

A fuzzy approach of multi-criteria decisions

*Authors: Lorelai Jantea¹, PhD. Student, Academy of Economic Science, Romania;
Bogdan Sacal², PhD. Student, Academy of Economic Science, Romania;
Adrian Victor Badescu³, PhD., Academy of Economic Science, Romania*

Abstract

The multi-criteria decision making problem represents an extremely complex subject, studied intensively in the past years. In fact, this kind of problem is a problem of decision making under deterministic conditions, where the main factor is the modelling of the decision-maker's decisional profile, in order to allow for the accurate forecast of his choices.

Modelling the decision-maker's decisional profile implies finding an answer to the following two questions:

- Which are the decision criteria taken into consideration by the decision-maker when taking a decision?
- How can we quantify the importance of a decision criterion with respect to all the decision criteria analyses, taking into consideration the decision-maker's subjective decisional profile?

Out of all the methods and techniques developed for solving the multi-criteria decision problems, the decision-maker can choose the method that he considers to be the most adequate, both for the proposed problem and for him, as the decision-maker. This choice implies a sound knowledge of those methods, and the choice may not always be the best, meaning that the chosen method might provide results that do not correspond to the real choices already taken.

Establishing the list of the decision criteria that must be taken into consideration may quite easily be done, by choosing out of a list of characteristics of the existing alternatives, but the real challenge is to quantify the importance of the decision criteria analysed, in relation to one another and in relation to all the decision criteria taken into consideration.

This paper presents a methodology of solving the decisional problems, and several methods/techniques/concepts that might be employed.

Keywords: *Ponderi ale criteriilor decizionale, numere fuzzy, metoda AHP, metoda TOPSIS*

JEL Classification: *G11, D81, C44, D79*

O abordare fuzzy a deciziilor multicriteriale

Autor: Drd. Lorelai JANTEA, Facultatea de Management, Academia de Studii Economice, Romania; Drd. Bogdan SACAL, Facultatea de Cibernetică, Academia de Studii Economice, Romania; Prof. Univ. Dr. Adrian Victor Badescu, Facultatea de Cibernetică, Academia de Studii Economice, Romania

Rezumat

Problema decizională cu criterii decizionale multiple reprezintă un subiect extrem de complex, studiat în mod extensiv în ultimii ani. În esență o astfel de problemă este o problemă în condiții deterministe în care principalul factor de dificultate îl reprezintă modelarea

¹ E-mail address: lorelaijantea@yahoo.com

² E-mail address: secs43@yahoo.com

³ E-mail address: adi_bad@yahoo.com

profilului decizional al decidentului pentru a putea permite previzionarea cu acuratețe a alegerilor acestuia.

Modelarea profilului decizional al unui decident presupune găsirea unui răspuns la următoarele două întrebări:

- Care sunt criteriile decizionale care sunt luate în considerare de către decident la luarea unei decizii?
- Cum se poate cuantifica importanța unui criteriu decizional în raport cu ansamblul criteriilor decizionale considerate, ținând cont de profilul decizional subiectiv al decidentului?

Din multitudinea de metode și tehnici dezvoltate pentru rezolvarea problemelor decizionale multicriteriale, decidentul poate alege metoda pe care o consideră cea mai adecvată, atât pentru problema propusă, cât și pentru el ca decident. Această alegere presupune însă cunoașterea acestor metode, iar alegerea efectuată poate să nu fie întotdeauna cea mai inspirată, în sensul că e posibil ca metoda/tehnica aleasă să furnizeze rezultate care să nu corespundă alegerilor reale efectuate.

Stabilirea listei criteriilor decizionale care trebuie luate în considerare se poate face relativ ușor, prin alegerea dintr-o listă de caracteristici ale alternativelor decizionale considerate, dar cuantificarea importanței criteriilor decizionale raportate unele la altele și la ansamblul criteriilor decizionale considerate, reprezintă adevărata problemă.

În această lucrare este prezentată o metodologie de rezolvare a problemelor decizionale, cu exemplificarea diverselor metode/tehnici/concepte ce pot fi utilizate.

Cuvinte cheie: Ponderi ale criteriilor decizionale, numere fuzzy, metoda AHP, metoda TOPSIS

Clasificare JEL: G11, D81, C44, D79

1. INTRODUCERE

Problemele decizionale multicriteriale precum și metodele de rezolvare a acestora cunosc o mare varietate de abordări. Definierea unei probleme necesită luarea în calcul a mai multor elemente, și anume: obiectivele, criteriile de decizie, ponderile criteriilor, alternativele decizionale, decidentul, consecințele alternativelor după fiecare criteriu de decizie și stările naturii.

O parte a metodelor de optimizare multicriterială propun compensarea valorii nefavorabile a unui criteriu prin valorile favorabile ale celorlalte luate în analiză. Din această categorie de metode se pot evidenția:

- *metode bazate pe determinarea scorului favorabil* (metoda utilității globale, procesul ierarhic de analiză AHP, SMART – Simple Multi-Attribute Rating Technique etc.)
- *metode de compromis*, caracterizate de alegerea drept optim multicriterial a acelei variante decizionale care se apropie cel mai mult de o soluție ideală (metoda TOPSIS);
- *metode de surclasare*, bazate pe conceptele de concordanță și discordanță, care rezidă în ordonarea alternativelor în funcție de concordanța alternativelor cu criteriile, adică cu cât o alternativă decizională prezintă mai multe valori favorabile criteriilor, cu atât este ea însăși mai favorabilă (metoda atribuirii liniare, ELECTRE, PROMETHEE)

Această lucrare prezintă o metodologie de soluționare a problemelor decizionale multicriteriale în condiții deterministe, pornind de la metodele clasice, iar în final este propusă o dezvoltare a acestei metodologii utilizând numere fuzzy.

2. LITERATURA DE SPECIALITATE

AHP (Analytical Hierarchy Process) reprezintă o tehnică structurată pentru soluționarea problemelor decizionale complexe, dezvoltată de către Thomas L. Saaty. Aceasta tehnică permite decidentului luarea deciziei celei mai potrivite pentru el, neindicând neapărat decizia corectă. Această metodă se bazează pe divizarea problemei în subprobleme mai simple de ierarhizare/ordonare ce pot fi analizate independent una de alta. Odată construită ierarhia, decidentul evaluează elementele acesteia prin compararea lor succesivă, două câte două. Aceste comparații reflectă principalul avantaj al abordării, și anume acela că nu necesită în mod obligatoriu utilizarea unor informații obiective și clar definite, permițând efectuarea comparațiilor pe baza unor criterii subiective și eminentemente ambigue. Toate aceste ordonări sunt transformate în valori numerice, ceea ce va permite apoi agregarea rezultatelor obținute în așa fel încât soluția obținută să reprezinte soluția problemei inițiale.

Metoda AHP poate fi utilizată cu succes atât de către un singur decident, cât și de un grup de decidenți. Situațiile decizionale pentru care este recomandată utilizarea acestei metode sunt:

- alegerea unei alternative în condițiile utilizării mai multor criterii decizionale;
- ordonarea unor alternative, de la cea mai bună la cea mai puțin bună;
- repartizarea resurselor pentru mai multe alternative;
- compararea proceselor unei organizații cu cele ale organizațiilor de top.

Utilizarea acestei metode presupune parcurgerea următorilor pași:

Pasul 1. Definirea criteriilor decizionale sub forma unei ierarhii de obiective. La nivelul superior se află obiectivul problemei, la nivelele intermediare se află criteriile decizionale, iar la nivelul inferior, alternativele/variantele decizionale.

O ierarhie reprezintă un sistem de prioritizare și organizare a conceptelor în care fiecare element, cu excepția celui de la nivelul superior, este subordonat unuia sau mai multor elemente ale ierarhiei.

Ierarhia AHP presupune plasarea la nivelul superior a scopului/obiectivului principal, iar apoi la nivelele intermediare plasarea criteriilor decizionale, eventual descompuse în subcriterii, dacă este cazul. La nivelul cel mai de jos se regăsesc alternativele decizionale care trebuie ordonate în funcție de preferințele decidentului/decidenților.

Aceasta este în esență o modalitate alternativă de modelare a problemei decizionale multicriteriale în condiții deterministe. O reprezentare grafică a acestei ierarhii este prezentată în continuare:

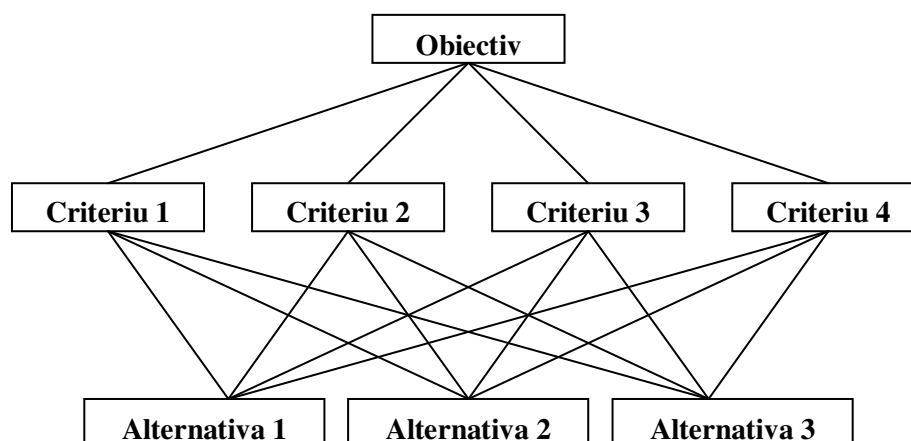


Fig. 1 – Ierarhie AHP

Ierarhia inițial stabilită poate fi modificată pe parcursul derulării procesului decizional, prin identificarea de noi noduri.

Pasul 2. Se ponderează criteriile, sub-criteriile și alternativele în funcție de importanța lor pentru nivelul superior corespondent. Pentru realizarea acestei ordonări se utilizează comparații simple.

În această etapă sunt stabilite prioritățile pentru nodurile din ierarhia stabilită. Prioritățile reprezintă valori numerice în intervalul [0,1] asociate nodurilor și care reprezintă ponderile relative ale respectivelor noduri în orice grup.

Prin definiție, ponderea asociată nivelului superior/obiectivului este 1,00. Pentru fiecare nivel din ierarhie suma ponderilor relative va fi 1,00.

Semnificația acestor ponderi este cea care indică modalitatea de calcul a acestora. Un nod cu ponderea 0,20 va fi de două ori mai important decât un nod cu semnificația 0,10. Aceasta modalitate de cuantificare a preferințelor este cea care permite nu numai ordonarea preferințelor exprimate de un decident, ci și cuantificarea intensității acestei preferințe.

Două concepte strâns legate de ierarhii sunt cele de priorități locale și priorități globale. Prioritățile locale sunt cele prezentate anterior și care nu depind de nivelul ierarhic pe care se află nodul, în timp ce prioritățile globale se obțin prin ponderarea priorităților locale cu toate ponderile nivelurilor direct superioare nivelului considerat. Astfel, suma ponderilor globale ale nodurilor-fii este întotdeauna egală cu ponderea globală a nodului-părinte. Deși prioritățile obiectivului, criteriilor și alternativelor decizionale sunt strâns intercorelate, metoda AHP presupune considerarea acestora ca valori independente. În primă instanță se consideră valorile implicite ale ierarhiei:

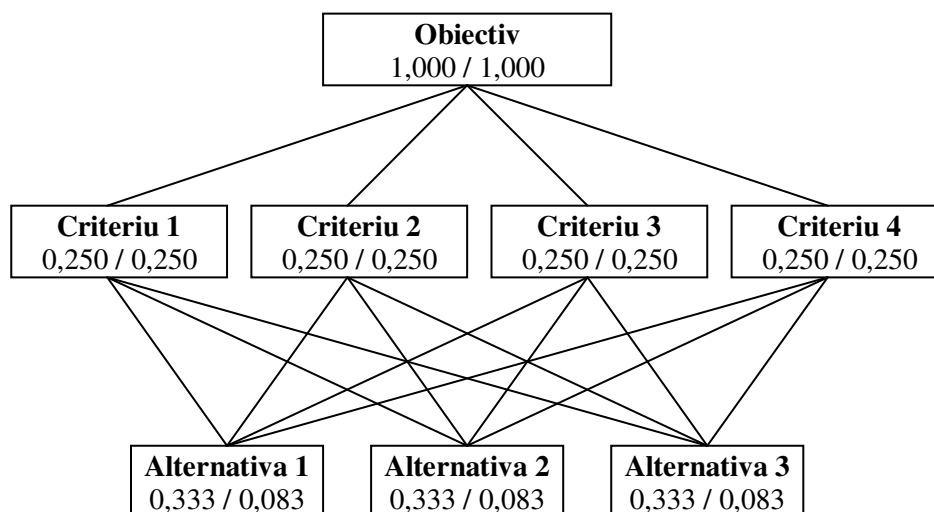


Fig. 2 – Ponderi locale și globale implicite

Aceste valori implicite ale ponderilor sunt modificate ulterior în vederea obținerii unei matrici decizionale. Aceste modificări se fac prin realizarea unor comparații succesive a elementelor problemei, două câte două.

Se compară între ele elementele de pe același nivel ierarhic și care au același nod-părinte utilizând următoarea grila de punctaj:

Grilă de punctare pentru comparații		
Intensitatea	Definiție	Explicație
1	Importanță egală	Cele doua elemente contribuie în mod egal la realizarea obiectivelor
3	Importanță moderată	Un element este ușor favorizat în raport cu celălalt
5	Importanță mare	Un element este puternic favorizat în raport cu celălalt
7	Importanță foarte mare	Un element îl domină în mod clar pe celălalt ca importanță

9	Importanță extrema	Un element este în mod indiscutabil mai important decât celălalt
---	--------------------	--

Pe baza rezultatelor comparațiilor realizate pentru o grupă de noduri care au același nod-parinte se poate realiza o matrice astfel:

$$A = [a_{ij}]$$

unde a_{ij} reprezintă valorile asociate în urma comparațiilor realizate. Această matrice se normalizează prin împărțirea valorilor la suma elementelor de pe fiecare coloană.

Pasul 3. După dezvoltarea unei matrici decizionale se determină un vector de ponderi pentru elementele din matrice. Acesta este un vector propriu normalizat, care va permite stabilirea priorităților globale pentru fiecare alternativă decizională.

Elementele de pe fiecare rând rezultate în urma normalizării sunt apoi utilizate pentru determinarea vectorului. Elementele vectorului ponderilor sunt determinate ca medii aritmetice ale valorilor de pe fiecare rând.

Pasul 4. Verificarea consistenței rezultatelor obținute.

Pasul 5. Luarea deciziei finale pe baza rezultatelor obținute.

Metoda **TOPSIS** reprezintă o metodă decizională de ordonare a variantelor (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), dezvoltată de C.L. Hwang și K. Yoon. Principiul acestei metode pornește de la faptul că o soluție ideală, care să furnizeze valoarea maximă a fiecărui obiectiv analizat, este aproape imposibil de obținut și, ca urmare, este necesar să se caute acea alternativă pentru care valorile consecințelor se apropie cât mai mult de soluția ideală. Metoda TOPSIS prevede normalizarea matricii consecințelor și determinarea distanțelor față de soluția ideală și față de cea mai nefavorabilă variantă; acea alternativă decizională care prezintă cea mai mică distanță față de soluția ideală și cea mai mare distanță față de cea mai nefavorabilă soluție se consideră a fi optim multicriterial. Pornind de la cele două metode decizionale se poate dezvolta o metodologie care combina câteva dintre avantajele lor pentru a asigura un cadru teoretic adecvat soluționării problemelor decizionale multicriteriale.

3. MODELUL

Metodologia propusă pentru soluționarea problemei decizionale multicriteriale în condiții deterministe are în vedere parcurgerea a două etape care combină cele două metode decizionale prezentate anterior.

Etapa 1. Stabilirea ponderilor decizionale ale fiecărui criteriu utilizat, prin implicarea unor concepte din metoda AHP

Pasul 1. După identificarea criteriilor decizionale ce vor fi utilizate se realizează comparații între acestea, două câte două și se apreciază, utilizând o scală de tipul celei prezentate anterior în acest capitol. Se obține astfel matricea relațiilor între criteriile decizionale.

Aceasta este o matrice în care fiecare element cuantifică intensitatea preferinței elementului de pe fiecare linie față de elementul de pe coloană, conform scalei de intensitate stabilite:

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ unde } i, j = 1 \dots n$$

Pasul 2. Se efectuează normalizarea matricii relațiilor între criteriile decizionale prin raportarea valorilor la suma elementelor de pe fiecare coloană.

Pasul 3. Se verifică consistența informațiilor obținute în matricea normalizată prin determinarea valorilor proprii ai matricii.

Pasul 4. Se determină vectorul ponderilor decizionale prin calcularea valorilor medii de pe fiecare linie. Valorile obținute vor reprezenta ponderile decizionale ale criteriilor ce vor fi utilizate.

Etapa 2. Determinarea alternativei decizionale cea mai apropiată de valoarea optimă prin utilizarea metodei decizionale TOPSIS. Ponderile decizionale considerate sunt cele rezultate în urma parcurgerii etapei 1.

Se pornește de la matricea consecințelor evaluate după o serie de criterii, fiecare având un anumit grad de importanță $M=(x_{ij})$.

Pasul 5. Se construiește matricea normalizată R

$$R_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}},$$

unde $i = 1, m$ (m fiind numărul total de criterii de evaluare)
 $j = 1, n$ (n fiind numărul total de alternative de analizat)

Pasul 6. Se construiește matricea normalizată ponderată:

$V = (v_{ij})$, unde $v_{ij} = p_j \cdot r_{ij}$, p_j fiind ponderea importanței fiecărui criteriu de evaluare

Pasul 7. Se determină soluțiile ideală și cea ideal- negativă:

Soluția ideală: V^+ :

$$v_j^+ = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) \cdot \text{daca } C_j \text{ este de max} \\ \min_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) \cdot \text{daca } C_j \text{ este de min} \end{cases}$$

Soluția ideal- negativă: V^- :

$$v_j^- = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) \cdot \text{daca } C_j \text{ este de max} \\ \max_{1 \leq i \leq m} (v_{ij}) \cdot \text{daca } C_j \text{ este de min} \end{cases}$$

Pasul 8. Se calculează distanța dintre soluții:

$$S_{i+} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}$$

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}$$

unde $i=1, 2 \dots m$

Pasul 9. Se calculează apropierea de soluția ideală și se realizează o ierarhizare a variantelor în ordine descrescătoare a criteriilor C:

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}$$

Metodologia prezentată anterior poate fi utilizată pentru soluționarea problemelor decizionale multicriteriale, însă în varianta propusă ea prezintă mai multe dezavantaje:

- poate permite realizarea unei analize pornind de la presupuneri inconsistente privind relațiile existente între criteriile decizionale;
- nu permite modelarea/formalizarea decât pentru relații precis exprimate între criteriile decizionale.

Aceste neajunsuri pot fi remediate cu ușurință prin utilizarea noțiunii de **număr fuzzy** din teoria mulțimilor fuzzy.

Înainte de a prezenta modalitatea de utilizare vom defini noțiunea de număr fuzzy. O mulțime fuzzy reprezintă o clasă de obiecte cu grade continue de apartenență la respectiva mulțime. Orice mulțime fuzzy este caracterizată printr-o funcție de apartenență care exprimă gradul în care un obiect aparține mulțimii respective.

Un **număr triunghiular fuzzy** este definit după cum urmează:

$$\tilde{M} = \left(\frac{m_1}{m_2}; \frac{m_2}{m_3} \right) = (m_1, m_2, m_3)$$

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 0 & , \text{daca } x < m_1 \text{ sau } x > m_3 \\ \frac{x - m_1}{m_2 - m_1} & , \text{daca } x \in [m_1, m_2] \\ \frac{m_3 - x}{m_3 - m_2} & , \text{daca } x \in (m_2, m_3] \end{cases}$$

În continuare este prezentată o reprezentare grafică a unui număr fuzzy triunghiular:

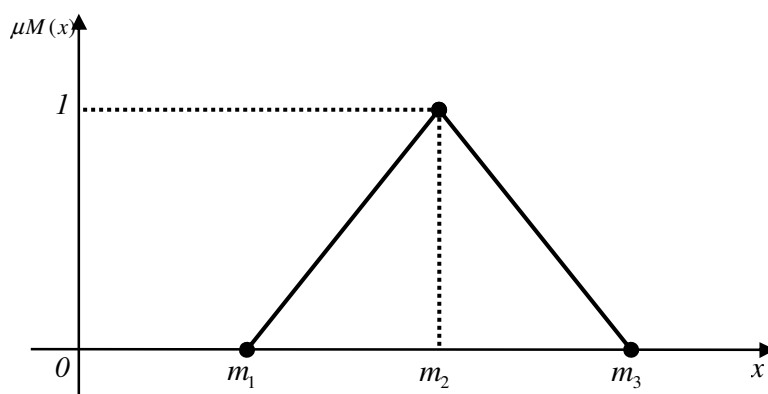


Fig. 3 – Număr fuzzy triunghiular

Similar cu definiția prezentată anterior se poate defini și notiunea de **număr fuzzy trapezoidal**:

$$\tilde{M} = \left(\frac{m_1}{m_2}; \frac{m_3}{m_4} \right)$$

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 0 & , \text{daca } x < m_1 \text{ sau } x > m_4 \\ \frac{x - m_1}{m_2 - m_1} & , \text{daca } x \in [m_1, m_2] \\ 1 & , \text{daca } x \in (m_2, m_3] \\ \frac{m_4 - x}{m_4 - m_3} & , \text{daca } x \in (m_3, m_4] \end{cases}$$

În continuare este prezentată o reprezentare grafică a unui număr fuzzy trapezoidal:

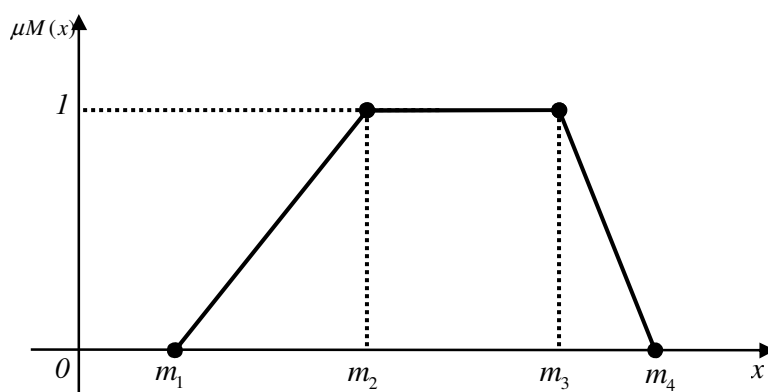


Fig. 4 – Număr fuzzy trapezoidal

Utilizând cele două noțiuni prezentate anterior privind numerele fuzzy se pot efectua dezvoltări ale metodologiei decizionale prezentate.

Dacă se consideră metodologia prezentată în care relațiile între criteriile decizionale se exprimă prin numere fuzzy de tipurile prezentate, atunci se impun o serie de modificări. Pentru utilizarea numerelor fuzzy comparațiile între criteriile decizionale se efectuează ținând cont de aspectele teoretice implicate. Se modifică etapa 1 prezentată anterior astfel:

Etapa 1. Stabilirea ponderilor decizionale ale fiecărui criteriu decizional utilizat prin utilizarea unor noțiuni din metoda AHP

Pasul 1. Se construiește matricea relațiilor între criteriile decizionale exprimate prin numere fuzzy, fie ele triunghiulare sau trapezoidale.

Pasul 2. Pentru fiecare criteriu decizional se determină valoarea sintetică utilizând relația de calcul:

$$S_i = \sum_{j=1}^n M_{g^i}^j \otimes \left[\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n M_{g^i}^j \right] \text{ unde } M_{g^i}^j \text{ reprezintă valoarea corelației între criteriul prezentat}$$

pe linia j și cel prezentat pe coloana i .

Aceste valori reprezintă de asemenea numere fuzzy triunghiulare/trapezoidale.

Pasul 3. Se construiește o matrice care va conține gradele de posibilitate ca criteriul de pe linia j să fie preferat criteriului de pe linia i utilizând următoarele relații de calcul:

➤ În cazul utilizării numerelor triunghiulare fuzzy:

$$G(M_a \geq M_b) = \begin{cases} 1 & , \text{daca } m_2^a \geq m_2^b \\ \mu M_a(d) & , \text{altfel} \end{cases} ,$$

unde d reprezintă valoarea ordonatei în care cele două funcții de apartenență μM_a și μM_b se intersectează și au valoarea maximă.

➤ În cazul utilizării numerelor trapezoidale fuzzy:

$$G(M_a \geq M_b) = \begin{cases} 1 & , \text{daca } m_2^a \geq m_3^b \\ \mu M_a(d) & , \text{altfel} \end{cases}$$

unde d reprezintă valoarea ordonatei în care cele două funcții de apartenență μM_a și μM_b se intersectează și au valoarea maximă.

Pasul 4. Se determină valoarea minimă de pe fiecare linie a matricei gradelor de posibilitate construită. Se obține astfel vectorul ponderilor nenormalizate.

Pasul 5. Se normalizează vectorul obținut la pasul anterior, obținându-se vectorul ponderilor normalizate ale criteriilor decizionale.

Aceste modificări ale metodologiei prezentate pot conduce la rezultate diferite de metodologia clasică, aceasta neputând surprinde anumite subtilități privind criteriile decizionale utilizate.

4. CONCLUZII

Metodologia de lucru propusă în aceasta lucrare reprezintă o alternativă la tehnicile și metodele utilizate în mod curent la soluționarea problemelor decizionale multicriteriale. Pe lângă criteriile tehnice și economice se pot utiliza și alte tipuri de criterii, iar determinarea ponderilor acestora se face în mod facil și eficient.

În metodologia prezentată se poate utiliza orice metodă clasică de soluționare a problemelor decizionale în a doua etapă, iar rezultatele obținute pot să difere în mod semnificativ.

Alte abordări sunt posibile fie prin alegerea unei alte metode de determinare a ponderilor criteriilor decizionale, fie prin utilizarea unor alte tipuri de mulțimi/numere fuzzy.

REFERINTE

1. Alo, R.; De Korvin A.; Modave, F. (2002) – Using fuzzy functions to select an optimal action in decision theory – EUNITE Conference, Portugalia
2. Bădescu, A. V.; Dobre T. I. (2001) – Modelarea deciziilor economico-financiare – Ed. Conphys, Rm. Vâlcea
3. Colson, D. L. (2004) – Comparison of weights in TOPSIS models – Mathematical and Computer Modeling
4. Dobre, I.; Bădescu, A. V.; Păuna, L. (2007) – Teoria deciziei – Ed. ASE, București
5. Mahmoodzadeh, S.; Shahrabi, J.; Pariazar, M.; Zaeri, M. S. (2007) – Project selection by using fuzzy AHP and TOPSIS Technique – Proceeding of World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 24
6. Meredith, J.; Mantle, S. (2000) – Project Management: A Managerial Approach – Fourth Ed., Wiley, New York
7. Saaty, T. L. (1980) – The analytic hierarchy process – New York, McGraw-Hill
8. Sacal, B.; Bădescu, A. V. (2008) - A fuzzy approach to Different Public Acquisitions Procedures - Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 1-2/2008, vol. 42

***) Lucrarea prezintă succint o parte a rezultatelor temei de cercetare a Grantului nr. 1805, din cadrul Programului IDEI PN. II 2009-2011, cu titlul : ”Cercetări exploratorii privind elaborarea unui sistem inteligent de optimizare a deciziilor financiare”, Director Proiect – Prof. Univ. Dr. Adrian Victor Bădescu.**