de  $1/5$ . Din tabelul 6.7.2 rezultă că  $\bar{c}_1(\lambda) < 0$  astfel că soluția asociată bazei  $[A^4, A^5, A^3]$  nu mai este optimă. Introducem coloana  $A^1$  în baza curentă și efectuăm o iteratie simplex:

|              |       |                       | $2+3\lambda$         | $3+2\lambda$     | $5+\lambda$      | 0                | 0                |
|--------------|-------|-----------------------|----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| CB           | B     | VVB                   | $\overline{A}^1$     | $\overline{A}^2$ | $\overline{A}^3$ | $\overline{A}^4$ | $\overline{A}^5$ |
| 0            | $A^4$ | 1/2                   | 1/2                  | 0                | 0                | 4                | 0                |
| 0            | $A^5$ | 3/2                   | -5/2                 | 2                | 0                | 0                | 1                |
| $5+\lambda$  | $A^3$ | 13/2                  | 1/2                  | 1                | 1                | 0                | 0                |
| $f$          |       | $(65/2)+(3/2)\lambda$ | $(1/2)-(5/2)\lambda$ | $2-\lambda$      | *                | *                | *                |
| $2+3\lambda$ | $A^1$ | 1                     | 1                    | 0                | 0                | 2                | 0                |
| 0            | $A^5$ | 4                     | 0                    | 2                | 0                | 5                | 1                |
| $5+\lambda$  | $A^3$ | 6                     | 0                    | 1                | 1                | -1               | 0                |
| $f$          |       | $32+9\lambda$         | *                    | $2-\lambda$      | *                | $-1+5\lambda$    | *                |

Tabelele 6.7.3 - 6.7.4

În următorul tabel este dată variația semnului costurilor reduce  $\bar{c}_2(\lambda) = 2 - \lambda$  și  $\bar{c}_4(\lambda) = -1 + 5\lambda$  corespunzătoare bazei  $[A^1, A^5, A^3]$ :

| $\lambda$            | 1/5 | 2 | $+\infty$ |
|----------------------|-----|---|-----------|
| $\bar{c}_2(\lambda)$ | +   | + | -         |
| $\bar{c}_4(\lambda)$ | 0   | + | +         |

Tabelul 6.7.5

Deducem că pentru toți  $\lambda \in [1/5, 2]$ , soluția asociată bazei  $[A^1, A^5, A^3]$

$$x_1^* = 1, x_2^* = 0, x_3^* = 6$$

este soluția optimă a programului  $P_c(\lambda)$ , iar  $\varphi(\lambda) = 32 + 9\lambda$ .

Pentru  $\lambda > 2$  (și foarte aproape de 2 deși nu mai este necesar ...) constatăm că  $\bar{c}_2(\lambda) < 0$  deci soluția de mai sus nu mai este optimă. În tabelul simplex 6.7.4 vom introduce coloana  $A^2$  în baza curentă:

|              |       |                | $2+3\lambda$ | $3+2\lambda$ | $5+\lambda$ | 0                  | 0                 |
|--------------|-------|----------------|--------------|--------------|-------------|--------------------|-------------------|
| CB           | B     | VVB            | $\bar{A}^1$  | $\bar{A}^2$  | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$        | $\bar{A}^5$       |
| $2+3\lambda$ | $A^1$ | 1              | 1            | 0            | 0           | 2                  | 0                 |
| $3+2\lambda$ | $A^2$ | 2              | 0            | 1            | 0           | 5/2                | 1/2               |
| $5+\lambda$  | $A^3$ | 4              | 0            | 0            | 1           | -7/2               | -1/2              |
|              | $f$   | $28+11\lambda$ | *            | *            | *           | $-6+(15/2)\lambda$ | $-1+(1/2)\lambda$ |

Tabelul 6.7.6

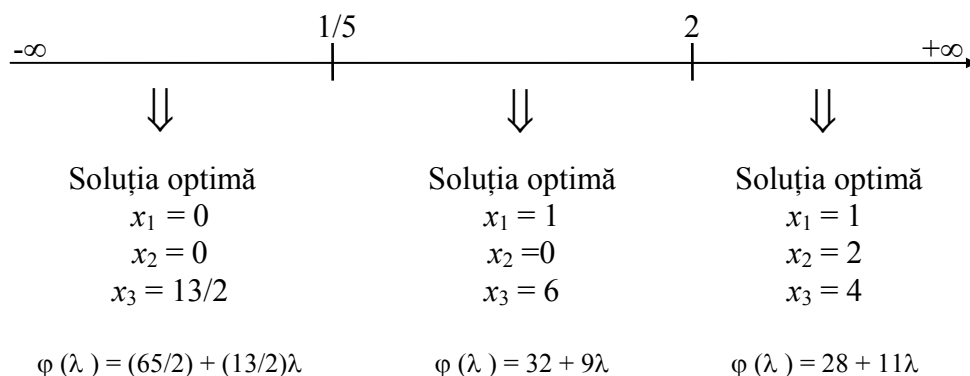
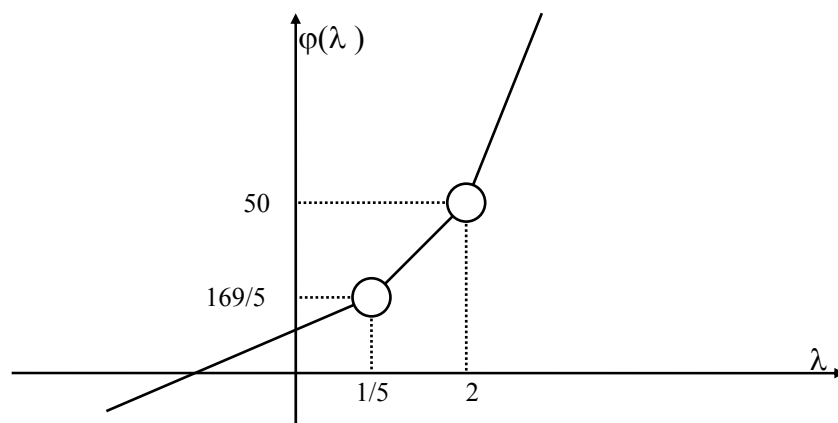
Se vede imediat că pentru  $\lambda \geq 2$  costurile reduce  $\bar{c}_4(\lambda) = -6 + (15/2)\lambda$  și  $\bar{c}_5(\lambda) = -1 + (1/2)\lambda$  sunt nenegative.

În concluzie, programele  $P_c(\lambda)$  cu  $\lambda \in [2, +\infty)$  au ca soluție optimă soluția asociată bazei  $[A^1, A^2, A^3]$ :

$$x_1^* = 1, x_2^* = 2, x_3^* = 4$$

Valoarea maximă a funcției obiectiv este:  $\varphi(\lambda) = 28 + 11\lambda$ .

Următoarea diagramă redă sintetic rezultatele studiului

**Figura 6.7.1****Figura 6.7.2**

În figura 6.7.2 este vizualizată variația valorii maxime a funcției obiectiv în raport cu parametrul  $\lambda$ . Se confirmă faptul, deja anunțat, potrivit căruia  $\varphi(\lambda)$  este o funcție convexă, liniară pe porțiuni.

### 6.7.2 Parametrizarea vectorului termenilor liberi

Un program parametric de tipul  $P_b(\lambda)$ ,  $\lambda \in R$  se studiază în mod asemănător:

I) Cu ajutorul algoritmului simplex se rezolvă programul corespunzător valorii  $\lambda_0 = 0$ :

$$P_b(0) \begin{cases} Ax = b^0 \\ x \geq 0 \\ (\max) f = cx \end{cases}$$

De această dată, costurile reduse  $\bar{c}_j = c^B B^{-1} A^j - c_j, j \in J$  corespunzătoare bazei optime B nu depind de  $\lambda$  și ca urmare B și soluția de bază asociată sunt dual admisibile pentru oricare din programele  $P_b(\lambda), \lambda \in R$ .

2) Se determină vectorul componentelor bazice ale soluției programului "generic"  $P_b(\lambda)$ , asociată bazei B:

$$x^B(\lambda) = B^{-1}b(\lambda) = B^{-1}b^0 + \lambda B^{-1}b^1 = \bar{b}^0 + \lambda \bar{b}^1 \Leftrightarrow x_i(\lambda) = \bar{b}_i^0 + \lambda \bar{b}_i^1 \quad (6.7.2)$$

unde  $i \in I \equiv$  mulțimea indicilor coloanelor  $A^i$  din B.

Ipoteza ne asigură că aceste componente sunt nenegative pentru  $\lambda_0 = 0$ . Cercetăm dacă există și valori  $\lambda \neq 0$  pentru care aceste componente sunt în continuare nenegative. Pentru acele valori  $\lambda$ , soluția asociată bazei B este soluția optimă a programului  $P_b(\lambda)$  corespunzător. Drept care:

3) Se rezolvă sistemul de inecuații liniare:

$$x_i(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_i^0 + \lambda \bar{b}_i^1 \geq 0 \quad i \in I \quad (6.7.3)$$

Mulțimea soluțiilor acestui sistem va fi un interval  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  care în mod cert conține și valoarea particulară  $\lambda_0 = 0$ , conform celor amintite mai sus. În concluzie oricare ar fi  $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  soluția asociată bazei B este soluție optimă pentru programul  $P_b(\lambda)$ .

4) În situația în care  $\lambda \neq -\infty$ , fie  $\lambda < \underline{\lambda}$ . Cel puțin una din inecuațiile (6.7.3) nu va mai fi satisfăcută și ca urmare soluția asociată bazei B nu mai este admisibilă. Presupunând  $\lambda$  "foarte aproape" de  $\underline{\lambda}$  se determină:

$$x_r(\lambda) = \min x_i(\lambda) \quad (\text{cu siguranță } x_r(\lambda) < 0 !)$$

Dacă toate elementele  $\bar{a}_{rj}$  ( $j \in J \equiv$  mulțimea indicilor coloanelor din  $A$  care nu sunt în  $B$ ) sunt nenegative, programele  $P_b(\lambda)$  cu  $\lambda < \underline{\lambda}$  sunt incompatibile. Altminteri se efectuează o iterație cu algoritmul simplex dual eliminând din bază coloana  $A'$ . Pentru noua bază se repetă operațiile 2) și 3) de mai sus determinându-se un alt interval  $[\underline{\lambda}', \bar{\lambda}]$  de admisibilitate - deci de optimalitate - pentru soluția asociată.

5) Se repetă operația 4) - urmată de operațiile 2) și 3) până la epuizarea "spre stânga" a domeniului valorilor admisibile ale parametrului  $\lambda$  după care se cercetează în manieră analoagă valorile  $\lambda > \bar{\lambda}$ .

Ca și în cazul precedent se obține un șir de intervale consecutive delimitate de *punctele critice*:

$$..... < \underline{\lambda}' < \underline{\lambda} < \bar{\lambda} < \bar{\lambda}' < .....$$

Pe fiecare din aceste intervale există o singură bază optimă sau nici una (a doua posibilitate nu poate avea loc decât în cazul primului și ultimului interval !) iar maximul funcției obiectiv, adică funcția  $\varphi(\lambda)$ , este liniară pe intervalul respectiv. De exemplu, pe intervalul  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ ,  $\varphi(\lambda)$  are expresia:

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i \in I} c_i x_i(\lambda) = \sum_{i \in I} c_i \bar{b}_i^0 + \lambda \sum_{i \in I} c_i \bar{b}_i^1$$

"Global",  $\varphi(\lambda)$  apare ca o *funcție convexă, liniară pe porțiuni*.

**Exemplul 6.7.2** Considerăm programul parametric:

$$P_b(\lambda) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 + 2\lambda \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 + \lambda \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 + 2\lambda \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \\ (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

După adăugarea variabilelor de abatere și artificiale pentru crearea bazei unitare de start se obține programul în formă bună:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 + 2\lambda \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 13 + \lambda \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 5 + 2\lambda \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7 \\ (\max) f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - Mx_6 - Mx_7 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

Se constată că problema particulară, corespunzătoare valorii  $\lambda_0 = 0$  coincide cu cea rezolvată în exemplul 6.7.1. Reamintim că în trei iterații a fost obținută baza optimă  $B = [A^4, A^5, A^3]$ . Vom determina acum soluția programului "generic"  $P_b(\lambda)$  asociată aceleiași baze, folosind formula (6.7.2). Avem:

$$b(\lambda) = \begin{bmatrix} 7 + 2\lambda \\ 13 + \lambda \\ 5 + 2\lambda \end{bmatrix} = b^0 + \lambda b^1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \bar{b}^0 = B^{-1}b^0 = x^B(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}^1 = [B^{-1} = [\bar{A}^4, \bar{A}^6, \bar{A}^7]]b^1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

astfel că:

$$x^B(\lambda) = \begin{bmatrix} x_4(\lambda) \\ x_5(\lambda) \\ x_3(\lambda) \end{bmatrix} = \bar{b}^0 + \lambda \bar{b}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\lambda \\ \frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix}$$

Deoarece costurile reduse asociate bazei B nu depind de  $\lambda$  și sunt nenegative, soluția calculată este dual admisibilă oricare ar fi  $\lambda \in R$ . Ea va fi optimă pentru toți acei  $\lambda$  pentru care este și admisibilă. Variația semnului componentelor vectorului  $x^B(\lambda)$  poate fi urmărită în următorul tabel:

| $\lambda$      | $-\infty$ | -13 | $-(1/3)$ | 1 | $+\infty$ |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----------------|-----------|-----|----------|---|-----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4(\lambda)$ | -         | -   | -        | 0 | +         | + | + | + | + | + | + | + | + |
| $x_5(\lambda)$ | +         | +   | +        | + | +         | + | + | + | + | 0 | - | - | - |
| $x_3(\lambda)$ | -         | -   | -        | 0 | +         | + | + | + | + | + | + | + | + |

Tabelul 6.7.7

din care rezultă că:

Pentru toți  $\lambda \in [-(1/3), 1]$  programul parametric  $P_b(\lambda)$  are soluția optimă:

$$x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{13}{2} + \frac{1}{2}\lambda \quad \text{cu:} \quad \varphi(\lambda) = (\max)f = \frac{65}{2} + \frac{1}{2}\lambda.$$

Dacă  $\lambda$  este  $< -(1/3)$  și foarte aproape de  $-(1/3)$  din tabelul 6.7.7 rezultă că

|    |       |                         | 2           | 3           | 5           | 0           | 0           |
|----|-------|-------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| CB | B     | VVB                     | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ |
| 0  | $A^4$ | $(1/2) + (3/2)\lambda$  | 1/2         | 0           | 0           | 1           | 0           |
| 0  | $A^5$ | $(3/2) - (3/2)\lambda$  | -5/2        | 2           | 0           | 0           | 1           |
| 5  | $A^3$ | $(13/2) + (1/2)\lambda$ | 1/2         | 1           | 1           | 0           | 0           |
|    | $f$   | $(65/2) + (5/2)\lambda$ | 1/2         | 2           | *           | *           | *           |

Tabelul 6.7.8

numai  $x_4(\lambda)$  este  $< 0$ ; soluția asociată bazei  $[A^4, A^5, A^3]$  nu mai este admisibilă dar rămâne dual admisibilă, așa cum se vede din tabelul simplex 6.7.8; se mai constată că în linia " $A^4$ " a acestui tabel nu există nici o valoare negativă.

În concluzie, oricare ar fi  $\lambda < -(1/3)$  programul parametric  $P_b(\lambda)$  este incompatibil.

Presupunem acum că  $\lambda > 1$ . Din tabelul 6.7.7 rezultă că  $x_5(\lambda) < 0$  și din nou soluția asociată bazei  $[A^4, A^5, A^3]$  nu mai este admisibilă fiind în continuare dual admisibilă. Examinând tabelul simplex 6.7.8 se constată că se poate efectua o iterație a algoritmului simplex dual. Obținem:

|    |       |                           | 2           | 3           | 5           | 0           | 0           |
|----|-------|---------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| CB | B     | VVB                       | $\bar{A}^1$ | $\bar{A}^2$ | $\bar{A}^3$ | $\bar{A}^4$ | $\bar{A}^5$ |
| 0  | $A^4$ | $(4/5) + (6/5)\lambda$    | 0           | 2/5         | 0           | 1           | 1/5         |
| 2  | $A^1$ | $-(3/5) + (3/5)\lambda$   | 1           | -4/5        | 0           | 0           | -2/5        |
| 5  | $A^3$ | $(34/5) + (1/5)\lambda$   | 0           | 7/5         | 1           | 0           | 1/5         |
|    | $f$   | $(164/5) + (11/5)\lambda$ | *           | 12/5        | *           | *           | 1/5         |

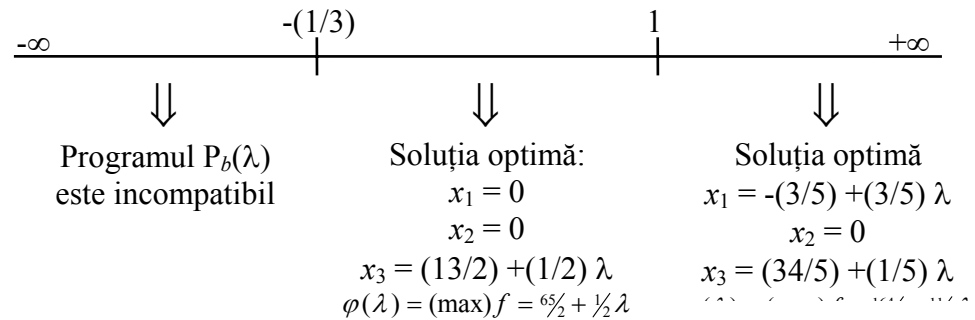
Tabelul 6.7.9

Se vede imediat că dacă  $\lambda \geq 1$  soluția asociată bazei  $[A^4, A^1, A^3]$  este admisibilă. În concluzie:

Pentru  $\lambda \geq 1$  programul parametric  $P_b(\lambda)$  are soluția optimă:

$$x_1^* = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\lambda, x_2^* = 0, x_3^* = \frac{34}{5} + \frac{1}{5}\lambda \text{ cu: } \varphi(\lambda) = (\max)f = \frac{164}{5} + \frac{11}{5}\lambda$$

Rezultatele studiului sunt sintetizate în diagrama din fig. 6.7.3. Propunem cititorului să vizualizeze grafic dependența maximului funcției obiectiv de parametrul  $\lambda$ ; va constata ușor că  $\varphi(\lambda)$  este o funcție convexă, liniară pe porțiuni.



**Figura 6.7.3**