CAPITOLUL 5

Jocuri dinamice în informație incompletă

În acest capitol se va introduce un concept nou şi anume acela de Echilibru Bayesian Perfect (E.B.P).

În capitolele discutate până acum s-au prezentat 3 tipuri de echilibre:

-echilibrul Nash - pentru jocurile statice în informație completă;
-echilibrul perfect în subjoc - pentru jocurile dinamice în informație completă;
-echilibrul bayesian - pentru jocurile statice în informație incompletă.

Aceste tipuri de echilibre nu sunt diferite ci, în realitate, reprezintă acelaşi tip de echilibru aplicat diverselor tipuri de jocuri.

În continuare vom introduce conceptul de E.B.P.

5.1 Introducere

Fie jocul dinamic în informație completă dar imperfectă, reprezentat în figura 5.1 sub formă extinsă :

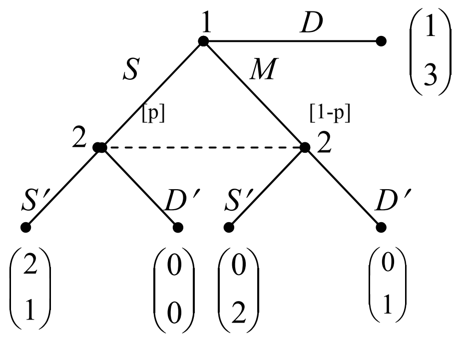

Figura 5.1

Reprezentând sub formă normală jocul descris în figira 5.1, vom obține matricea din figura 5.2:

		2	
		S′	*D′*
	S	$\underline{2},\underline{1}$	$\underline{0},0$
1	*M*	$0,\underline{2}$	$0,1$
	D	$1,\underline{3}$	$\underline{1},\underline{3}$

Figura 5.2

Acest joc, sub formă normală, are două echilibre în strategii pure: *(S,S′)* şi *(D,D′)*.

Să determinăm care dintre aceste echilibre sunt perfecte in subjoc.

Cum jucătorul 2 nu ştie ce a ales jucătorul 1, nu există subjocuri in acest joc, şi în aceste condiţii echilibrele Nash sunt chiar echilibrele perfecte in subjoc.

Totuşi, echilibrul *(D,D′)* nu este credibil, deoarece strategia *S′* domină strategia *D'*, deci jucătorul 2 fiind raţional nu va juca *D′* niciodată. Deci 1 nu va putea fi ameninţat de 2 că va juca *D′* deoarece nu este credibilă o asemenea ameninţare, deci 1 nu va juca niciodată *D*. În acest caz unicul echilibru va fi *(S,S′)*.

5.2. Echilibrul bayesian perfect

Pentru a defini E.B.P. vom face următoarele ipoteze:

Ipoteza 1 Pentru fiecare mulţime de informaţii, jucătorul care mută (joacă) trebuie să aibă anumite *presupuneri* (credinţe) despre ceea ce s-a jucat până atunci.

Pentru o mulţime de informaţii ce nu este unică, o presupunere va fi o distribuţie de probabilitate asupra nodurilor din mulţimea de informaţii (pentru o mulţime de informaţii date, cu nod unic, presupunerile jucătorului vor avea probabilitatea 1).

Ipoteza 2 Date fiind presupunerile lor, strategiile jucătorilor trebuie să *fie secvenţial raţionale* (cu alte cuvinte pentru fiecare mulţime de informaţii date, strategia jucătorului trebuie să fie optimală date fiind presupunerile pe care le are).

Exemplu Pentru jocul descris anterior, Ipoteza 1 presupune că pentru fiecare mulţime de informaţii nesingulară (ex. S,M pentru jucătorul 1), jucătorul 2 crede că 1 va juca S cu probabilitatea p şi M cu probabilitatea 1-p.

Date fiind aceste presupuneri, câştigurile aşteptate dacă va juca *D′* vor fi: $0\cdot p+1\cdot(1-p)$, iar dacă va juca *S'*: $1\cdot p+2\cdot(1-p)$.

Cum $Eu_2(S')p > Eu_2(D')=1-p$, $(\forall)\ p$, rezultă că jucătorul 2 nu va juca niciodată strategia *D'*.

Ipoteza 2 va elimina posibilitatea ca jucătorul 2 să joace (din considerente de raţionalitate).

Deci, ipotezele 1 şi 2 consistă în faptul că jucătorii fac *presupuneri* despre modul în care joacă ceilalţi şi date fiind aceste *presupuneri* fiecare jucător acţioneaza raţional, adică alege acele strategii care îi maximizează câştigul.

Definiţia 5.1 Pentru un echilibru dat al unui joc în formă extinsă o mulţime de informaţii este *„pe calea de echilibru”* dacă îi este asociată o probabilitate pozitivă de a fi jucată şi *„în afara căii de echilibru”* dacă este sigur că nu va fi jucată *(p=0)* de către jucători (aici, „echilibrul” poate fi oricare din cele definite anterior).

Ipoteza 3 Pentru o mulţime de informaţii pe calea de echilibru, presupunerile sunt determinate prin regula Bayes şi strategiile de echilibru ale jucătorilor.

Exemplu. Dat fiind un echilibru (de ex. *S*) jucătorul 2 ştie cu probabilitatea 1 că jucătorul 1 va juca *S.*

În ipoteza 2, o strategie mixtă va conduce la faptul că jucătorul 2 crede că 1 joacă S cu probabilitatea q_1, M cu probabiliatea q_2 şi D cu probabiliatatea $1-q_1-q_2$.

Atunci: $p = \frac{q_1}{q_1 + q_2}$ (conform regulii Bayes: $P(L/M) = \frac{P(L)}{P(L \cup M)}$)

Deci, noțiunea de echilibru Bayesian perfect nu va include doar strategiile jucătorilor, ci și presupunerile pe care le fac despre strategiile alese de ceilalți.

În multe cazuri, ipotezele 1-3 constituie chiar definiția E.B.P., dar noi vom mai impune o condiție ce va căuta să elimine strategiile ce nu sunt credibile.

Ipoteza 4 Pe o mulțime de informații din afara căii de echilibru, presupunerile sunt determinate de regula Bayes și de strategiile de echilibru ale jucătorilor – dacă este posibil.

Definiția 5.2 Vom numi *Echilibru Bayesian Perfect* (EBP) o mulțime de strategii și presupuneri ce satisfac Ipotezele 1-4.

Exemplul 5.2

Se consideră jocul dinamic în informație incompletă descris sub formă extinsă în figura 5.3

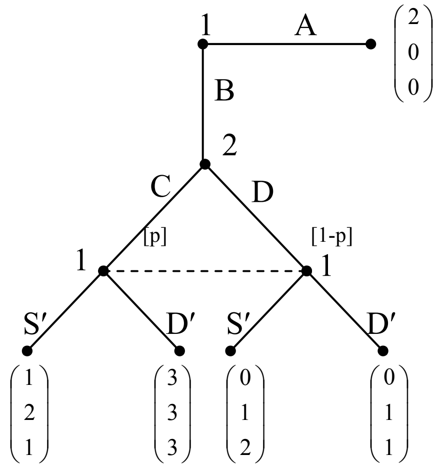

Figura 5.3

Observăm că unicul echilibru Nash al jocului este *(B,C,D')*.

Această strategie și presupunerea că $p=1$ satisfac ipotezele 1-3, (de asemenea și 4), deoarece nu există o mulțime de informații în afara căii de echilibru, deci este echilibru bayesian perfect.

Totuși, fie strategia *(A,C,S')* cu $p=0$, care este un ehilibru Nash deoarece nici un jucător nu este tentat să devieze de la ea.

Deci nu este suficient să avem îndeplinite doar ipotezele 1-3, deoarece acestea nu garantează ce se întâmplă pentru mulțimile de informații din afara căii de echilibru.

Observaţii

1. In cazul E.B.P., ipotezele 1 şi 2 sunt echivalente cu faptul că nu există strategii strict dominate pentru cu orice mulţime de informaţii.
2. Ipoteza 4 arată faptul că jucătorii nu pot ameninţa cu a juca strategii strict dominate.

Una dintre cele mai importante categorii de jocuri dinamice în informaţie incompletă o reprezintă *jocurile de semnalare*.

5.3 Jocuri de semnalare

Un joc de semnalare este un joc dinamic în informaţie incompletă ce presupune doi jucători: Emiţătorul (E) şi Receptorul (R) (sau Leader-Follower).

Jocul are următoarea desfăşurare:

Natura alege tipul t al emiţătorului din mulţimea de tipuri posibile $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$şi probabilitaţile asociate fiecăriu tip t_i: $p(t_i)>0, \sum p(t_i)=1$.

Emiţătorul observă t_i şi alege un mesaj m_j din mulţimea mesajelor $M=\{m_1,\ldots,m_j\}$.

Receptorul observă m_j (nu şi t_i) şi alege o acţiune a_k din mulţimea acţiunilor posibile $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$.

Se determină câştigurile : $U_E(t_i,m_i,a_k)$, $U_R(t_i,m_j,a_k)$.

Observaţie În multe aplicaţii T,M şi A sunt intervale din R, (nu doar mulţimi discrete cum am observat aici).

Acest tip de jocuri este foarte folosit în economie:

-Spence (1973) a oferit un model de semnalare pe piaţa forţei de muncă;

-Myers-Maylef (1984) - au elaborat un model de investiţii (emiţătorul - firma ce doreşte capital, receptorul – eventualul investitor);

-Vickers (1986) – model al politicii monetare (emiţătorul fiind Banca Naţională. şi receptorul piaţa forţei de muncă)

În continuare vom defini diverse tipuri de echilibru ce pot apare în aceste condiţii. În figura 5.4 este reprezentat un joc de semnalare

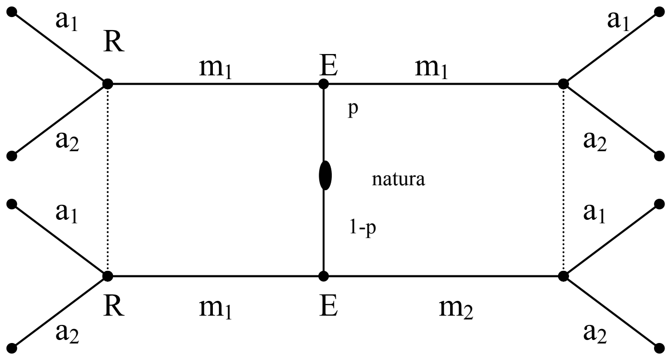

Figura 5.4

Astfel, vom avea:

- Mulțimea tipurilor, $T=\{t_1,t_2\}$;
- Probabilitatea cu care Natura alege tipul Emițătorului, $p\{t_1\}=p;$
- Mulțimea mesajelor: $M=\{m_1,m_2\};$
- Mulțimea acțiunilor receptorului *este* $A=\{a_1,a_2\}$.

Reamintim că *o strategie* a jucătorului 1 este dată de un plan complet de acțiune – în raport cu tipul posibil.

În jocurile de semnalare, o *strategie pură* pentru Emițător (E) este $m(t_i)$ în care se specifică mesajul pe care îl va emite în raport cu tipul său, iar o strategie pură pentru Receptor (R) este o funcție $a(m_j)$ în care se va specifica ce acțiune se va alege în raport cu mesajul emis.

În jocul descris anterior există 4 strategii pure pentru E şi 4 strategii pure pentru R:

1. $E_1 \rightarrow$ joacă m_1 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_1 dacă este de tipul t_2;
   $E_2 \rightarrow$ joacă m_1 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_2 dacă este de tipul t_2;
   $E_3 \rightarrow$ joacă m_2 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_1 dacă este de tipul t_2;
   $E_4 \rightarrow$ joacă m_2 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_2 dacă este de tipul t_2;

2. $R_1 \rightarrow$ joacă a_1 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_1 dacă observă mesajul m_2;
   $R_2 \rightarrow$ joacă a_1 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_2 dacă observă mesajul m_2;
   $R_3 \rightarrow$ joacă a_2 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_1 dacă observă mesajul m_2;
   $R_4 \rightarrow$ joacă a_2 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_2 dacă observă mesajul m_2.

E_1 şi E_4 = se numesc *strategii grupante* (deoarece fiecare tip emite acelaşi mesaj);
E_2 şi E_3 = se numesc *strategii separatoare* deoarece fiecare tip emite mesaje diferite.

Observație În jocurile cu mai multe tipuri există posibilitatea sa avem şi stategii "*parțial grupate*", respectiv "*parțial separatoare"(semiseparatoare*).

În jocul descris anterior, o *stategie mixtă* (sau hibridă) presupune că: t_1 alege m_1, dar t_2 alege cu o probabilitate *(p)* mesajul m_1 respectiv cu probabilitatea $(1\text{–}p)$ mesajul m_2.

Pentru jocurile de semnalare vom defini Echilibrul Bayesian Perfect (aceasta presupune să reformulăm ipotezele 1-4 pentru acest tip de joc)

I_{S1} După ce observă un mesaj m_j din M, R face presupuneri despre tipul ce a emis m_j. Dacă notăm presupunerile cu $p(t_i/m_j)$, cu $p(t_i/m_j)\geq 0$ $(\forall)t_i$ în T şi $\sum_{t_i \in T} P(t_i/m_j)=1$

I_{R2} Pentru fiecare m_j din $M,$ acțiunea actuală a R, ($a^*(m_j)$) va maximiza utilitatea aşteptată a R, date fiind presupunerile sale asupra tipului t_i ce a emis mesajul m_j , $(p(t_i/m_j))$.

Astfel: $a^*(m_j)= \arg\max_{a_j \in A} \sum_{t_j \in T} p(t_i/m_j)\cdot U_R(t_i,m_j,a_{,}.$

I_{S2} Oricare ar fi t_i, mesajul lui E, $(m^*(t_i))$ va maximiza utilitatea aşteptată a E date fiind strategiile $a^*(mj)$ ale R.

Astfel: $$m^*(t_i) = \underset{m_j \in M}{arg\,max} U_E\left(t_i, m_j, a^*(m_j)\right)$$.

I_{S3} Pentru fiecare m_i din *M,* dacă există $t_i \in T$ astfel încât $m^*(t_i)=m_j$, atunci presupunerile R despre mulţimea de informaţii corespunzătoare lui m_j trebuie să se determine conform regulii Bayes şi strategiilor E:

$$p(t_i/m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum\limits_{t_i \in T} p(t_i)}$$

Definiţia 5.4 Un E.B.P. în strategii pure pentru un joc de semnalare este o pereche de strategii $m^*(t_i)$ şi $a^*(m_j)$ şi de presupuneri $p(t_i/m_j)$ ce safisfac *(I_{S1}), (I_{R2}), (I_{S2}) şi (I_{S3}).*

În raport cu strategiile E, echilibrul poate fi grupant sau separator.

Exemplul 5.3
Se consideră jocul de semnalare descris în figura 5.5.

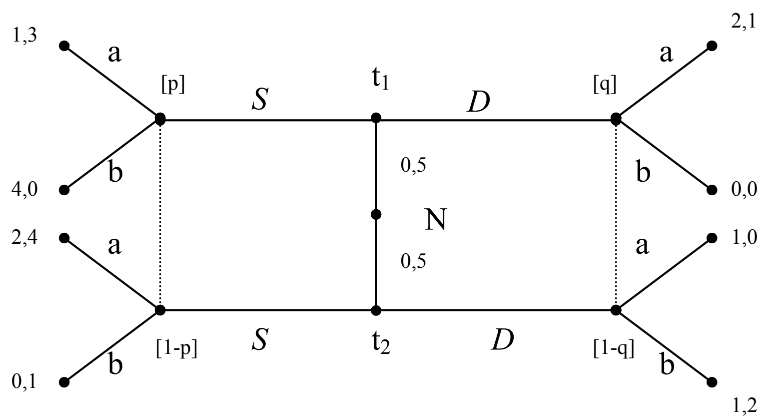

Figura 5.5

Există 4 tipuri de E.B.P. în strategii pure posibile:
1) grupat în *S*;
2) grupat în *D;*
3) separat, cu t_1-*S*, t_2-*D*;
4) separat cu t_1-*D* , t_2-*S*.

Vom analiza cele patru posibilităţi:

1) Presupunem că echilibrul pentru E este *(S,S),* cu *(m′,m″)* reprezintă faptul că t_1 alege mesajul *m′* iar t_2 alege mesajul *m″.*

Atunci mulţimea de informaţii corespunzătoare lui *S* este o cale de echilibru, iar presupunerile R vor fi *(p,1-p)* determinate prin regula Bayes şi strategiile E: cu *p=0,5,* probabilitate apriori.

Date fiind aceste presupuneri, cel mai bun răspuns al R este să joace *a* (cu câştigurile 3 sau 4).

Totuşi trebuie să analizăm modul în care R va reacţiona la strategia *D*.

Pentru tipul t_1 Dacă răspunsul lui R la *D* este *a*, atunci câştigurile lui E vor fi mai mari decât dacă ar juca *S* (2 > 1).

Dacă răspunsul este *a,* atunci Emiţătorul va câştiga 0, mai mic decât 4.

Să deteminăm probabilitatea *q* astfel încât orice echilibru să fie *((S,S),(a,b)).*

$u_R((S,S), a) = u_R((S,S),b) = (0{,}5\cdot 1)\cdot q+0{,}5\cdot 0\cdot(1-q)=0{,}5\cdot 0\cdot q+2\cdot 0{,}5\cdot(1-q) \rightarrow$
$0{,}5\cdot q=1-q, \quad 1{,}5\cdot q=1, \quad q=2/3$

Deci pentru $q < 2/3$, Receptorul va alege să joace acţiunea *a*.

Deci *a* este optimal pentru R pentru orice $q \le 2/3$, şi de aici rezultă că echilibrul grupant este *[(L,L),(a,b), p=0,5; q]*.

2) *Pentru tipul* t_2 : $q=0.5$

$$\frac{a(t_i)}{\sum a(t_i)} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \text{BR(R) - cu câştigul 0 pentru } (t_1)$$
- cu câştigul 1 pentru (t_2).

Dar t_1 câştigă 1 jucând *S,*
$1\cdot 0{,}5<2\cdot 0{,}5$ deci pentru R este optimal să joace *a.*

Acesta conduce la câştigurile de - 0 pentru *(t1)*
- 1 pentru *(t2).*

Deci *(D,D)* nu poate fi echilibru deoarece este dominat de strategia *(S,S)* .

3) *echilibre separatoare :*
t1-S
t2-D

Atunci ambele se găsesc pe calea de echilibru rezultă $p=1$ şi $q=0$.
$q=p(t_1/D)=p(t_1)$

$$P(t_1/S)=\frac{P(t_1)}{\sum_{t_i\in T}P(t_i)}=\frac{0{,}5}{0{,}5}=1$$

$q(t_1/D)=0$ (deoarece tipul 1 anunţă S)

Să vedem dacă pentru E este optimal să devieze de la aceste strategii. Dacă tipul 2 deviază şi alege *S*, atunci câştigul nu va fi 1, ci 2 deoarece şi jucătorul 2 va devia şi va alege *a*, deci acesta nu este un E.B.P.

4) *echilibre separate*
t_1-*D*, t_2 - *S*
$p=0 \quad q=1$

În aceste condiţii B.R. pentru R va fi *(a,a),* iar câştigul pentru E va fi de 2. Să verificăm dacă a devia este optimal:

t_1 anunţă $S \Rightarrow$ R va juca *a,* cu câştigul lui E de 1. Deci nu este tentat să devieze.
t_2 anunţă $D \Rightarrow$ R va juca *b*, cu câştigul lui E de 1. Deci nici aici nu este tentat să devieze.

5.4 Aplicaţii

A. Investiţiile şi structura capitalului

Presupunem cazul unui antreprenor ce doreşte să înceapă o nouă afacere şi are nevoie de capital pentru a porni la lucru.

Antrepenorul (A) are informaţii private despre profitabilitatea afacerii sale, dar câştigurile nu pot fi despărţite de cele ale companiei (deci şi cele vechi).

Presupunem că A oferă un număr de acţiuni în schimbul finanţării necesare.

În ce condiţii va avea loc finanţarea?

Să "traducem" problema intr-un joc de semnalare.

Presupunem că profitul firmei poate fi de 2 tipuri: scăzut *S* sau mare *M*, $M>S>0$. Necesarul de investiţie este *I*, iar câştigul este *R*, atunci $R > I(1+r)$.

Desfăşurarea jocului este următoarea:

1. Natura determină tipul firmei (cu probabilitatea *p* firma are profitul *S*).
2. A ştie profitul şi oferă investitorului o proporţie α din π, cu $0 \leq S \leq 1$.
3. Investitorul observă α (nu şi π) şi decide să accepte sau să respingă oferta.
4. Dacă investitorul respinge oferta , atunci câştigurile pentru investitor sunt $I(1+r)$, iar pentru A este π.

Dacă investitorul acceptă atunci câştigurile pentru investitor sunt $S(\pi+R)$, iar pentru A $(1-S)(\pi+R)$.

Myers şi Mayluf (1984) au analizat acest model pornind de la o firmă mare cu acţionari şi manager .

Zenelor (1991) a determinat contractul optimal pe care trebuie sa-l ofere managerul acţionarilor.

Jocul este foarte uşor datorită simplităţii soluţiei: mulţimea acţiunilor este limitată iar mulţimea semnalelor este mare dar ineficientă.

Să presupunem că după ce a apărut oferta α, investotorul presupune cu probabilitatea *q* că $\pi=S$. Atunci investitorul acceptă propunerea α dacă şi numai dacă:

$$\alpha[qS+(1-q)M+R] \geq I(1+r) \qquad (1)$$

Pentru A: presupunem că ştie că profitul este π, va compara câştigul pe care îl are în cele două variante şi dacă face investiţia sau nu, in raport cu α – partea ce o va oferi:

$\alpha(\pi+R)=R$

$$(1-\alpha)\cdot(\pi+R) \geq \pi \;\Rightarrow\; (\pi+R)-\alpha\cdot(\pi+R) \geq \pi \Rightarrow\; R \geq \alpha\cdot(\pi+R) \Rightarrow$$

$$\alpha \leq \frac{R}{\pi+R} \qquad (2)$$

Pentru *un echilibru grupant* presupunerea investitorului trebuie să fie $q = p$ după ce primeşte oferta (din regula Bayes).

Dar restricţia (2) este mult mai dificil de satisfăcut pentru tipul *M* decât pentru tipul *S*.

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\alpha \geq \frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \quad \text{şi} \quad \alpha \leq \frac{R}{\pi+R} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \leq \frac{R}{\pi+R}$$

- pentru tipul $\pi=S$ $\quad \frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \leq \frac{R}{S+R}$ $\quad$ cum $M>S$

$$\pi=M \quad \frac{I(1+r)}{pS+(1-p)M+R} \leq \frac{R}{M+R} \qquad (3)$$

cum $M>S$ $\quad \frac{R}{S+R} > \frac{R}{M+R}$

- dacă $p \to 0$, atunci relaţia este adevărată, deoarece $I(1+R) \leq R$
- dacă $p \to 1$, atunci echilibrul este posibil doar dacă:

$$\frac{I(1+r)}{S+R} \leq \frac{R}{M+R} \Rightarrow \quad \frac{R}{M+R} - \frac{I(1+r)}{S+R} \geq 0$$

$$SR+R^2-MI(1+r)-RI(1+r)\geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$R[R-MI(1+r)]\geq MI(1+r)-SR \quad \Rightarrow$$

$$R-I(1+r) \geq \frac{I(1+r)M}{R} - S \qquad (4)$$

Interpretare Dificultatea obţinerii unui echilibru grupant este aceea că tipul cu profit mare trebuie să "contribuie" (subvenţioneze) pe cel cu profit mic.

Dacă investitorul este sigur că $\pi=M$ atunci $q=0$ astfel α este la nivelul cel mai mic

posibil: $\alpha = \frac{I(1+r)}{M+R}$

În acest caz pentru firma profitabilă valoarea α va fi prea mare, poate chiar prea mare pentru a determina să realizeze proiectul.

Un echilibru grupant va exista pentru $p \to 0$ deci, fie costul „ subvenţionării" este mic, fie este îndeplinită relaţia (3), adică se obţine mai mult din costul dus de noul proiect decât din subvenţionare. Dacă (2) nu este îndeplinită, atunci nu există un echilibru grupant, şi rezultă în acest caz existenţa unui echilibru separator.

În concluzie, firma S va oferi proporţia $\alpha = \dfrac{I(1+r)}{S+R}$ ceea ce investitorul va accepta,

iar firma M va oferi proporţia $\alpha < \dfrac{I(1+r)}{M+R}$ ceea ce investitorul va refuza.

În asemenea situaţie investiţiile au o eficienţă scăzută, chiar dacă noua investiţie este profitabilă, deoarece tipul "bun" nu va dori să o facă.

Aceasta arată modul în care semnalele nu sunt eficiente.

Problema se poate modifica, în sensul în care firma nu oferă acţiuni, ci face un împrumut D.

Dacă nu se dă faliment atunci câştigul investitorului este D, iar al firmei: $\pi+R-D$

Dacă se dă faliment, atunci pentru investitor câştigul este $\pi+R$, iar pentru firmă 0.

Cum $S > 0$, există un echilibru grupant: ambele tipuri de firme oferă un contract $D=I(1+r)$ pe care investitorul nu îl va accepta.

Dacă D este negativ, astfel încât $R + D < I\ (1+r)$, atunci tipul slab nu va putea plăti datoria, iar investitorul nu va accepta contactul.

Analog se poate raţiona pentru cazul în care S şi M reprezintă profituri aşteptate (cu probabilitatea 1/2).

Dacă profitul este $\pi + K$ cu probababilitatea 1/2 , atunci tipul slab nu va fi în stare să plătească dobânda, iar investitorul nu va accepta contractul.

Dacă profitul este $\pi - K$, cu probababilitatea 1/2, atunci nici firma, nici investitorul nu vor accepta contractul.