CAPITOLUL 7
EXEMPLE PRACTICE DE MODELARE A ACTIVITĂȚILOR FIRMEI

7-1. O mică firmă produce bunurile alimentare G_1, G_2, G_3 folosind trei materii prime agricole de bază R_1, R_2, R_3. Necesarul de resurse, în kg, pentru realizarea unui kilogram din fiecare din bunurile G_1, G_2, G_3 sunt indicate în tabelul 7.1.

Tabelul 7.1

Bunuri / Resurse	G_1	G_2	G_3
R_1	2	4	5
R_2	1	3	2
R_3	2	1	1

Pentru ziua următoare există în stoc 45 kg din R_1, 30 kg din R_2 şi 20 kg din R_3. Profiturile sunt de 7, 9, 12 unități monetare pe kilogramul din G_1, G_2, respectiv G_3. Firma livrează bunul G_1 în cutii de ½ kg, bunul G_2 în cutii de 1 kg şi bunul G_3 în cutii de 2 kg iar desfacerea este asigurată pentru tot ceea ce se produce.

1) Scrieți un program liniar în numere întregi pentru determinarea programului de activitate al firmei în ziua următoare având ca obiectiv maximizarea profitului.

2) Cum se modifică programul inițial dacă din bunul G_1 nu trebuie să se producă mai mult de zece cutii?

3) Cum se modifică programul inițial dacă din bunul G_1 se pot produce cel mult zece cutii iar din G_3 cel puțin trei?

4) Deoarece resursele R_1, R_2, R_3 sunt foarte perisabile firma este interesată în a le valorifica cât mai bine. Cum se poate modela acest deziderat?

5) Determinați variantele optime de program de activitate aferente celor patru situații date. Faceți o analiză comparată a soluțiilor obținute.

Soluție

1) Dacă se notează cu x_1, x_2, x_3 numărul de cutii conținând bunurile G_1, G_2 respectiv G_3 ce ar putea fi produse din resursele existente, atunci cantitățile din cele trei bunuri – măsurate în kg – vor fi $\frac{1}{2}x_1, x_2$ respectiv $2x_3$. Încadrarea consumurilor din resursele R_1, R_2, R_3 în stocurile disponibile conduce la restricțiile:

$$2\cdot\frac{1}{2}x_1+4\cdot x_2+5\cdot 2x_3\le 45$$
$$1\cdot\frac{1}{2}x_1+3\cdot x_2+2\cdot 2x_3\le 30$$
$$2\cdot\frac{1}{2}x_1+1\cdot x_2+1\cdot 2x_3\le 20$$

Variabilele x_1, x_2, x_3 trebuie să satisfacă cerințele naturale:

$$x_1\ge 0\ ,\ x_2\ge 0\ ,\ x_3\ge 0\ \text{, întregi}$$

Se urmăreşte maximizarea profitului a cărui expresie este:

$$7\cdot\frac{1}{2}x_1+9\cdot x_2+12\cdot 2x_3=3.5x_1+9x_2+24x_3$$

Se obține programul liniar în numere întregi:

$$(P_1)\begin{cases}(\max)f=3.5x_1+9x_2+24x_3\\ x_1+4x_2+10x_3\le 45\\ x_1+6x_2+8x_3\le 60\\ x_1+x_2+2x_3\le 20\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\textit{, intregi}\end{cases}$$

2) La modelul (P_1) se adaugă restricția $x_1\le 10$ obținându-se modelul (P_2).

3) La modelul (P_1) se adaugă restricțiile $x_1\le 10$, $x_3\ge 3$ obținându-se modelul (P_3).

4) În notațiile modelului (P_1), cantitățile de resurse neconsumate au expresiile:

$$45-(2\cdot\frac{1}{2}x_1+4\cdot x_2+5\cdot 2x_3)=45-(x_1+4x_2+10x_3)\ge 0 \qquad \text{resursa } \mathrm{R}_1$$

$$30-(1\cdot\frac{1}{2}x_1+3\cdot x_2+2\cdot 2x_3)=30-\frac{1}{2}(x_1+6x_2+8x_3)\ge 0 \qquad \text{resursa } \mathrm{R}_2$$

$$20-(2\cdot\frac{1}{2}x_1+1\cdot x_2+1\cdot 2x_3=20-(x_1+x_2+2x_3)\ge 0 \qquad \text{resursa } \mathrm{R}_3$$

Valorificarea cât mai bună a celor trei resurse are loc atunci când, determinarea valorilor variabilelor x_1, x_2, x_3 se face astfel încât diferențele de mai sus să fie cât mai mici. Vom realiza acest lucru minimizând cea mai mare dintre aceste diferențe:

$$\begin{cases} \qquad\qquad (\min) y \\ unde: \\ \quad y = \max\{45-(x_1+4x_2+10x_3)\,;\,30-\frac{1}{2}(x_1+6x_2+8x_3)\,;\,20-(x_1+x_2+2x_3)\} \\ \quad x_1, x_2, x_3 \text{ satisfac toate conditiile din modelul } (P_1) \end{cases} \quad (1)$$

Pentru a transforma (1) într-un program liniar uzual înlocuim relația de definiție a variabilei y cu inegalitățile:

$$45-(x_1+4x_2+10x_3) \le y$$

$$30-\frac{1}{2}(x_1+6x_2+8x_3) \le y$$

$$20-(x_1+x_2+2x_3) \le y$$

Tot din relația de definiție a lui y rezultă că dacă x_1, x_2, x_3 sunt întregi atunci y este sau un număr întreg sau un număr cu partea fracționară 0.5; în consecință, numărul $z = 2y$ va fi cu siguranță întreg. Înlocuind mai sus $y = \frac{z}{2}$ obținem, pentru modelul (P_1), următoarea formă uzuală:

$$(P_4)\begin{cases} \qquad (\min)\ 0.5z \\ x_1+4x_2+10x_3 \le 45 \\ x_1+6x_2+8x_3 \le 60 \\ x_1+x_2+2x_3 \le 20 \\ 2x_1+8x_2+20x_3+z \ge 90 \\ x_1+6x_2+8x_3+z \ge 60 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+z \ge 40 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, z \ge 0 \text{ , intregi} \end{cases}$$

5) Programele de activitate optime corespunzătoare modelelor dezvoltate la punctele 1), 2), 3), 4) sunt prezentate în tabelul 7.2:

Tabelul 7.2

Model	Program optim de activitate - cantitatea de produs (în cutii şi kg)						Resurse consumate (în kg şi % din stocul disponibil)						Profit total	
	G_1		G_2		G_3		R_1		R_2		R_3			
	cutii	kg	cutii	kg	cutii	kg	kg	%	kg	%	kg	%	u.m.	%
1	14	7	-	-	3	6	44	97.8	19	63.3	20	100	121	100
2	10	5	1	1	3	6	44	97.8	20	66.7	17	85	116	95.9
3	9	4.5	3	3	2	4	41	91.1	21.5	71.7	16	80	115.5	95.5
4	12	6	8	8	-	-	44	97.8	30	100	20	100	114	94.2

Prin urmare, cel mai mare profit care s-ar obține din resursele date este de 121 u.m.; această valoare poate fi luată ca punct de referință. Soluția corespunzătoare are unele inconveniente: nu produce bunul G_2 şi aproape o treime din resursa R_2 nu se consumă. Încercarea de diversificare a producției (vezi soluțiile modelelor (P_2) şi (P_3)) reduce profitul cu câteva procente şi duce la creşterea cantităților de resurse neutilizate. Ultima variantă de program de activitate asigură o utilizare aproape totală a resurselor iar profitul aferent este foarte bun, cu numai 5.8% mai mic decât valoarea maximă posibilă. Totuşi, ea nu prevede producerea bunului G_3 şi lucrul acesta s-ar putea să conteze în decizia finală, decizie care va ține seama şi de cererea din acest bun.

7-2. Un fermier are 10 acri de pământ arabil pe care vrea să cultive grâu şi lucernă. El are şi un grajd care poate adăposti până la 15 vaci de lapte. Un acru produce 100 buşeli (bushels) de grâu şi 5 tone de paie. Producerea unei tone de lucernă necesită 0.15 acri de pământ (irigat şi cosit de mai multe ori într-un an). Lucerna şi paiele sunt destinate hrănirii animalelor. Într-un an fiecare vacă dă în medie 20000 funți (pounds) de lapte şi are nevoie de 15 tone de lucernă şi 3 tone de paie. Grâul poate fi vândut cu 5$ buşelul iar laptele cu 0.15$ funtul. Deoarece proprietatea este mică suprafețele cultivate cu grâu şi lucernă trebuie să fie exprimate printr-un număr întreg de acri. Câți acri de pământ vor fi cultivați cu grâu şi câți cu lucernă şi câte vaci ar trebui să cumpere fermierul pentru ca venitul rezultat din vânzarea grâului şi a laptelui să fie maxim?

Soluție

- Variabilele modelului.

  x_1, $x_2 \equiv$ suprafețele (în acri) cultivate cu grâu, respectiv lucernă;

  $x_3 \equiv$ numărul vacilor de lapte pe care fermierul le poate întreține.

- Restricții:
  - Încadrarea în suprafața disponibilă de teren arabil respectiv în capacitatea grajdului:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_3 \leq 15$$

  - Asigurarea hranei animalelor. Un calcul simplu arată că producția de lucernă este de 20 t pe acru. Rezultă relațiile:

$$5x_1 \geq 3x_3 \quad \text{(acoperirea necesarului de paie)}$$

$$20x_2 \geq 15x_3 \quad \text{(acoperirea necesarului de lucernă)}$$

- Funcția obiectiv.

Fermierul poate produce 100x_1 bușeli de grâu și 20000x_3 funți de lapte și poate obține din vânzarea acestora venitul:

$$f = 5 \cdot (100x_1) + 0.15 \cdot (20000x_3) = 500x_1 + 3000x_3 \quad [\$]$$

- Ipoteza implică condițiile: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, întregi.

Modelul are următoarea soluție optimă întreagă:

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 6 \quad (\max) f = 20500\,\$$$

Prin urmare, terenul va fi cultivat jumătate cu grâu și jumătate cu lucernă iar nutrețurile recoltate ar fi suficiente pentru hrănirea a 6 vaci de lapte. S-ar obține 500 bușeli de grâu și 120000 funți de lapte care prin vânzare produc un venit de 20500$.

7-3. O fabrică de ciment produce două mărci de ciment C_1 și C_2. Pentru următoarea săptămână sunt programate realizarea a 1500t ciment C_1 și a 2400t ciment C_2. Fabrica are două instalații I_1 si I_2 cu următoarele caracteristici:

- Pe fiecare ciclu de fabricație instalația I_1 poate produce 80t ciment C_1 sau 120t ciment C_2, în timp ce instalația I_2 poate produce 160t ciment C_1 sau 180t ciment C_2;
- Un ciclu de fabricație durează 8 ore pentru cimentul C_1 și 6 ore pentru cimentul C_2 indiferent de instalația producătoare;

- În următoarea săptămână fondurile de timp productiv ale celor două instalații sunt de 120 ore pentru I_1 şi de 100 ore pentru I_2;
- Costurile de producție (u.m. pe tona de ciment) variază în funcție de marca cimentului şi instalația producătoare aşa cum rezultă din tabelul 7.3.

Tabelul 7.3

	I_1	I_2
C_1	30	25
C_2	20	15

Cum vor fi folosite cele două instalații pentru ca programul săptămânii următoare să fie realizat cu costuri minime?

Soluție

Este vorba de o problemă de repartizare a sarcinilor de producție pe utilaje (capacități de producție) prelucrătoare. Formalizarea uzuală fixează ca variabile cantitățile de produse repartizate pentru fabricația propriu zisă pe unul sau altul dintre utilajele capabile să facă acest lucru. În cazul de față trebuie să se țină seama de faptul că producția de ciment nu este rezultatul unui proces continuu ci a unuia discret, organizat în cicluri de fabricație. În consecință vom lua ca variabile:

x_{ij} = numărul ciclurilor de fabricație programate pe instalația I_j în care se produce ciment cu marca C_i , i = 1,2 j = 1,2;

În tabelul 7.4 este indicată programarea acestor cicluri de fabricație, programare corespunzătoare unui cost total de producție minim de 80400 u.m.

Tabelul 7.4

Instalație / Marca cimentului	I_1		I_2		Cantitate totală (tone)
	Cicluri	Producție (tone)	Cicluri	Producție (tone)	
C_1	**13**	1040	**3**	480	1520
C_2	**2**	240	**12**	2160	2400

7-4. O fabrică de hârtie produce hârtie de ambalaj în rulouri cu lățimile de 10p şi 20p (1p = 1 picior ≈ 30 cm). Rulourile au lungimi diferite dar acest lucru nu are nici o importanță pentru că benzile de hârtie de aceeaşi lățime pot fi puse una în continuarea alteia putându-se astfel acoperi orice lungime cerută. Fabrica a primit următoarele trei comenzi:

Comanda 1: 20000p în rulouri cu lățimea de 9p;

Comanda 2: 30000p în rulouri cu lățimea de 7p;

Comanda 3: 10000p în rulouri cu lățimea de 5p.

Rulourile cu lățimea cerută în comenzi se obțin din rulourile standard prin tăiere. Cum pot fi satisfăcute aceste comenzi astfel încât pierderile rezultate din tăiere să fie cât mai mici?

Soluție

Este vorba de o problemă de croire de un tip special şi formalizarea ei necesită câteva pregătiri.

Rulourile standard sunt în esență nişte dreptunghiuri, unele cu lățimea de 10p şi altele cu lățimea de 20p, de diferite lungimi nespecificate. Deoarece două rulouri de aceeaşi lățime pot fi puse "cap la cap" (rezultatul fiind un dreptunghi a cărui lungime este egală cu suma lungimilor rulourilor concatenate) putem presupune că în problemă există numai doi suporți dreptunghiulari: unul cu lățimea de 10p şi celălalt cu lățimea de 20p, ambele de lungime suficient de mare pentru a acoperi cererile.

Reperele – în număr de trei – sunt tot nişte dreptunghiuri cu lățimi precise – 9p, 7p, respectiv 5p – şi cu diferite lungimi la fel nespecificate; de fapt, lungimea unui asemenea dreptunghi este egală cu lungimea ruloului standard din care a fost tăiat. Numărul rulourilor cu o anumită lățime cerută, să zicem de 9p, rezultate din tăierea rulourilor standard nu are nici o relevanță; important este ca lungimea totală a acestor rulouri să fie de cel puțin 20000p, cât s-a cerut în comanda 1! În consecință, orice rulou cu lățimea de 9p, rezultat din tăierea unui rulou standard, va fi identificat ca reprezentând reperul 1; analog reperele 2 şi 3 vor fi reprezentate de orice rulou cu lățimea de 7p, respectiv 5p, rezultate din tăierea unor suporți standard.

Este evident faptul că un rulou standard poate fi tăiat în rulouri cu lățimile comandate în mai multe moduri, numite rețete de croire. S-au notat cu A^{11},A^{12},… rețetele de croire ale unui rulou cu lățimea de 10p şi cu A^{21},A^{22},… cele ale unui rulou cu lățimea de 20p.

Unele rețete de croire produc "resturi", altele nu. De exemplu, prin tăierea unui rulou standard de 10p lățime în două rulouri cu lățimea de 5p nu rezultă nici un rest (figura 7.1a). Dar dacă dintr-un rulou standard de 20p lățime se taie un rulou cu lățimea de 7p şi două rulouri cu lățimea de 5p rămâne o bandă de hârtie cu lățimea de 3p care "se aruncă" (figura 7.1b).

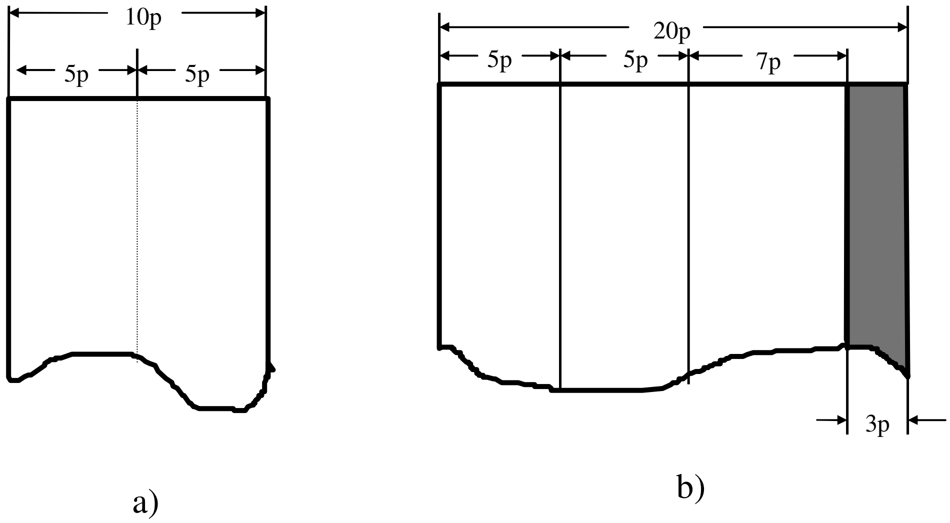

Figura 7.1

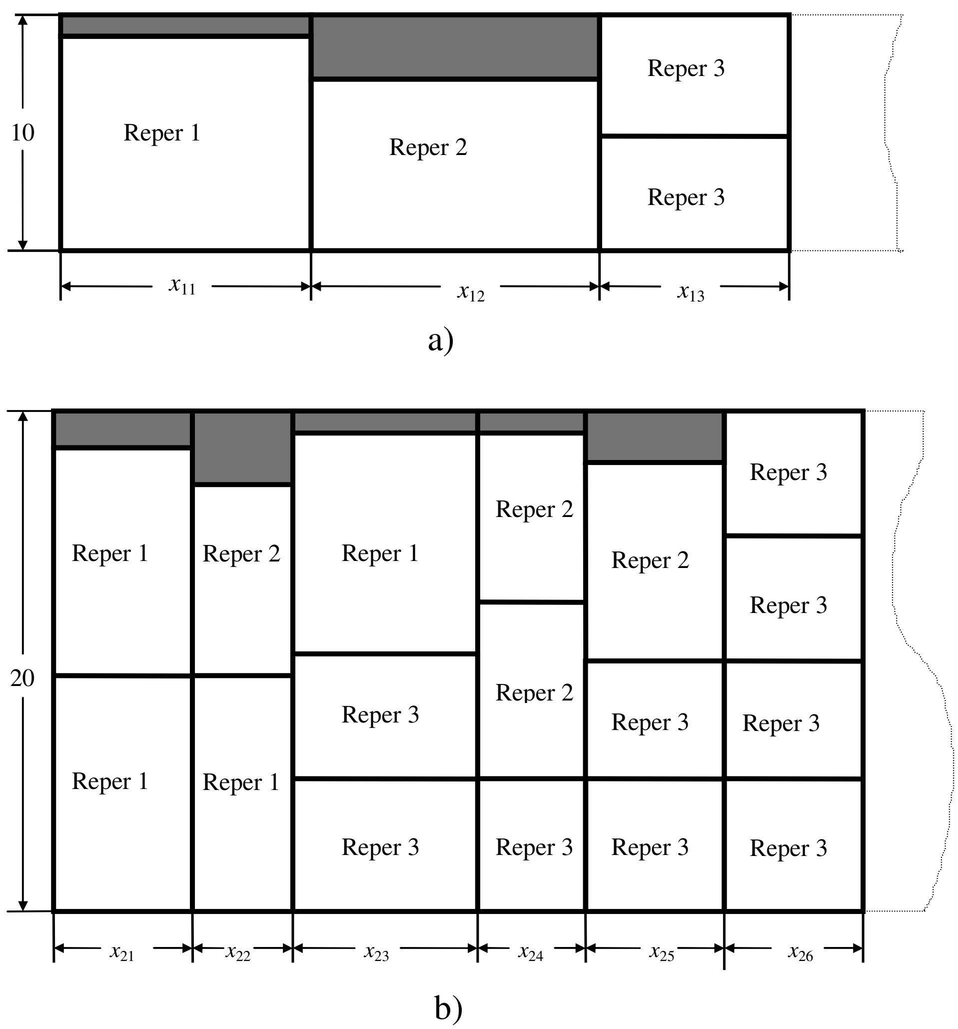

Figura 7.2

În tabelul 7.5 sunt listate (lexicografic) rețetele de croire ale rulourilor standard cu specificarea, acolo unde este cazul, a lățimii “restului”:

Tabelul 7.5

Rulou standard	10p			20p					
Rețeta / Reper	A^{11}	A^{12}	A^{13}	A^{21}	A^{22}	A^{23}	A^{24}	A^{25}	A^{26}
1 (lățime 9p)	1	0	0	2	1	1	0	0	0
2 (lățime 7p)	0	1	0	0	1	0	2	1	0
3 (lățime 5p)	0	0	2	0	0	2	1	2	4
Lățime rest (inches)	1	3	0	2	4	1	1	3	0

Elaborarea modelului matematic. Din acest moment rulourile standard cu aceeaşi lățime se consideră concatenate în cei doi suporți de lungime “infinită”: suportul 1 cu lățimea de 10p şi suportul 2 cu lățimea de 20p. Introducem variabilele:

x_{ij} = lungimea porțiunii din suportul i (i = 1, 2) tăiată după rețeta A^{ij} (j = 1, 2, 3 pentru i = 1 şi j = 1, 2,.., 6 pentru i = 2); vezi figurile 7.2a) şi b).

Lungimile x_{ij} trebuie să satisfacă condiția:

- suma lungimilor rulourilor (dreptunghiurilor) cu lățimea de 9p, 7p sau 5p este cel puțin egală cu comanda corespunzătoare adică cu 20000p, 30000p respectiv 10000p.

Astfel, cele 20000p de hârtie cu lățimea de 9p trebuie să rezulte din concatenarea următoarelor dreptunghiuri (toate cu lățimea de 9p):

- un dreptunghi cu lungimea x_{11};
- un dreptunghi cu lungimea x_{21};
- un dreptunghi cu lungimea x_{22};
- un dreptunghi cu lungimea x_{23}.

În consecință:

$$x_{11} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 20000$$

În mod analog, pentru celelalte două comenzi rezultă inegalităţile:

$$x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} \geq 30000$$

$$2x_{13} + 2x_{23} + x_{24} + 2x_{25} + 4x_{26} \geq 10000$$

Introducând variabilele de abatere y_1, y_2, y_3 obţinem sistemul:

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} - y_1 = 20000 \\ x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} - y_2 = 30000 \\ 2x_{13} + 2x_{23} + x_{24} + 2x_{25} + 4x_{26} - y_3 = 10000 \end{cases} \quad (1)$$

Variabila y_1 reprezintă lungimea benzii de hârtie cu lăţimea de 9p tăiată în plus faţă de cele 20000p din comanda 1; analog, y_2, y_3 arată ce s-a tăiat în plus faţă decât s-a cerut în comenzile 2 respectiv 3.

În afara cerinţei fireşti ca variabilele x_{ij} să ia numai valori nenegative vom impune condiţia ca valorile acestor variabile să fie întregi, unitatea de măsură – piciorul – fiind prea mică pentru a mai avea în vedere şi fracţiile. Automat şi variabilele y_k vor lua numai valori întregi. În concluzie, condiţiile explicite impuse variabilelor introduse sunt:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ , } y_k \geq 0 \text{ , întregi} \quad (2)$$

În ceea ce priveşte obiectivul urmărit – minimizarea pierderilor – formalizarea se poate face pe două direcţii:

- minimizarea lungimii totale a rulourilor standard tăiate, lungime reprezentată de funcţia:

$$f_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \quad \rightarrow \text{ min} \quad (3)$$

- minimizarea ariei restului total. Restul total are două componente:

- restul inutilizabil compus din toate benzile de hârtie rezultate din tăiere şi care au o lăţime mai mică decât 5p – cea mai mică lăţime comandată. Aceste benzi sunt vizualizate în figurile 7.2a) şi 7.2b) prin dreptunghiurile haşurate. Suma ariilor lor este dată de expresia:

$$S_1 = x_{11} + 3x_{12} + 2x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + x_{24} + 3x_{25} \quad (4)$$

- restul utilizabil compus din benzile de hârtie cu lățimile de 9p,7p,5p tăiate peste cât s-a comandat; lungimile acestor benzi sunt y_1,y_2,y_3 astfel că aria lor totală este dată de expresia:

$$S_2 = 9y_1 + 7y_2 + 5y_3 \qquad (5)$$

În consecință, minimizarea restului total înseamnă minimizarea sumei $S_1 + S_2$ adică a funcției:

$$f_2 = x_{11} + 3x_{12} + 2x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + x_{24} + 3x_{25} + 9y_1 + 7y_2 + 5y_3 \qquad (6)$$

Combinând restricțiile (1) şi condițiile explicite(2) cu fiecare din funcțiile f_1 şi f_2 obținem două probleme de programare liniară în numere întregi.

Următoarea soluție minimizează atât pe f_1 cât şi pe f_2 (există şi alte soluții optime!):

$$x_{21} = 10000\text{p}\ ,\ x_{24} = 15000\text{p}\ ,\ x_{ij} = 0 \text{ în rest}\ ,\ y_1 = y_2 = 0\ ,\ y_3 = 5000\text{p}$$

Conform acestei soluții un număr de rulouri standard cu lățimea de 20p însumând 10000p în lungime se vor tăia după rețeta A^{21}; un alt lot de rulouri standard de aceeaşi lățime în lungime totală de 15000p se va tăia după rețeta A^{24}. Se observă că rulourile standard cu lățimea de 10p nu sunt folosite. Cererile sunt acoperite în totalitate şi există chiar şi un surplus de 5000p de hârtie cu lățimea de 5p.

Rulourile standard tăiate au o lungime totală de 25000p şi o suprafață de $25000 \times 20 = 500000\text{p}^2$ ($\text{p}^2 \equiv$ picior pătrat). Restul inutilizabil are aria: $10000 \times 2 + 15000 \times 1 = 35000\text{p}^2$; restul utilizabil are aria $5000 \times 5 = 25000\text{p}^2$. Prin urmare restul total are aria de 60000p^2 şi reprezintă 12% din suprafața croită.

Observând că surplusul de 5000p de hârtie cu lățimea de 5p este foarte mare – 50% din comanda 3! – s-a procedat în continuare la minimizarea în exclusivitate a restului utilizabil reprezentat de suma S_2 din (5), găsindu-se soluția:

$$x_{12} = 10000\text{p}\ ,\ x_{21} = 10000\text{p}\ ,\ x_{24} = 10000\text{p}$$

Conform acestei soluții, lungimea totală a rulourilor standard tăiate este acum de 30000p, utilizându-se ambele tipuri de rulouri standard dar suprafața totală croită:

$$10000 \times 10 + 10000 \times 20 + 10000 \times 20 = 500000\text{p}^2$$

este egală cu cea din cazul precedent. De asemenea, restul total, în exclusivitate inutilizabil, este acelaşi:

$$10000 \times 3 + 10000 \times 2 + 10000 \times 1 = 60000\text{p}^2$$

Din punct de vedere economic, este evident că a doua soluție este mai bună.

Observație finală: Problema studiată este un exemplu de problemă de croire $1\frac{1}{2}$-dimensională deoarece reperele şi suporții sunt obiecte cu două dimensiuni dar, în procesul de croire, relevantă este doar una din ele.

7-5. Cum poate fi plătită o sumă de bani astfel încât numărul tipurilor valorice de piese (monezi sau bancnote) utilizate să nu depăşească o limită dată iar numărul total de piese necesar plății să fie minim?

1) Elaborați un model matematic general pe baza următoarelor elemente:

S = suma de plată;

n = numărul total de tipuri valorice (monezi sau bancnote);

p = numărul maxim de tipuri valorice de piese ce pot fi utilizate la plata sumei S;

a_j = valoarea piesei (monedă sau bancnotă) de tipul j;

m_j = numărul pieselor de tip j disponibile în casă.

2) Se pune problema plății unui rest de până la un euro (cel mult 99 eurocenți) utilizând cât mai puține monede şi cel mult patru tipuri valorice diferite. Din fiecare tip valoric sunt disponibile două monede. Subdiviziunile euro-ului sunt 1, 2, 5, 10, 20 şi 50 eurocenți. Scrieți un program corespunzător şi rezolvați-l pentru S = 77, S = 86 eurocenți sau alte valori pe care le veți alege singuri.

3) Concepeți o problemă similară cu referire la plata unei sume oarecare, exprimată printr-un număr întreg de euro. După cum se ştie există monezi de 1 şi 2 euro şi bancnote de 5,10,20,50,100,200 şi 500 euro. Celelalte date le veți alege singuri.

2) Deoarece rezolvarea programelor întregi este în general dificilă elaborați o procedură euristică eficientă de rezolvare suboptimală a problemelor de mai sus.

Soluție

1) Elaborarea modelului general.

- Variabilele modelului:

  x_j = numărul pieselor de tipul j utilizate la plata sumei S, $j = 1,\ldots,n$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{daca piesa de tipul j este efectiv folosita la plata sumei S} \\ 0 & \text{in caz contrar} \end{cases} \quad j = 1,\ldots,n$$

- Restricții:
  - valoarea pieselor folosite la plată trebuie să fie egală cu suma S:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = S \qquad (1)$$

- numărul tipurilor distincte de piese folosite la plată nu trebuie să depăşească limita dată:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq p \qquad (2)$$

- pe fiecare tip valoric, numărul pieselor efectiv folosite la plată se încadrează în disponibilul casei:

$$0 \leq x_j \leq m_j y_j \ , \ j = 1,\ldots,m \qquad (3)$$

Într-adevăr, dacă $y_j = 0$, adică piesa de tip j nu este folosită la plată, din (3) rezultă $x_j = 0$; în cazul contrar, (3) şi $y_j = 1$ implică $x_j \leq m_j$.

- Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_j \geq 0 \text{ întregi}; \ y_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,n \qquad (4)$$

- Funcția obiectiv:

Se minimizează numărul total de piese folosite la plată:

$$(\min) f = \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad (5)$$

2) Rezolvând modelele corespunzătoare se poate vedea că:

-77 eurocenți pot fi plătiți cu numai patru monede: 77 = 2 + 5 + 20 + 50 din cele disponibile.

- este imposibil de plătit 86 eurocenți cu numai patru tipuri distincte de monezi şi cel mult două monezi de fiecare tip. Putem face acest lucru cu cinci tipuri: 86 = 1 + 5 + 10 + 20 + 50. Sau dacă, de exemplu, avem trei monezi disponibile de 10 eurocenți şi câte două din celelalte tipuri, plata devine posibilă conform schemei: 86 = 1 + 5 + 3 × 10 + 50.

7-6. Pentru asigurarea activității curente de producție, o firmă are nevoie de anumite cantități din patru repere. În principiu, firma are posibilitatea de a fabrica aceste repere cu mijloace proprii dar conducerea este de părere că resursele disponibile nu sunt suficiente pentru producerea cantităților necesare astfel că se pune problema achiziționării unora dintre repere de pe piață, cel puțin în parte. În procesul de fabricație al reperelor la firmă sunt implicate şase utilaje, fiecare cu un număr limitat de ore de funcționare. Datele concrete ale situației sunt indicate în tabelul 7.6:

Tabelul 7.6

Utilaje / Repere	Consumuri unitare de timp de prelucrare [ore/unitatea de produs]						Cost de producție ($/buc.)	Cost de achiziție ($/buc.)	Cantitate necesară
	1	2	3	4	5	6			
1	0.04	0.02	0.02	-	0.03	0.06	2.55	3.10	150
2	-	0.01	0.05	0.15	0.09	0.06	2.47	2.60	150
3	0.02	0.06	-	0.06	0.20	0.20	4.40	4.50	150
4	0.06	0.04	0.15	-	-	0.05	1.90	2.25	150
Nr. ore de funcționare	40	40	30	40	30	35			

Conducerea firmei este interesată în a stabili cât să producă şi cât să cumpere de pe piață astfel încât totalul cheltuielilor să fie minim.

1) Scrieți un program liniar care să răspundă acestui obiectiv şi rezolvați-l; comentați soluția găsită;

2) Analizând soluția obținută, conducerea firmei consideră că nu este rentabil ca reperele să fie produse în parte la firmă şi restul să fie cumpărat de pe piață deoarece aceasta ar produce complicații în organizarea producției proprii ca şi în relațiile cu partenerii externi. Pentru asigurarea necesarului de repere cu mijloace proprii ar exista posibilitatea creşterii numărului orelor de funcționare al utilajelor prin folosirea acestora "peste program" dar o asemenea politică nu pare a avea asentimentul personalului muncitor. Din aceste motive, conducerea a decis ca, pentru fiecare reper, cantitatea necesară SAU să fie produsă în întregime în cadrul firmei SAU să fie achiziționată în totalitate de pe piață.

Ce modificări apar în modelul construit anterior şi care va fi soluția optimă în acest caz? Comparați cele două soluții.

Soluție:1) Este bine să construim mai întâi un model general plecând de la următoarele notații: $m \equiv$ numărul utilajelor;

$n \equiv$ numărul reperelor;

$A = [a_{ij}] \equiv$ matrice $m \times n$ în care $a_{ij} \equiv$ timpul necesar prelucrării unei unități din reperul j pe utilajul j , $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$;

$b = [b_i] \equiv$ vector coloană în care $b_i \equiv$ fondul disponibil de timp al utilajului i , $i = 1,\ldots,m$;

$d = [d_j] \equiv$ vector coloană în care $d_j \equiv$ cantitatea necesară din reperul j , $j = 1,\ldots,n$;

$c = [c_j] \equiv$ vector linie în care $c_j \equiv$ costul producerii unei unități din reperul j în cadrul firmei;

$c' = [c'_j] \equiv$ vector linie în care $c'_j \equiv$ costul achiziționării de pe piață a unei unități din reperul j.

Fie $x = [x_j]$ un vector coloană de variabile în care $x_j \equiv$ cantitatea de repere j produsă în cadrul firmei.

Încadrarea în fondurile limitate de timp disponibil ale utilajelor se formalizează prin blocul de restricții:

$$Ax \leq b \tag{1}$$

Pe de altă parte cantitățile de repere produse în cadrul firmei nu trebuie să depăşească cererile şi ca urmare:

$$0 \leq x \leq d \tag{2}$$

Costul producerii reperelor în cadrul firmei are expresia $cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. Cantitățile de repere achiziționate de pe piață sunt indicate de vectorul $d - x$ şi costul procurării lor este $c'(d - x) = \sum_{j=1}^{n} c'_j (d_j - x_j)$. În consecință, costul total va fi:

$$cx + c'(d - x) = c'd + (c - c')x = \sum_{j=1}^{n} c'_j d_j + \sum_{j=1}^{n} (c_j - c'_j) x_j$$

Făcând abstracție de constanta $c'd = \sum_{j=1}^{n} c'_j d_j$, rămâne de minimizat funcția liniară $(c - c')x = \sum_{j=1}^{n} (c_j - c'_j) x_j$; cum costurile interne de producție sunt (cel puțin în cazul concret dat) mai mici decât prețurile de achiziție de pe piață, adică $c_j \leq c'_j$, se va maximiza funcția opusă:

$$f = (c' - c)x = \sum_{j=1}^{n} (c'_j - c_j)x_j \tag{3}$$

Reunind (1) , (2) şi (3) rezultă modelul liniar:

$$\begin{cases} Ax \le b \\ 0 \le x \le d \\ (\max) f = (c' - c)x \end{cases} \tag{4}$$

În situaţia dată $m = 6$, $n = 4$, astfel că modelul (4) va avea 4 variabile, 10 restricţii şi soluţia optimă:

$$x_1 = 150 \text{ , } x_2 = 90 \text{ , } x_3 = 65.5 \text{ , } x_4 = 150 \quad (\max)f = 153.25$$

Impunând variabilelor condiţia de a lua numai valori întregi rezultă soluţia "foarte apropiată":

$$x_1 = 150 \text{ , } x_2 = 90 \text{ , } x_3 = 65 \text{ , } x_4 = 150 \quad (\max)f = 153.2$$

pe care o vom analiza în continuare:

Soluţia propune ca reperele 1 şi 4 să fie produse în totalitate în cadrul firmei. Din reperul 2 se vor produce 90 unităţi la firmă iar restul de 150 – 90 = 60 unităţi se vor cumpăra de pe piaţă. În fine, din reperul 3 se vor produce 65 unităţi şi restul de 150 – 65 = 85 unităţi se vor achiziţiona din exterior. Costul total aferent acestei soluţii se ridică la:

$$150 \times 2.55 + [90 \times 2.47 + 60 \times 2.60] + [65 \times 4.40 + 85 \times 4.50] + 150 \times 1.90 = 1648.3 \text{ \$}$$

2) Introducem variabilele bivalente:

$$y_j = \begin{cases} 1 \text{ daca reperul } j \text{ se produce in cadrul firmei} \\ 0 \text{ daca reperul } j \text{ se procura de pe piata} \end{cases}, \ j = 1,\ldots,n$$

Între variabilele x_j şi y_j vom avea relaţia:

$$x_j = d_j y_j \quad j = 1,\ldots,n \tag{5}$$

care arată că fiecare reper sau se produce în totalitate în cadrul firmei sau se achiziționează în întregime de pe piață. Substituind (5) în (1) obținem:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j y_j \le b_i \quad i = 1,\ldots,m \qquad (6)$$

Mai departe se vede uşor că relațiile (5) asigură îndeplinirea condițiilor (2). În final, funcția obiectiv (3) devine:

$$(\max) f = \sum_{j=1}^{n} (c'_j - c_j) d_j y_j \qquad (7)$$

Ansamblul (6) şi (7) constituie un program liniar în variabile bivalente. În situația concretă dată acest program are soluția optimă:

$$y_1 = 1 \,,\; y_2 = 0 \,,\; y_3 = 0 \,,\; y_4 = 1 \qquad (\max) f = 135$$

care se interpretează astfel: reperele 1 şi 4 se vor produce în totalitate în cadrul firmei iar celelalte două se vor procura de pe piață. Costul total aferent va fi de:

$$150 \times 2.55 + 150 \times 2.60 + 150 \times 4.50 + 150 \times 1.90 = 1732.5 \; \$$$

în creştere cu 84.2 $ adică cu 5.11% față de costul soluției anterioare.

7-7. Un operator are de executat trei joburi A, B, C cu duratele 3, 4 şi respectiv 5 ore. El poate executa în acelaşi timp oricare două joburi dar niciodată pe toate trei. În ce ordine ar trebui executate joburile astfel ca timpul total să fie minim? Generalizare la m joburi cu duratele $d_1, d_2, .., d_m$, operatorul putând executa în acelaşi timp cel mult k joburi, $k < m$.

Soluție

Abordarea problemei în cazul general constituie un interesant exercițiu de modelare. Deoarece operatorul nu poate procesa mai mult de k joburi simultan este clar că toate cele m joburi vor fi realizate în cel puțin $n = \lceil m/k \rceil$ serii (unde $\lceil x \rceil$ înseamnă rotunjirea întreagă superioară a numărului real x). Indiferent de ordinea în care seriile vor fi lansate în execuție, timpul necesar terminării tuturor joburilor este acelaşi, egal cu suma timpilor de execuție ai seriilor. În particular, la optim, vor exista exact $n = \lceil m/k \rceil$ serii.

Mai departe, deoarece joburile unei serii se execută simultan, timpul necesar terminării lor este dat de jobul cu durata cea mai mare.

Plecând de la aceste observații vom trece acum la elaborarea modelului matematic.

- Variabilele modelului:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{daca jobul } i \text{ este inclus in seria } j \\ 0 & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

$$y_j \equiv \text{timpul necesar executarii joburilor din seria } j$$

- Restricții.
  - în fiecare serie nu pot fi incluse mai mult de k joburi:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le k \quad j = 1,\ldots,n \tag{1}$$

  - fiecare job trebuie să figureze într-o serie şi numai în una:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\ldots,m \tag{2}$$

  - deoarece joburile unei serii se execută simultan, durata fiecărui job din serie nu poate depăşi timpul necesar terminării întregii serii:

$$y_j \ge d_i x_{ij} \quad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n \tag{3}$$

- Condiții explicite impuse variabilelor.

Vom observa că dacă duratele d_i ale joburilor sunt exprimate prin numere întregi (aceasta se poate realiza întotdeauna prin alegerea unei unități de timp convenabile) atunci şi variabilele y_j vor lua acelaşi tip de valori:

$$x_{ij} \in \{0,1\} \; i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n \text{ şi } y_j \ge 0 \; \textit{intregi} \; j = 1,\ldots n \tag{4}$$

- Funcția obiectiv:

Se urmăreşte minimizarea timpului total de execuție al celor n serii de joburi:

$$(\min) f = \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{5}$$

Ansamblul (1) – (5) este un program liniar în numere întregi cu $m{\cdot}n + m + n$ restricţii şi $m{\cdot}n + n$ variabile. Cititorul este îndemnat să scrie efectiv acest program în cazul particular dat în enunț ($m = 3$ joburi , $k = 2$, $n = \lceil 3/2 \rceil = 2$).

O examinare atentă a problemei ne conduce la următoarea soluție simplă şi elegantă:

- Se ordonează descrescător duratele joburilor; pentru simplitate reindexăm joburile astfel încât:

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_m$$

- includem primele k joburi în prima serie, pe următoarele k în a doua serie ş,a,m.d.

$$\{1,2,\ldots,k\}\ ,\ \{k+1,k+2,\ldots,2k\}\ ,\ \ldots.,\ \{(n-1)k+1,\ldots,m\}$$

Duratele de execuție ale acestor serii vor fi d_1 , d_{k+1} ,..., $d_{(p\text{-}1)k+1}$ astfel că toate joburile vor fi terminate în $d_1 + d_{k+1} + \ldots + d_{(p\text{-}1)k+1}$ unități de timp şi acesta este cel mai scurt timp de procesare al tuturor joburilor.

Exemplu. Se consideră următoarea situație cu $m = 10$ joburi care pot fi procesate câte $k = 4$ simultan.

Tabelul 7.7

Job i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Durata d_i	7	12	5	8	3	10	9	7	6	8

Ordonăm descrescător duratele:

Tabelul 7.8

Job i	2	6	7	4	10	1	8	9	3	5
Durata d_i	12	10	9	8	8	7	7	6	5	3

Soluția optimă de procesare a tuturor joburilor:

Tabelul 7.9

Seria	Joburi	Durata de execuție a seriei
1	2, 6, 7, 4	12
2	10, 1, 8, 9	8
3	3, 5	5
Timp total		**25**

7-8. O firmă lucrează 24 ore pe zi şi 7 zile pe săptămână pentru a realiza patru produse. Pe durata unei zile se poate produce un singur tip de produs (în ziua următoare se poate fabrica acelaşi produs sau un altul). Productivitățile orare sunt de 100 unități din P_1, 250 unități din P_2, 190 unități din P_3 sau 150 unități din P_4. Nu există pauze la nivel de zi (se lucrează 24 de ore din 24) şi nici la nivel de săptămână (se lucrează 7 zile din 7). Dacă într-o zi este programat să se fabrice produsul P_1 iar în ziua următoare produsul P_2 atunci produsul P_2 va avea disponibile doar 19 ore pentru fabricație, 5 ore fiind necesare curățirii unor rezervoare de ulei. Orice altă trecere de la un produs la altul – inclusiv trecerea "inversă" de la produsul P_2 la produsul P_1 – nu necesită timpi de pregătire ai utilajelor. Pentru programarea producției în următoarea săptămână sunt disponibile următoarele date:

Tabelul 7.10

Produs	Stoc la sfârşitul săptămânii precedente	Nivelul cererii estimat pentru ziua:							Nivel minim al stocului la sfârşitul săptămânii
		1	2	3	4	5	6	7	
P_1	5000	1500	1500	2000	1000	2000	500	500	3000
P_2	7000	3000	500	1000	2500	500	1000	2000	2000
P_3	9000	2000	2000	3000	2000	2000	2000	500	4000
P_4	8000	3000	2000	2000	1000	1000	500	500	1500

În ultima zi a săptămânii precedente s-a lucrat produsul P_3. De asemenea, în fiecare zi cererea trebuie acoperită din stocul zilei precedente şi din producția curentă. Pentru produsele rămase la sfârşitul fiecărei zile s-a estimat un cost unitar de stocare de 1.5 u.m. pentru P_1 şi P_2 şi de 2.5 u.m. pentru produsele P_3 şi P_4. Obiectivul urmărit este programarea producției pentru săptămâna următoare astfel încât cheltuielile de stocare să fie minime.

1) Formulați un model matematic în variabile bivalente pentru situația descrisă;

2) Încercați să construiți într-o manieră euristică un program de activitate care să țină seama de cerințele impuse.

Soluție

1) În fiecare zi a săptămânii trebuie luată o decizie privitoare la produsul ce va fi fabricat în ziua respectivă. În consecință introducem variabilele bivalente:

$$x_{i,t} = \begin{cases} 1 \text{ daca in ziua t este programat produsul i} \\ 0 \text{ in caz contrar} \end{cases}$$

unde $i = 1, 2, 3, 4$ şi $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Deoarece într-o zi se lucrează numai un singur produs vom avea:

$$x_{1,t} + x_{2,t} + x_{3,t} + x_{4,t} = 1 \quad t = 1,\ldots,7 \qquad (1)$$

Produsul 2 (şi numai el) are o situație specială: dacă el a fost programat într-o anumită zi, să zicem t, timpul disponibil de lucru pentru producerea lui depinde de produsul programat în ziua anterioară! Astfel, dacă în ziua $t - 1$ s-a fabricat oricare din produsele 2,3 sau 4 atunci în ziua t se vor lucra toate cele 24 de ore pentru produsul 2. Dacă în ziua $t - 1$ a fost programat produsul 1 atunci în ziua următoare t pentru produsul 2 vor fi disponibile numai 19 ore, diferența de 5 ore fiind necesară operațiilor de pregătire a fabricației. Pentru formalizarea acestei situații introducem variabilele bivalente:

$$z_t = \begin{cases} 1 \text{ daca in ziua t este programat produsul 2} \\ \quad \text{iar in ziua precedenta s - a fabricat produsul 1;} \quad t = 1,\ldots,7 \\ 0 \text{ in caz contrar} \end{cases}$$

Se vede uşor că:

$$z_t = 1 \text{ dacă şi numai dacă } x_{2,t} = 1 \text{ şi } x_{1,t-1} = 1$$

astfel că :

$$z_t = x_{2,t} \cdot x_{1,t-1} \quad t = 1,\ldots,7 \qquad (2)$$

cu $x_{1,0} = 0$ deoarece în ultima zi a săptămânii precedente s-a lucrat produsul 3. De implicațiile

$$x_{2,t} = 0 \rightarrow z_t = 0 \text{ şi } z_t = 1 \rightarrow x_{2,t} = 1$$

se va ține seama mai departe.

Fie:

$P_{i,t} \equiv$ cantitatea din produsul i realizată în luna t;

$I_{i,t} \equiv$ stocul din produsul i la sfârşitul zilei t,

cu $i = 1,\ldots,4$ şi $t = 1,\ldots,7$.

Pentru oricare din produsele 1, 3, 4 avem:

$$P_{i,t} = \begin{cases} 24R_i \text{ daca } x_{i,t} = 1 \\ 0 \quad \text{ daca } x_{i,t} = 0 \end{cases}$$

unde: $R_i \equiv$ cantitatea din produsul i realizată într-o oră $i = 1,\ldots, 4$.

Prin urmare:

$$P_{i,t} = 24R_i \cdot x_{i,t} \quad i = 1,\ldots,4 \text{ , } t = 1,\ldots,7 \tag{3}$$

Pentru produsul 2 avem:

$$P_{2,t} = \begin{cases} 24R_2 & \text{daca } x_{2,t} = 1 \text{ si } z_t = 0 \\ 19R_2 = 24R_2 - 5R_2 & \text{daca } z_t = 1 \\ 0 & \text{daca } x_{2,t} = 0 \end{cases}$$

de unde:

$$P_{2,t} = 24R_2 \cdot x_{2,t} - 5R_2 \cdot z_t \quad t = 1,\ldots,7 \tag{3'}$$

Relațiile (3) şi (3') asigură nenegativitatea variabilelor $P_{i,t}$ şi le exprimă în funcție de variabilele binare $x_{i,t}$ şi z_t.

Pentru fiecare zi se poate scrie ecuația de balanță:

$$I_{i,t} = I_{i,t-1} + P_{i,t} - D_{i,t} \quad i = 1,\ldots,4 \quad t = 1,\ldots,7 \tag{4}$$

unde $D_{i,t}$ este cererea pentru produsul i în ziua t iar $I_{i,0}$ reprezintă stocul inițial din produsul i.

Deoarece nu sunt permise rupturile de stoc se impun condițiile de nenegativitate:

$$I_{i,t} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,4 \quad t = 1,\ldots,6 \tag{5}$$

iar pentru ultima zi stocurile finale $I_{i,7}$ trebuie să se situeze deasupra nivelelor minime prevăzute:

$$I_{i,7} \geq I_{i,final} \quad i = 1,\ldots,4 \tag{6}$$

Din (4) rezultă:

$$I_{i,t} = I_{i,0} + \sum_{\theta=1}^{t} P_{i,\theta} - \sum_{\theta=1}^{t} D_{i,\theta} \quad i = 1,\ldots,4 \quad t = 1,\ldots,7 \tag{7}$$

Relațiile (7) permit exprimarea variabilelor $I_{i,t}$ în funcție de variabilele $x_{i,t}$ şi z_t, bineînțeles prin intermediul relațiilor (3) şi (3').

Obiectivul urmărit este minimizarea cheltuielilor de stocare reprezentate de suma:

$$f = \sum_{t=1}^{7}(1.50 \cdot I_{1,t} + 1.50 \cdot I_{2,t} + 2.50 \cdot I_{3,t} + 2.50 \cdot I_{4,t}) \tag{8}$$

Ansamblul relațiilor (1), (2), (5), (6) şi (8) în care $P_{i,t}$ şi $I_{i,t}$ sunt eliminate prin (3), (3') şi (7) constituie modelul matematic cerut. Este vorba de un program în variabilele bivalente $x_{i,t}$ şi z_t.

2) O analiză atentă a datelor permite elaborarea unui "bun" program de activitate fără a se recurge la rezolvarea programului bivalent construit.

- Mai întâi vom determina cantitățile de produse ce se pot realiza la nivelul unei zile:

Tabelul 7.11

Produsul 1 :	24 × 100 = 2400 unități
Produsul 2 :	24 × 250 = 6000 unități dacă în ziua precedentă nu s-a fabricat produsul 1 sau 19 × 250 = 4750 unități dacă în ziua precedentă s-a fabricat produsul 1
Produsul 3 :	24 × 190 = 4560 unități
Produsul 4 :	24 × 150 = 3600 unități

- Determinăm în continuare cantitățile de produse ce ar trebui fabricate într-o săptămână astfel încât cererile zilnice să fie satisfăcute iar stocurile finale să fie realizate:

Tabelul 7.12

Produs	Stoc inițial	Total cerere săptămânală	Stoc final	Necesar de fabricat
1	5000	9000	3000	9000 + 3000 – 5000 = 7000
2	7000	10500	2000	10500 + 2000 – 7000 = 5500
3	9000	13500	4000	13500 + 4000 – 9000 = 8500
4	8000	10000	1500	10000 + 1500 – 8000 = 3500

- Pentru fabricarea necesarului din produsele 1, 3 şi 4 avem nevoie de:

- pentru produsul 1: $\lceil 7000 : 2400 \rceil = 3$ zile
- pentru produsul 2: $\lceil 8500 : 4560 \rceil = 2$ zile
- pentru produsul 4: $\lceil 3500 : 3600 \rceil = 1$ zi

Total = 6 zile

Cum într-o zi se lucrează un singur produs rezultă că pentru produsul 2 nu mai este disponibilă decât o singură zi din cele şapte. Necesarul de 5500 unități din acest produs ar putea fi realizat într-o zi cu condiția ca în ziua precedentă să nu fie programat produsul 1!

- Deoarece costurile de stocare sunt mai mici la produsele 1 şi 2 este bine ca acestea să fie programate mai la începutul săptămânii iar produsele 3 şi 4 mai la sfârşit în măsura în care stocurile inițiale permit acest lucru. Se observă că atât pentru produsul 3 cât şi pentru produsul 4 stocurile inițiale ajung exact pentru patru zile.

- Coroborând aceste elemente rezultă următoarele programări posibile:

I :

Ziua	1	2	3	4	5	6	7
Produsul	2	1	1	4	3	1	3

II :

Ziua	1	2	3	4	5	6	7
Produsul	2	1	1	3	4	1	3

În raport cu prima programare evoluția stocurilor zilnice pentru toate produsele este indicată în tabelul 7.13:

Tabelul 7.13

Programarea fabricației									
Ziua		0	1	2	3	4	5	6	7
Produsul 1				**2400**	**2400**			**2400**	
Produsul 2			**6000**						
Produsul 3							**4560**		**4560**
Produsul 4						**3600**			
Evoluția stocurilor zilnice									
Ziua		0	1	2	3	4	5	6	7
Produsul 1	Cerere		1500	1500	2000	1000	2000	500	500
	Stoc	5000	**3500**	**4400**	**4800**	**3800**	**1800**	**3700**	**3200**
Produsul 2	Cerere		3000	500	1000	2500	500	1000	2000
	Stoc	7000	**10000**	**9500**	**8500**	**6000**	**5500**	**4500**	**2500**
Produsul 3	Cerere		2000	2000	3000	2000	2000	2000	500
	Stoc	9000	**7000**	**5000**	**2000**	**-**	**2560**	**560**	**4620**
Produsul 4	Cerere		3000	2000	2000	1000	1000	500	500
	Stoc	8000	**5000**	**3000**	**1000**	**3600**	**2600**	**2100**	**1600**
Cost stocare			**50250**	**40850**	**27450**	**23700**	**23850**	**18950**	**24100**
Cost total de stocare									**209150**

Cititorul este invitat să facă calculele corespunzătoare celei de a doua programări şi să afle singur care programare este mai bună.

7-9. Exemplu privind investiția în domeniul bancar

Atunci când decide cum să îşi utilizeze fondurile disponibile, orice investitor trebuie să pună în balanță venitul versus riscul rezultate din decizia sa. În cvasitotalitatea cazurilor, oportunitățile investiționale ce promit obținerea celor mai mari profituri sunt cele care presupun asumarea celor mai mari riscuri. Băncile comerciale trebuie să fie atente în special la raportul profit-risc deoarece obligații de natură legală şi etică le solicită să nu acționeze hazardat (evitarea asumării de riscuri), deşi scopul lor este acela de a obține profit. Această dilemă conduce în mod natural la o optimizare multiobiectiv a deciziei de investiții, luând în calcul atât criteriul profit, cât şi criteriul risc.

Exemplul de față referitor la o problemă de investiție vizează aplicarea abordării multiobiectiv la o bancă fictivă, Banca Salteluța. Această bancă are un capital modest de 20 mil.$, cu 150 mil.$ în depozite la vedere (conturi curente) şi 80 mil.$ în depozite la termen (conturi de economii şi certificate de depozit). Tabelul 1 conține informații privind posibilitățile de investire a capitalului băncii şi a fondurilor provenite din depozite, precum şi ratele profitului şi gradul de risc asociat acestor oportunități investiționale.

Tabelul 7.14

Oportunități de investiții pentru Banca Salteluța

Categoria investițională (j)	Rata profitului (%)	Lichiditate (%)	Capital necesar (%)	Activ riscant?
1. Lichidități (cash)	0,0	100,0	0,0	Nu
2. Depozite pe termen scurt	4,0	99,5	0,5	Nu
3. Obligațiuni guvernamentale: 1 la 5 ani	4,5	96,0	4,0	Nu
4. Obligațiuni guvernamentale: 5 la 10 ani	5,5	90,0	5,0	Nu
5. Obligațiuni guvernamentale: peste 10 ani	7,0	85,0	7,5	Nu
6. Credite de instalare	10,5	0,0	10,0	Da
7. Credite ipotecare	8,5	0,0	10,0	Da
8. Credite comerciale	9,2	0,0	10,0	Da

Principalul scop al oricărei afaceri particulare este acela de a maximiza profitul. Utilizând ratele profitului din tabelul 7.14, acest scop furnizează următoarea funcție obiectiv:

$$(max)P = 0{,}040x_1 + 0{,}045x_3 + 0{,}055x_4 + 0{,}070x_5 + 0{,}105x_6 + 0{,}085x_7 + 0{,}092x_8$$

Din tabelul 1 nu rezultă la fel de clar modalitatea în care am putea cuantifica riscul fiecărei oportunități de investiție. De obicei sunt utilizate două măsuri ale riscului:

Prima este *rata de adecvare a capitalului*, exprimat ca raport între capitalul necesar băncii pentru a fi solvabilă şi capitalul său actual. Cu cât acest raport are o valoare mai mică, cu atât riscul este mai mic. Ratele „capitalului necesar" din tabelul 1 aproximează relația utilizată de către Guvernul S.U.A. pentru a calcula acest raport, iar capitalul Băncii Salteluța este în prezent de 20 mil.$. În acest fel putem exprima cel de al doilea obiectiv referitor la adecvarea capitalului:

$$(min)C = 1/20(0{,}005x_2 + 0{,}0405x_3 + 0{,}050x_4 + 0{,}075x_5 + 0{,}100x_6 + 0{,}100x_7 + 0{,}100x_8)$$

O altă măsură a riscului vizează activele riscante nelichide. Un nivel scăzut al raportului active riscante/capital indică o instituție sigură din punct de vedere financiar. Pentru exemplul nostru, această a treia măsură a succesului este dată de expresia:

$$(min)R = 1/20(x_6 + x_7 + x_8)$$

Pentru a completa un model al planului de investiții al Băncii Salteluța, trebuie să descriem restricțiile cele mai relevante în acest caz. Exemplul propus presupune următoarele cinci tipuri:

1. Investițiile trebuie să însumeze capitalul disponibil şi fondurile din depozite;
2. Rezervele lichide (cash) trebuie să fie cel puțin 14% din depozitele la vedere plus 4% din cele la termen;
3. Partea din investiții considerată lichidă trebuie să fie cel puțin 47% din depozitele la vedere plus 36% din cele la termen;
4. Cel puțin 5% din fonduri ar trebui investite în fiecare categorie investițională, pentru diversitate;
5. Cel puțin 30% din fonduri ar trebui investite în credite comerciale, pentru a menține statusul comunitar al băncii.

Combinând cele trei funcții obiectiv cu cele cinci tipuri de restricții obținem un model de programare liniară multiobiectiv al problemei de investiții a Băncii Salteluța:

$(max)P = 0{,}040x_1 + 0{,}045x_3 + 0{,}055x_4 + 0{,}070x_5 + 0{,}105x_6 + 0{,}085x_7 + 0{,}092x$	[profit]
$(min)C = 1/20(0{,}005x_2 + 0{,}0405x_3 + 0{,}050x_4 + 0{,}075x_5 + 0{,}100x_6 + 0{,}100x_7 + 0{,}100x_8)$	[adecvarea capitalului]
$(min)R = 1/20(x_6 + x_7 + x_8)$	[active riscante]
cu restricțiile:	
(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = (20 + 150 + 80)$	[investeşte tot]
(2) $x_1 \geq 0{,}14(150) + 0{,}04(80)$	[rezerve lichide]
(3) $1{,}00x_1 + 0{,}995x_2 + 0{,}960x_3 + 0{,}900x_4 + 0{,}850x_5 \geq 0{,}47(150) + 0{,}36(80)$	[lichiditate]
(4) $x_j \geq 0{,}05(20 + 150 + 80)$ pentru $j = 1, \ldots, 8$	[diversificare]
(5) $x_8 \geq 0{,}30(20 + 150 + 80)$	[comercial]

În cazul de față soluțiile sunt evaluate după trei criterii: profit, rata de adecvare a capitalului şi rata de risc a activelor. Să presupunem că, în loc să căutăm fie valori mai mari pentru primul criteriu şi valori mai mici pentru ultimele două, stabilim (fixăm) anumite scopuri, precum:

profit ≥ 18,5
rata de adecvare a capitalului ≤ 0,8
rata activelor riscante ≤ 7,0

În acest caz, cele trei funcții obiectiv pot fi exprimate ca scopuri în felul următor:

Scopul 1	$0{,}040x_1 + 0{,}045x_3 + 0{,}055x_4 + 0{,}070x_5 + 0{,}105x_6 + 0{,}085x_7 + 0{,}092x \geq 18{,}5$	[profit]
Scopul 2	$1/20(0{,}005x_2 + 0{,}0405x_3 + 0{,}050x_4 + 0{,}075x_5 + 0{,}100x_6 + 0{,}100x_7 + 0{,}100x_8) \leq 0{,}8$	[adecvarea capitalului]
Scopul 3	$1/20(x_6 + x_7 + x_8) \leq 7{,}0$	[active riscante]

Scopurile de mai sus pot fi privite astfel ca *restricții slabe*. Restricțiile slabe de tipul funcțiilor obiectiv din programarea scop modelează cerințe care este de dorit să fie satisfăcute, dar care pot totuşi să fie încălcate în (de către) soluțiile admisibile.

Odată ce nivele țintă ale restricțiilor slabe au fost fixate (specificate), vom continua cu o formulare a programării matematice mult mai familiară adăugând restricții ce vor impune atingerea scopurilor. Totuşi, nu vom putea impune cerința ca fiecare obiectiv să își atingă scopul, deoarece se poate întâmpla să nu existe nici o soluție care simultan să verifice toate restricțiile slabe. În schimb vom introduce noi *variabile de abatere*. Aceste variabile nenegative sunt introduse pentru a modela gradul de neîndeplinire a scopurilor sau a altor restricții slabe ce nu trebuie verificate cu strictețe. În restricțiile de tip $\geq$ variabilele de abatere reprezintă neîndeplinirea în minus, în timp ce în restricțiile de tip $\leq$ ele indică neîndeplinirea în exces. Evident că, în cazul restricțiilor slabe de tip egalitate, variabilele de abatere au ambele sensuri.

În exemplul Băncii Salteluța vom introduce variabilele de abatere:

d_1 = suma cu care profitul se abate în minus de la scopul propus;
d_2 = nivelul cu care rata de adecvare a capitalului depăşeşte scopul propus;
d_3 = nivelul cu care activele riscante depăşesc scopul propus.

Presupunând că Banca Salteluța acordă importanță egală celor trei scopuri, obținem următorul model de programare liniară scop:

Min $d_1 + d_2 + d_3$	
cu restricțiile:	
$0{,}040x_1 + 0{,}045x_3 + 0{,}055x_4 + 0{,}070x_5 + 0{,}105x_6 + 0{,}085x_7 + 0{,}092x + d_1 \geq 18{,}5$	[profit]
$1/20(0{,}005x_2 + 0{,}0405x_3 + 0{,}050x_4 + 0{,}075x_5 + 0{,}100x_6 + 0{,}100x_7 + 0{,}100x_8) - d_2 \leq 0{,}8$	[adecvarea capitalului]
$1/20(x_6 + x_7 + x_8) - d_3 \leq 7{,}0$	[active riscante]
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = (20 + 150 + 80)$	[investeşte tot]
$x_1 \geq 0{,}14(150) + 0{,}04(80)$	[rezerve lichide]
$1{,}00x_1 + 0{,}995x_2 + 0{,}960x_3 + 0{,}900x_4 +$ $+ 0{,}850x_5 \geq 0{,}47(150) + 0{,}36(80)$	[lichiditate]
$x_j \geq 0{,}05(20 + 150 + 80)$ pentru $j = 1, \ldots, 8$	[diversificare]
$x_8 \geq 0{,}30(20 + 150 + 80)$	[comercial]
$x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ $\quad d_1, d_2, d_3 \geq 0$	

Soluția modelului de programare liniară scop pentru cazul Băncii Salteluța					
	(1) Ponderi egale	(2) Ponderi inegale	(3) Profitul prevalează	(4) Profitul şi Adecvarea Capitalului prevalează	(5) Importanță diferită acordată criteriilor
Ponderea scopului Profit	1	1	1	0	10.000
Ponderea scopului Adecvarea Capitalului	1	10	0	1	100
Ponderea scopului Active Riscante	1	1	0	0	1
Restricții suplimentare	-	-	-	$d_1 = 0$	-
Profit	18,50	17,53	18,50	18,50	18,50
Abaterea, d_1	0,00	0,97	0,00	0,00	0,00
Gradul de adecvare a capitalului	0,928	0,815	0,943	0,919	0,919
Abaterea, d_2	0,128	0,015	0,143	0,119	0,119
Ponderea activelor riscante	7,000	7,000	7,097	7,158	7,158
Abaterea, d_3	0,000	0,000	0,097	0,158	0,158
Cash, x_1	24,20	24,20	24,20	24,20	24,20
Termen scurt, x_2	16,03	48,30	12,50	19,73	19,73
Guvernamentală, 1-5 ani, x_3	12,50	12,50	12,50	12,50	12,50
Guvernamentală, 5-10 ani, x_4	12,50	12,50	12,50	12,50	12,50
Guvernamentală, peste 10 ani, x_5	44,77	12,50	46,37	37,91	37,91
Credite de instalare, x_6	52,50	52,50	41,08	55,67	55,67
Credite ipotecare, x_7	12,50	12,50	12,50	12,50	12,50
Credite comerciale, x_8	75,00	75,00	88,36	75,00	75,00

În coloana (1) avem o soluție a problemei de programare liniară scop în care scopurile au o importanță egala (ponderi egale). Să observăm că această soluție îndeplineşte strict scopul privind obținerea unui profit de 18,50 mil.$ şi a valorii 7,0 pentru activele riscante. Din moment ce variabilele de abatere corespunzătoare, d_1 şi d_3 au valoarea 0, ne putem îndrepta atenția către scopul privind adecvarea capitalului. Coloana (2) a tabelului ne arată efectul înmulțirii ponderii acestui scop cu 10. În acest caz profitul obținut scade sub valoarea propusă de 18,50 mil.$ (la 17,53 mil.$), dar se obține o reducere a valorii variabilei de abatere corespunzătoare scopului privind adecvarea capitalului. Coloanele (3) şi (4) conțin soluțiile unor variante ale modelului în care unul sau altul dintre scopuri prevalează ca importanță. Coloana (5) oferă aceeaşi soluție ca şi (4), obținută însă prin modificarea ponderilor (coeficienților) în funcția obiectiv.