

## Modelul Jorgenson

$$\max_{I, L} \int_0^{\infty} e^{-it} [p \cdot Q(K(t), L(t)) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t)] dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) \\ - \text{restricție asupra variabilei de comandă} \\ I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max} \begin{cases} I_{\min} < 0 \\ I_{\max} > 0 \end{cases} \\ \text{restricția de nenegativitate asupra variabilei de stare:} \\ K(t) \geq 0 \\ K(0) = K_0 \geq 0 \end{array} \right.$$

*hamiltonianul* ajustat (fără actualizare):

$$H(K(t), L(t), I(t), \lambda(t), t) = \{p \cdot Q(K(t), L(t)) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t)\} + \lambda(t) \cdot (I(t) - a \cdot K(t))$$

daca:  $\Psi(t) = e^{it} \cdot \lambda(t)$  și  $H(t) = e^{-it} \cdot H_{\text{ajustat}}(t)$

**ecuația de dinamică:**

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H(\cdot)}{\partial K}(t) \Leftrightarrow \dot{\Psi}(t) = i \cdot \Psi(t) - e^{it} \cdot \frac{\partial H(\cdot)}{\partial K}(t)$$

**restricții asupra variabilelor:**

$$\begin{cases} I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max} \\ K(t) \geq 0 \end{cases}$$

## Lagrangeanul

$$L(L(t), K(t), \lambda(t), \mu_1(t), \mu_2(t), \nu(t)) = H(L(t), K(t), \lambda(t)) + \mu_1(t) \cdot (I(t) - I_{\min}) + \mu_2(t) \cdot (I_{\max} - I(t)) + \nu(t) \cdot K(t) \\ = \{p \cdot Q(K(t), L(t)) - w \cdot L(t) - c \cdot I(t)\} + \lambda(t) \cdot (I(t) - a \cdot K(t)) + \mu_1(t) \cdot (I(t) - I_{\min}) + \mu_2(t) \cdot (I_{\max} - I(t)) + \nu(t) \cdot K(t)$$

**Sistemul de condiții Kuhn-Tucker**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(\cdot)}{\partial I}(t) = -c + \Psi(t) + \mu_1(t) - \mu_2(t) = 0 \\ \frac{\partial L(\cdot)}{\partial L}(t) = p \cdot \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial L}(t) - w = 0 \end{array} \right.$$

și:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(t) \cdot (I(t) - I_{\min}) = 0 \\ \mu_2(t) \cdot (I_{\max} - I(t)) = 0 \\ \nu(t) \cdot K(t) = 0 \\ \mu_1(t), \mu_2(t), \nu(t) \geq 0 \end{array} \right.$$

(5 ecuații cu 5 necunoscute:  $I$ ,  $L$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  și  $\nu$ , din care vom exprima variabilele de decizie  $I$  și  $L$  în funcție de variabila de stare  $K$  și de variabila adjuncte  $\Psi$ )

Se rezolva sistemul, se exprima variabilele de decizie  $I$  și  $L$  în funcție de variabila de stare  $K$  și de variabila adjuncte  $\Psi$  și se ajunge la sistemul de ecuații diferențiale:

$$SD: \begin{cases} \dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) \\ \dot{\Psi}(t) = i \cdot \Psi(t) - \frac{\partial L(\cdot)}{\partial K}(t) = (i + a) \cdot \Psi(t) - p \cdot \frac{\partial Q(\cdot)}{\partial K}(t) - v(t) \end{cases}$$

cu valoarea inițială  $K(0) = X_0$  și condiția de transversalitate :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \text{finit}$$