CAPITOLUL III

PROGRAMARE DINAMICĂ

Dacă analizăm natura problemelor care au fost rezolvate prin programare liniară sau prin teoria grafurilor, constatăm că procesul economic pe care doream să îl optimizăm se desfăşura într-o singură fază (etapă sau perioadă). Ținând cont de faptul că există numeroase probleme de optimizare care modelează procese economice care se desfăşoară în mai multe perioade şi la fiecare perioadă trebuie să stabilim soluția optimă, viziunea statică poate constitui un neajuns. Este evident faptul că succesiunea de soluții nu se poate determina ținând seama numai de parametrii fiecărei perioade analizate în parte, şi că este necesar să identificăm o succesiune de soluții care optimizează întregul proces analizat. Problemele economice care reclamă o suită de decizii secvențiale se caracterizează prin faptul că o decizie care adoptată într-o anumită perioadă are atât un efect economic imediat, cât şi unul de lungă durată, care influențează şi asupra celorlalte etape.

Optimizarea proceselor secvențiale se obține prin metodele unei teorii matematice relativ recent constituite şi care se numeşte ***programare dinamică***. Creatorul acestei teorii este Richard Bellman, iar lucrarea sa fundamentală este *Dynamic Programming* apărută în anul 1957. Programarea dinamică are un câmp larg de aplicație în cercetarea operațională (organizarea producției, gestiunea stocurilor, reînnoirea echipamentelor), precum şi în alte domenii (navigație cosmică, procese cu conexiune inversă etc.).

Să presupunem un proces secvențial a cărui desfăşurare în timp depinde de o variabilă care poate lua o mulțime de valori în fiecare etapă. Ne putem decide pentru o valoare determinată a variabilei în fiecare etapă şi din această cauză ea se numeşte variabilă de decizie sau de control. O succesiune oarecare de decizii constituie o politică şi cea care ne interesează este politica optimă, de pildă aceea care conduce la un cost total minim al procesului.

Deosebim două tipuri principale de procese secvențiale:

a) deterministe, când la fiecare fază procesul este controlat în întregime de decizia pe care o luăm;
b) stohastice, atunci când evoluția procesului se desfăşoară sub dubla influență a deciziilor şi a hazardului.

Se numeşte politică optimă acea succesiune de decizii care optimizează procesul în ansamblu lui, fiind vorba de un proces determinist. În cazul unui proces stohastic, se foloseşte în mod corespunzător noțiunea de strategie optimă.

Procesele dinamice pot fi *continue* sau *discrete*. Un exemplu de proces discret este următorul: o întreprindere trebuie să-şi întocmească planul de aprovizionare anual pentru un anumit material; se consideră 12 perioade (luni) şi pentru fiecare perioadă se stabileşte cantitatea de aprovizionat, astfel ca pe întregul an să rezulte un cost total minim. Procesele dinamice discrete pot avea *orizontul limitat* (în exemplu de mai sus 12 perioade) sau *nelimitat*.

3.1. Introducere

Programarea Dinamică (PD) este o metodă de rezolvare a unor probleme de *optimizare* în care se opereaza pe FAZE (SECVENTE) numite în continuare PERIOADE.

Prin aplicarea acestei metode, soluția optimă se obtine în urma rezolvarii unui ***şir*** de probleme de optimizare LEGATE INTRE ELE, fiecare de de dimensiune si complexitate mult mai mică decat problema originală. Deşi teoretic PD este aplicabilă oricarei probleme de optimizare multidimensională, totuşi metoda a dat rezultate foarte bune - în sensul uşurării rezolvării - numai pe anumite clase de probleme cum sunt cele care modelează evoluția în timp a unui proces economic sau probleme de alocare (repartiție).

3.2. Probleme de alocare unidimensională

Presupunem ca avem la dispoziție o anumită *resursă economică.* Termenul poate reprezenta, dupa caz, un anume tip de materii prime, forță de muncă, energie, bani sau un anumit serviciu etc. Se produce un CONFLICT de INTERESE din faptul ca această resursă poate fi utilizată în MAI MULTE MODURI.

Un mod particular de utilizare a resursei în cauză se va numi în continuare ACTIVITATE.

Ca urmare a utilizării resursei într-o activitate sau alta rezultă un anumit VENIT. Şi acest termen are o sferă foarte largă putând desemna un produs finit, o sumă de bani sau pur şi simplu satisfacția. Mărimea venitului depinde de cantitatea de resurse alocată activității respective, dar şi de specificul acesteia.

În continuare vom adopta urmatoarele *ipoteze simplificatoare:*

1) Venitul rezultat din diferitele activități poate fi măsurat cu o *unitate de masura comuna.*
2) Venitul rezultat dintr-o activitate *nu depinde* de alocările făcute în alte activități.
3) Venitul total este *egal cu suma veniturilor individuale*.

Problema fundamentală constă în a repartiza resursa între activitățile concurente de aşa manieră încat venitul total sa fie MAXIM.

3.3. Un model matematic

Ordonăm într-un mod oarecare activitățile şi le numerotăm: 1, 2,…, N. În continuare, fiecare activitate va fi identificată prin numărul său de ordine.

Asociem fiecărei activități ***i*** o FUNCȚIE DE UTILITATE g_i reprezentând DEPENDENȚA VENITULUI său de cantitatea de RESURSĂ ALOCATĂ. Conform ipotezei 2), g_i depinde numai de cantitățile x_i de resursă alocată activității ***i***, asa că $g_i(x_i)$_va reprezenta venitul obținut din activitatea *i* ca urmare a alocării cantității x_i. Indicele ***i*** din simbolul g_i al funcției de utilitate este menit să arate că venitul rezultat din activitatea ***i*** depinde nu numai de volumul de resurse alocat, dar şi de specificul acestei activități (altfel spus, funcțiile de utilitate pot diferi de la o activitate la alta).

În diferitele situații practice functia g_i poate fi dată:

• printr-o expresie ANALITICĂ, de exemplu:

$g_i(x_i)=a_ix_i+b_i$, cu a_i, b_i constante (CAZ LINIAR);

sau

$g_i(x_i)=a_ix_i^2+b_ix_i$ (CAZ NELINIAR-PATRATIC).

• printr-o *lista* de VALORI NUMERICE corespunz[toare unor NIVELE ale resursei alocate, ca de exemplu:

x_i	0	1	2	3	4	5
$g_i(x_i)$	0	0,18	0,38	0,46	0,51	0,55

Venitul total rezultat în urma alocării resursei în cele N activități va fi dat de expresia:

$$V(x_1,x2,\ldots,x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) +\ldots+ g_N(x_N) \qquad (1)$$

ca urmare a ipotezelor 1) si 3).

Maximizarea functiei *V* se impune, datorită faptului că resursa se află disponibilă într-o cantitate limitată S. Astfel, alocările făcute diferitelor activități trebuie sa satisfacă cerințele:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = S \quad (2)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,N \qquad (3)$$

Obiectivul nostru este acela de a maximiza funcția $V(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ din (1) pe multimea tuturor ALOCĂRILOR $(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ care satisfac restricția (2) şi condițiile de nenegativitate (3).

3.4. Posibilități de rezolvare. Dificultăți

Să notăm cu (P) problema de optimizare rezultată:

$$(P)\quad \begin{cases} (\max)V(x_1,\ldots,x_N) = g_1(x_1) + \ldots + g_N(x_N) \\ x_1 + \ldots + x_N = S \\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

(P) = problemă de PROGRAMARE MATEMATICĂ cu o singură RESTRICȚIE LINIARĂ şi o funcție obiectiv SEPARABILĂ şi NELINIARĂ ÎN GENERAL.

Dacă funcțiile $g_1,\ldots,g_N$ sunt derivabile, iar variabilele $x_1,\ldots,x_N$ pot lua orice valoare reală nenegativă, (P) se poate rezolva utilizind aparatul matematic al analizei clasice - Teoria EXTREMELOR CU LEGĂTURI.

Nu insistăm asupra acestei metode, deoarece ea va fi studiata ulterior. Semnalăm totuşi faptul că în multe situații concrete metoda MULTIPLICATORILOR LAGRANGE nu se dovedeşte a fi eficientă din cauza formei complicate pe care o pot avea funcțiile de utilitate g_i.

Metoda amintită este inaplicabila în cazul în care funcțiile g_i nu sunt derivabile sau în cazul în care variabilele x_i nu pot lua decât valori nenegative INTREGI. În asemenea situații – care nu sunt puține – se impun metodele de optimizare noi.

3.5. Rezolvarea problemelor de alocare unidimensionale (P) prin (PD)

Ideea metodei constă în a îngloba problema (P) într-o FAMILIE de probleme de alocare diferențiate prin numărul de activități şi cantitatea de resursă disponibilă.

În loc de a privi STATIC procesul alocarii disponibilului S între cele N activități, aceasta însemnând considerarea diferitelor variante de repartiție $(x_1,\ldots,x_N)$ şi clasificarea lor după venitul posibil de realizat, vom adopta un punct de vedere DINAMIC în care alocările se fac UNA CATE UNA. Mai precis, vom determina venitul maxim care se obține efectuând o alocare numai în PRIMA activitate, după care vom afla care este venitul maxim rezultat din efectuarea unei alocări în PRIMELE DOUĂ activități, apoi în PRIMELE TREI, s.a.m.d.

În toate aceste procese PARȚIALE cantitatea de resursă alocată va fi VARIABILĂ –dar nedepăşind plafonul maxim S - aşa că rezultatele nu vor fi simple mărimi numerice, ci niste FUNCTII reprezentând DEPENDENȚA VENITULUI MAXIM față de volumul de resursă alocată.

În termeni mai precişi, pentru fiecare întreg $1 \leq n \leq N$ şi fiecare $0 \leq s \leq S$ vom considera *problema de alocare unidimensională* similară cu (P):

$$P_n(s)\quad \begin{cases} (\max)V(x_1,\ldots,x_n) = g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n) \\ x_1 + \ldots + x_n = s \\ x_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n \end{cases}$$

Cu noua notatie (P) devine $P_N(S)$.

Vom nota cu $f_n(s)$ maximul obiectivului problemei $P_n(s)$, adică venitul maxim rezultat din alocarea cantității s în regiunile (activitățile) 1, 2,…, n:

$$f_n(s) = \text{MAX}\,[g_1(x_1) + \ldots + g_n(x_n)], \qquad x_1 + \ldots + x_n = s \text{ şi } x_i \geq 0 \qquad (4)$$

Rezultă că maximul obiectivului problemei originale (P) este $f_N(S)$. Notăm că pentru ***n*** fixat şi ***s*** variabil f_n este o FUNCȚIE de o singură variabilă ***s*** al cărei domeniu de valori admisibile este intervalul [0, S]. Este evident ca pentru **n=1**, $f_1=g_1$, adică:

$$f_1(s) = g_1(s) \text{ pentru } (\forall)\ 0 \leq s \leq S$$

Pentru **n>1** valorile funcției f_n se deduc pe baza următoarei relații de RECURENȚĂ:

$$\text{Pentru } 0 \leq s \leq S \quad f_n(s) = \text{MAX}[f_{n-1}(s-x_n)+g_n(x_n)],\ 0 \leq x_n \leq s \qquad (5)$$

ECUAȚIA FUNDAMENTALĂ A PD

Demonstratia relatiei de recurenta (5) relevă următorul principiu general cunoscut sub numele de PRINCIPIUL DE OPTIMALITATE al lui BELLMAN.

O strategie OPTIMĂ are proprietatea că oricare ar fi STAREA INIȚIALĂ şi DECIZIA INIȚIALĂ, deciziile rămase constituie o strategie OPTIMĂ în raport cu STAREA care rezultă din prima decizie.

ALGORITM DE REZOLVARE A PROBLEMEI (P) PRIN PD

Etapa I (INIȚIALIZARE):

Pentru fiecare $0 \leq s \leq S$ definim $f_1(s) = g_1(s)$

Etapa n (1<n<N)**:** Definim funcția f_n în fiecare $0 \leq s \leq S$ după formula (5) şi notăm cu $x_n^*(s)$ acea valoare a variabilei x_n în care se realizează EFECTIV maximul din (5)..

:

:

Etapa N: Calculăm $f_N(S) = \max\limits_{0 \leq x_N \leq S} [f_{N-1}(S-x_n)+g_N(x_N)]$

Etapa finală (de determinare a alocării OPTIMALE $(x_1^*,\ldots,x_N^*)$). Componentele acesteia se determina DIN APROAPE ÎN APROAPE "de la sfârşit la început" astfel:

$x_N^*=x_N^*(S)$

Pentru $(\forall)\ 1 \leq n \leq N$

$x_n^*=x_n^*(s - s_n)$, unde $s_n=x_{n+1}^*+\ldots+x_N^*$

EXEMPLU NUMERIC

Conducerea unei firme a decis să facă un efort investițional pentru impulsionarea vânzărilor sale în 4 piețe diferite. Suma totală de investit este S=10 milioane \$. Experții firmei au evaluat profiturile posibil de realizat în funcție de investiția făcută în una sau alta dintre piețe. Problema constă în a vedea cum trebuie repartizate cele 10 milioane pentru ca profitul firmei să fie maxim.

SUMA INVESTITA	PROFITURI			
	PIATA1	**PIATA 2**	**PIATA 3**	**PIATA 4**
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,33
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,50	0,48
6	1,02	0,80	0,73	0,56
7	1,13	0,85	0,82	0,58
8	1,23	0,88	0,90	0,60
9	1,32	0,90	0,96	0,60
10	1,38	0,90	1,00	0,60

REZOLVARE:

1. Reprezentați în graficul suma investită – profitul realizat pentru cele 4 piețe.
2. Dependența între profit şi suma investită nu este dată printr-o expresie analitică ci prin cateva valori corespunzătoare unor nivele ale investitiei exprimate prin valori întregi. Din acest motiv, suma totală va fi imparțită de aşa manieră încat investiția în fiecare zonă să fie exprimată tot printr-un număr întreg, evident nenegativ.

Reprezentând grafic dependența investiție - profit probabil constatăm ca ea nu este liniară şi că pe masură ce suma investită creşte, curba corespondentă are tendința de aplatizare ca urmare a efectului de saturare.

Modelul matematic nu diferă de cel prezentat în general decât prin cerința ca variabilele sa ia numai valori întregi, datî fiind maniera particulară în care s-au dat funcțiile de utilitate. El este:

Să se determine x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4 care maximizează profitul

$\prod(x_1,x_2,x_3,x_4)=g_1(x_1)+g_2(x_2)+g_3(x_3)+g_4(x_4)$

cu restricția $x_1+x_2+x_3+x_4=10$

si conditia $x_i \geq 0$, întregi, i=1, 2, 3, 4

unde x_i = suma prevazută a se investi în piața *i*, iar $g_i(x_i)$ este profitul probabil rezultat din aceasta investiție.

Pentru fiecare număr întreg $0 \leq s \leq 10$ şi $1 \leq n \leq 4$ definim $f_n(s)$ = profitul maxim rezultat din investirea a *s* \$ în primele 1, 2,…, n piețe.

Conform teoriei generale:

$f_1(s)=g_1(s)$, s = 0, 1,…, 10;

$$f_n(s) = \max_{0 \leq x_n \leq s} [f_{n-1}(s-x_n) + g_n(x_n)], \quad s= 0, 1,\ldots, 10 \text{ şi } 1 < n < 4;$$

$$f_4(10) = \max_{0 \leq x_4 \leq 10} [f_3(10-x_4) + g_4(x_4)]$$

s	f1=g1(s)	g_2	f_2	(x_1, x_2)	g_3	f_3	(x_1, x_2, x_3)	g_4	f_4	(x_1, x_2, x_3, x_4)
0	0	0	0		0	0		0		
1	0,28	0,25	0,28		0,15	0,28		0,20		
2	0,45	0,41	0,53		0,25	0,53		0,33		
3	0,65	0,55	0,70		0,40	0,70		0,42		
4	0,78	0,65	0,90		0,50	0,90		0,48		
5	0,90	0,75	1,06		0,62	1,06		0,53		
6	1,02	0,80	1,20		0,73	1,21		0,56		
7	1,13	0,85	1,33		0,82	1,35		0,58		
8	1,23	0,88	1,45		0,90	1,48		0,60		
9	1,32	0,90	1,57		0,96	1,60		0,60		
10	1,38	0,90	1,68		1,00	1,73		0,60	1,81	

Deducerea alocării optimale:

$f_4(10) = f_3(8) + g_4(2) \Rightarrow x^*_4 = 2$
$f_3(8) = f_2(7) + g_3(1) \Rightarrow x^*_3 = 1$
$f_2(7) = f_1(4) + g_2(3) \Rightarrow x^*_2 = 3$
$f_4(10) = g_4(10) \Rightarrow x^*_1 = 4$

3.6. O problemă de încărcare a unui vapor

Să presupunem că avem de încărcat un vapor cu o încărcătură formată din mărfuri de diferite tipuri. Mărfurile sosesc la încărcare în containere de diferite mărimi, fiecare marfă fiind aşezată totuşi în containere de aceeaşi mărime. Un container în care se află marfa i, $i = 1,\ldots, N$ are o anumită greutate Wi şi o anumită valoare Vi. Există un plafon W al greutăţii încărcăturii. Câte containere din fiecare tip de marfă trebuie încărcate – în limita greutăţii maxime W, astfel încât valoarea încărcăturii sa fie maximă?

Modelul matematic

$$
(P)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i x_i \le W \\ x_i \ge 0,\ \text{întregi} \\ \max V(x_1,\ldots,x_N) = \sum_{i=1}^{N} v_i x_i \end{cases} \qquad (6)
$$

în care x_i = numărul de containere în care se află marfa i.

Se presupune că şi W este întreg.

Pentru $(\forall)\ 1 \le n \le N$ şi $0 \le w \le W$ întregi, notăm cu $f_n(w)$ valoarea maximă a unei încărcături cu greutatea cel mult egală cu w formată din mărfurile $1, 2,\ldots, n$.

Evident $f_n(w) = \max V(x_1,\ldots, x_n)$, unde $V(x_1,\ldots,x_n)$ este funcţia obiectiv din problema:

$$
P_n(w) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le W \\ x_i \ge 0,\ \text{întregi} \\ \max V(x_1,\ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \end{cases} \qquad (7)
$$

Noi suntem interesaţi în a afla $f_N(W) = \max V(x_1,\ldots, x_N)$ şi combinaţia $(x^*_1,\ldots, x^*_N)$ care realizează această valoare maximă.

Pentru **n = 1** avem: $f_1(w) = v_1\cdot[w/w_1]$, $[\cdot]$ = partea întreagă

n > 1 ecuaţia de dinamică este:

$$
f_n(w) = \max_{0 \le x_n \le [w/w_n]} [f_{n-1}(w - w_n x_n) + v_n x_n], \qquad 0 \le w \le W \qquad (8)
$$

cu observaţia că pentru:

n = N se calculează numai $f_N(W) = \max_{0 \le x_N \le [W/W_N]} [f_{N-1}(W - w_N x_N) + v_N x_N]$ (9)

Exemplu numeric:

Considerăm dată problema de încărcare a unui vapor descrisă de informațiile:

$w_1=2$	$v_1=5$;	al cărei model este:	(P) $\begin{cases} \max V(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 12x_2 + 16x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 11 \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0, \text{ întregi} \end{cases}$
$w_2=4$	$v_2=12$;		
$w_3=5$	$v_3=16$;		
$W=11$			

Rezolvare:

n = 1: $f_1(w) = v_1 \cdot [w/w_1]$

n > 1 : $f_n(w) = \max\limits_{0 \le x_n \le [w/w_n]} [f_{n-1}(w-w_nx_n)+v_nx_n]$

Exemplu de calcul:

$f_2(9) = \max\limits_{0\le x_2 \le [9/4]} [f_1(9-4x_2)+12x_2] = \max\limits_{x_2 = 0,1,2} [f_1(9-4x_2)+12x_2] = \max\{f_1(9)+0;\ f_1(5)+12;\ f_1(1)+24\}=24,$

pentru $x_2 = 2 \Rightarrow f_2(9) = f_1(1) + 12\cdot 2 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ ce realizează maximul $f_2(9)$ este (0,2).

$f_3(11) = \max\limits_{0 \le x_3 \le [11/5]} \{f_2(11-5x_3)+16x_3\} = \max\limits_{x_3 = 0,1,2} \{f_2(11-5x_3)+16x_3\} = \max\{f_2(11)+0; f_2(6)+16; f_2(1)+32\}$

$= \max\{29+0;17+16;0+32\} = 33$, pentru $x_3 = 1$;
$f_3(11) = f_2(6) + 16\cdot 1 \Rightarrow (x_1, x_2) = (1,1)$

Soluția optimă de încărcare:

$\begin{cases} x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 1 \\ \max V = 33 \end{cases}$

Interpretare economică: