Model Dinamic de Analiză a Activității Fără Împrumuturi şi Granturi

Ipoteza 1: Firma produce un bun omogen folosind doi factori de producție: capitalul şi munca.

Ipoteza 2: Modelul dinamic de analiză este un model cu factori de producție complementari, funcția de producție este liniară, proporția între factorii de producție rămânând constantă. Activitatea de producție este un proces prin care este fabricat produsul finit din muncă şi capital. Sunt presupuse două activități de producție:

- activitatea 1: capital intensivă (raportul K/L este mare);
- activitatea 2: forța de muncă intensivă (raportul K/L este mic).

Funcția de producție este dată de:

(1) $$Q(t) = q_1K_1(t) + q_2K_2(t)$$

unde $Q(t)$ este producția fizică (omogenă).

Veniturile sunt constante la scala de fabricație (funcția de producție este liniară).

Productivitatea medie a capitalului din activitatea $j = 1,2$ este:

$$q_j = \frac{Q_j(t)}{K_j(t)}, j = 1,2$$

Ecuația de formare a forței de muncă este:

(2) $$L(t) = l_1K_1(t) + l_2K_2(t)$$

iar compoziția organică a capitalului:

$$l_j = \frac{L_j(t)}{K_j(t)}, j = 1,2$$

Ecuația de formare a bunurilor capital:

(3) $$K(t) = K_1(t) + K_2(t)$$

Ipoteza 3: Pentru activitatea 1 – activitate capital intensivă, vom avea condițiile:

$$K_1 > K_2$$

$L_1 < L_2$

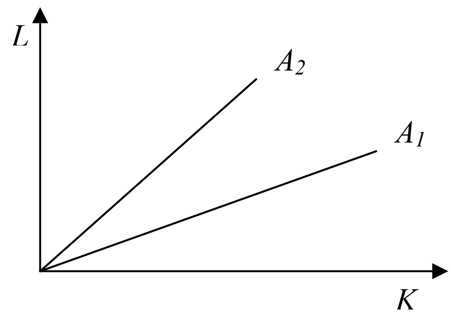
de unde rezultă:

$$\frac{Q(t)}{K_1(t)} < \frac{Q(t)}{K_2(t)} \Rightarrow q_1 < q_2$$

$$\frac{L_1(t)}{K_1(t)} < \frac{L_2(t)}{K_2(t)} \Rightarrow l_1 < l_2$$

$$\frac{Q(t)}{L_1(t)} > \frac{Q(t)}{L_2(t)} \Rightarrow$$ productivitatea muncii este mai mare în activitatea 1.

Ipoteza 3': Piața producției finite este cu competiție imperfectă:



$$V(Q) = p(Q) \cdot Q(t)$$

Ipoteza 4: Funcția de câştig:

(4) $S(K_1(t), K_2(t)) = (q_1p(Q)\text{-}wl_1) + (q_2p(Q)\text{-}wl_2)K_2(t)$

Ipoteza 5: Singura structură de finanțare este autofinanțarea:

(5) $X(t) = K(t)$

Ipoteza 6: Ecuația de evoluție a acțiunilor:

(6) $\dot{X} = S(K_1(t), K_2(t)) - aK(t) - D(t);\ X(0) = K_0 > 0$

Ipoteza 7: Ecuația de evoluție a bunurilor capital (investiția netă):

(7) $\dot{K} = I(t) - aK(t);\ K(0) = K_0 > 0$

Ipoteza 8: Funcționala obiectiv:

$$\max_D \int_0^T D(t)e^{-it}dt \ + X(T)e^{-iT}$$

Restricții momentane:

(8) $D(t) \geq 0$

(9) $K_1(t) \geq 0$

(10) $K_2(t) \geq 0$

Din $\dot{X}(t) = \dot{K}(t) \Rightarrow I(t) - aK(t) = S(K_1, K_2) - aK(t) - D(t) \Rightarrow$

(11) $D(t) = S(K_1, K_2) - I(t) \geq 0$

Înlocuim $X(t)$ cu $K(t)$ şi $K_2(t)$ cu $K(t) - K_1(t)$ şi vom obține **modelul**:

(12) $$\max_{I,K_1} \int_0^T (S(K(t), K_1(t)) - I(t))e^{-it} dt + K(T)e^{-iT}$$

(13) $\dot{K} = I(t) - aK(t); K(0) = K_0 > 0$

(14) $K(t) - K_1(t) \geq 0$

(15) $K_1(t) \geq 0$

(16) $S(K_1(t), K_2(t)) - I(t) \geq 0$

Rezolvarea modelului

Lagrangeanul problemei:

(17) $L(K(t),I(t),K_1(t),\lambda(t),\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t)) = (S(K(t), K_1(t)) - I(t))(1+\mu_3(t)) + \lambda(t)(I(t) - aK(t)) + \mu_1(t)(K(t) - K_1(t)) + \mu_2(t)K_1(t)$

Condițiile de optim:

(18) $$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial I(t)} = 0 \Rightarrow -1 - \mu_3(t) + \lambda(t) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = \mu_3(t) + 1$$

(19) $$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial K_1(t)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S(\cdot)}{\partial K_1(t)}(1 + \mu_3(t)) - \mu_1(t) + \mu_2(t) = 0$$

(20) $$\begin{aligned} &\dot{\lambda}(t) = i\lambda(t) - \frac{\partial L(\cdot)}{\partial K(t)} = \\ &= i\lambda(t) - \frac{\partial S(\cdot)}{\partial K(t)} + a\lambda(t) - \mu_1(t) = (i + a)\lambda(t) - S'_K - \mu_1(t) \end{aligned}$$

(21) $\mu_1(t)(K(t) - K_1(t)) = 0$

(22) $\mu_2(t)K_1(t) = 0$

(23) $\mu_3(t)\ (S(K(t), K_1(t)) - I(t)) = 0$

(24) $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ \mu_3(t) \geq 0$

(25) $\lambda(T) = 1$

Datorită concavității Lagrangeanului şi a restricțiilor, condițiile necesare sunt şi suficiente.

Calcule preliminare:

(26) $Q(t) = (q_1 - q_2)K_1(t) + q_2K(t);\ L(t) = (l_1 - l_2)K_1 + l_2K(t)$

(27) $S(K(t), K_1(t)) = V(Q) - (wl_1 - wl_2)K_1(t) - wl_2K(t);\ V(Q) = p(Q)Q$

(28) $\dfrac{\partial Q(t)}{\partial K_1(t)} = q_1 - q_2\,;\ \dfrac{\partial Q(t)}{\partial K(t)} = q_2$

(29) $\dfrac{\partial S(\cdot)}{\partial K_1(t)} = \dfrac{dV(t)}{dQ(t)}(q_1 - q_2) + w(l_2 - l_1)$

(30) $\dfrac{\partial S(\cdot)}{\partial K(t)} = q_2\dfrac{dV(t)}{dQ(t)} - wl_2$

Observație:

$$\frac{\partial S}{\partial K_1} = \frac{\partial V}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K_1}\,;\ \frac{\partial S}{\partial K} = \frac{\partial V}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K} - wl_2$$

Costurile unitare:

(31) $c_j = \dfrac{1}{q_j}(wl_j + i + a)$, $c_1 \neq c_2 \neq c_{21}$

unde:

wl_j – salariile pe o unitate de bun capital

i – revenirea pe o unitate de capital investit (de bun capital)

a – amortizarea pe o unitate de bun capital

(32) $c_{21} = \dfrac{w(l_2 - l_1)}{q_2 - q_1}$

c_{21} – costul unitar al trecerii de la activitatea 2 la activitatea 1

Traiectorii admisibile

Tr. Nr.	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	$\mu_3(t)$	Activitatea	$\dot{K}$	Q	Politica firmei
1	0	+	+	2	+	$<Q^*_{21}$	creştere cu activitatea 2
2	0	+	0	2	0	Q^*_2	staționară, dividende, activitatea 2
3	0	0	+	21	+	Q^*_{21}	trecere de la activitatea 2 la activitatea 1
4	+	0	+	1	+	$>Q^*_{21}$	creştere cu activitatea 1
5	+	0	0	1	0	Q^*_1	staționară, dividende, activitatea 1

Traiectorii inadmisibile

a) $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) > 0 \Rightarrow K(t) = K_1(t)$, $K(t) = 0 \Rightarrow K(t) = 0$ exclus prin ipoteză.

b) $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 0$, $\mu_1(t) > 0$, $\mu_3(t) = 0$

din (19) $\Rightarrow S'_K = 0 \Rightarrow 0 = V'_Q(q_1 - q_2) + w(l_2 - l_1) \Rightarrow$
$V'_Q = \dfrac{w(l_2 - l_1)}{q_2 - q_1} = c_{21}$

$\lambda(t) = \mu_3(t) + 1 \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = \dot{\mu}_3(t) = 0;$

dacă $\mu_1(t) = \mu_3(t) = 0 \Rightarrow$ din (20) $\Rightarrow 0 = (i + a)(1+ \mu_3(t)) - S'_K + \mu_1(t) \Rightarrow S'_K = i + a \Rightarrow q_2V'_Q = S'_K + wl_2 \Rightarrow V'_Q = (i + a + wl_2)\dfrac{1}{q_2} = c_2$

Contradicție: venitul marginal din vânzări este simultan egal cu costul marginal al activității 21 şi al activității 2.

Ipoteză:

$$\begin{cases} c_1 \neq c_{21} \neq c_2 \\ c_1 < c_2 < c_{21} \\ c_{21} < c_2 < c_1 \end{cases} \text{ sau } \left.\frac{dV}{dQ}\right|_{Q(t)=Q(0)} > \max_j\{c_j\},\ j = 1, 2, 21$$

<u>Traiectoria 1</u>: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$

(18) $\Rightarrow \lambda(t) = 1 + \mu_3(t) \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = \dot{\mu}_3(t)$,

(20) $\Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = (i + a)(1+ \mu_3(t)) - S'_K$

(21) $\Rightarrow K(t) > K_1(t)$

(22) $\Rightarrow K_1(t) = 0;$ deci $K(t) = K_1(t) > 0$

(23) $\Rightarrow S(K(t), K_1(t)) - I(t) = 0 \Rightarrow D(t) = 0;$ deci nu se plătesc dividende, tot ceea ce se câştigă se reinvesteşte.

$S(K_1(t),K_2(t)) = I(t) \Rightarrow \dot{K}(t) > 0 \Rightarrow \dot{X}(t) > 0$ (ecuația de balanță fiind $K(t) = X(t)$)

$$(19) \Rightarrow S'_{K_1}(1+\mu_3(t)) + \mu_2(t) = 0 \Rightarrow S'_{K_1}(\underbrace{1+\mu_3(t)}_{>0}) = -\underbrace{\mu_2(t)}_{>0} \Rightarrow S'_{K_1} < 0$$

$$(29) \Rightarrow S'_{K_1} = \frac{dV(\cdot)}{dQ}(q_1 - q_2) + w(l_2 - l_1) < 0 \Rightarrow \frac{dV(\cdot)}{dQ} > \frac{w(l_2 - l_1)}{q_2 - q_1} = c_{21}$$

$$\Rightarrow Q(t) < Q^*_{21}$$

Pe traiectoria 1, $\mu_3(t) > 0$.

- la începutul traiectoriei: $\bar{\mu}_3(t) = 0, \dot{\mu}_3(t) > 0$
- la sfârşitul traiectoriei: $\vec{\mu}_3(t) = 0, \dot{\mu}_3(t) < 0$

La sfârşitul traiectoriei 1: $\bar{\mu}_3(t) = 0, \dot{\mu}_3(t) > 0$

<u>Traiectoria 2</u>: $\mu_1(t) = 0,\ \mu_2(t) > 0,\ \mu_3(t) = 0$

(18) $\Rightarrow \lambda(t) = 1$

(19) $\Rightarrow S'_{K_1} + \mu_2(t) = 0 \Rightarrow S'_{K_1} = -\mu_2(t) < 0$

$$(19)+(29) \Rightarrow S'_{K_1} = \frac{dV}{dQ}(q_1 - q_2) - w(l_2 - l_1) > 0 \Rightarrow \frac{dV}{dQ} > c_{21} \Rightarrow Q^*(t) < Q^*_{21}$$

(20) $\Rightarrow 0 = (i + a) - S'_K \Rightarrow S'_K = (i + a)$

$$(30) \Rightarrow \frac{dV}{dQ} = \frac{1}{q_2}(i + a + wl_2) = c_2 \Rightarrow Q(t) = Q^*_2$$, traiectoria 2 este staționară.

(23) $\Rightarrow S(\cdot) > I(t) \Rightarrow D(t) > 0$, se plătesc dividende.

(22) $\Rightarrow K(t) = 0 \Rightarrow K(t) = K_2(t)$

(21) $\Rightarrow K(t) > K_1(t) > 0$; rezultă $Q^*_2 < Q^*_{21} \Rightarrow c_{21} < c_2 < c_1$.

<u>Traiectoria 3</u>: $\mu_1(t) = 0,\ \mu_2(t) = 0,\ \mu_3(t) > 0$

(18) $\Rightarrow \lambda(t) = \mu_3(t) + 1$

$$(19) \Rightarrow S'_{K_1}(1 + \mu_3(t)) = 0 \Rightarrow S'_{K_1} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dQ} = c_{21} \Rightarrow Q^*(t) = Q^*_{21}$$

(20) $\Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = (i+a)(1+\mu_3(t)) - S'_K$

(21) $\Rightarrow K(t) = K_1(t) \Rightarrow K_2(t) = 0$

(22) $\Rightarrow K_1(t) > 0$; deci rezulta ca $\dot{K}_1(t) > 0$ si $\dot{K}_2(t) < 0$ (este activitate de relocare)

(23) $\Rightarrow S(\cdot) = I(t) \Rightarrow D(t) = 0 \Rightarrow \dot{K}(t) > 0 \Rightarrow \dot{K}_1(t) > 0$

Pe traiectoria 3: $\mu_3(t) > 0$

- la începutul traiectoriei: $\bar{\mu}_3(t) = 0$, $\dot{\mu}_3(t) > 0$

$\dot{\mu}_3(t) > 0 \Rightarrow (i + a)(1 + \mu_3(t)) - S'_K > 0 \Rightarrow S'_K < (i + a)(1 + \mu_3(t)) \Rightarrow$ (deoarece $\mu_3(t) = 0$) $\Rightarrow S'_K < (i + a) \Rightarrow \dfrac{dV}{dQ} < \dfrac{1}{q_2}(i + a + wl_2) = c_2 \Rightarrow Q(t) > Q^*_2 \Rightarrow Q^*_{21} > Q^*_2 \Rightarrow c_1 < c_2 < c_{21}$

Traiectoria 4: $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) = 0$, $\mu_3(t) > 0$

(18) $\Rightarrow \lambda(t) = \mu_3(t) + 1$

(19)$\Rightarrow S'_{K_1}(1+\mu_3(t)) - \mu_1(t) = 0 \Rightarrow S'_{K_1}(1+\mu_3(t)) = \mu_1(t) > 0$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dQ} < \frac{w(l_2 - l_1)}{q_2 - q_1} = c_{21} \Rightarrow Q^*(t) > Q^*_{21}$$

(20) $\Rightarrow \dot{\mu}_3(t) = (i+a)(1+\mu_3(t)) - S'_K - \mu_1(t)$

(21) $\Rightarrow K(t) = K_1(t) \Rightarrow K_2(t) = 0$

$Q(t) = (q_1 - q_2)K_1(t) + q_2K(t) = (q_1 - q_2)K_1(t) + q_2K_1(t) = q_1K_1(t)$

$S(\cdot) = V - (wl_1 - wl_2)K_1(t) - wl_2K(t) = V - (wl_1 - wl_2)K_1(t) - wl_2K_1(t) = V - wl_1K_1(t)$

$$\frac{\partial S}{\partial K} = \frac{dV}{dQ} \cdot \frac{\partial Q}{\partial K} - wl_1 = \frac{dV}{dQ} \cdot \frac{\partial Q}{\partial K_1} - wl_1 = \frac{dV}{dQ} q_1 - wl_1$$

Pe traiectoria 4: $\mu_3(t) > 0$

- la începutul traiectoriei: $\bar{\mu}_3(t) = 0$, $\dot{\mu}_3(t) > 0$

$\dot{\mu}_3(t) > 0 \Rightarrow -S'_K > \mu_1(t) - (i + a)(1 + \mu_3(t)) \Rightarrow S'_K < -\mu_1(t) + (i + a)(1 + \mu_3(t)) \Rightarrow$ (deoarece $\mu_3(t) > 0$) $\Rightarrow S'_K < (i + a)(1 + \mu_3(t)) \Rightarrow S'_K < (i + a) \Rightarrow \dfrac{dV}{dQ} q_1 - wl_1 < i + a \Rightarrow \dfrac{dV}{dQ} < \dfrac{1}{q_1}(i + a + wl_1) = c_1 \Rightarrow Q(t) > Q^*_1$

- la sfârşitul traiectoriei 4: $\vec{\mu}_3(t) = 0$, $\dot{\mu}_3(t) < 0$

$\dot{\mu}_3(t) < 0 \Rightarrow S'_K > i + a \Rightarrow \dfrac{dV}{dQ} > c_1 \Rightarrow Q(t) < Q_1^*$

$Q_{21}^* < Q(t) < Q_1^* \Rightarrow c_1 < c_2 < c_{21}$

Traiectoria 5: $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) = 0$, $\mu_3(t) = 0$

(18) $\Rightarrow \lambda(t) = 1 \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = 0$

(19)$\Rightarrow S'_{K_1} - \mu_1(t) = 0 \Rightarrow S'_{K_1} = \mu_1(t) > 0 \Rightarrow \dfrac{dV}{dQ} < c_{21} \Rightarrow Q(t) > Q_{21}^*$

(20) $\Rightarrow 0 = i + a - S'_K - \mu_1(t) \Rightarrow -S'_K = \mu_1(t) - (i + a) \Rightarrow S'_K = i + a - \mu_1(t) \Rightarrow S'_K = -S'_{K_1} + i + a$

(21) $\Rightarrow K(t) = K_1(t) \Rightarrow K_2(t) = 0$

(22) $\Rightarrow K_1(t) > 0$

(23) $\Rightarrow S(t) - I(t) > 0 \Rightarrow S(t) > I(t) \Rightarrow D(t) > 0$

Observaţie:

$\dfrac{dS(\cdot)}{dK(t)} = \dfrac{\partial S(\cdot)}{\partial K(t)} + \dfrac{\partial S(\cdot)}{\partial K_1(t)} \cdot \dfrac{\partial K_1(t)}{\partial K(t)} = S'_K + S'_{K_1}$, deoarece $\dfrac{\partial K_1(t)}{\partial K(t)} = 1$

$$S'_K + S'_{K_1} = i + a \Rightarrow \frac{dS}{dK} = q_1 \frac{dV}{dQ} - wl_1 = i + a$$

$$\frac{\partial S}{\partial K} = \frac{dV}{dQ} \cdot \frac{\partial Q}{\partial K} - wl_1 = \frac{dV}{dQ} \cdot \frac{\partial Q}{\partial K_1} - wl_1 = \frac{dV}{dQ} q_1 - wl_1$$

$\Rightarrow \dfrac{dV}{dQ} = \dfrac{1}{q_1}(i + a + wl_1) = c_1 \Rightarrow Q(t) = Q_1^*$, traiectorie staţionară.

Rezultă $Q_1^* > Q_{21}^* \Rightarrow c_1 < c_2 < c_{21}$

Traiectorii finale

Trebuie să verifice condițiile de transversalitate:

$\lambda(T) = 1$

$\lambda(T) = \mu_3(T) + 1 \Rightarrow \mu_3(T) = 0 \Rightarrow$ numai traiectoriile 2 şi 5 pot fi traiectorii finale.

Traiectoria 2 este finală dacă $K(T) = K_2(T)$ si $c_{21} < c_2 < c_1$.

Traiectoria 5 este finală dacă $K(T) = K_1(T)$ si $c_1 < c_2 < c_{21}$.

REZUMAT

Tr. Nr.	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$	$\mu_3(t)$	Activitatea	$\dot{K}$	Q	Politica firmei
1	0	+	+	2	+	$<Q^*_{21}$	creştere cu activitatea 2
2	0	+	0	2	0	Q^*_2	staționară, dividende, activitatea 2
3	0	0	+	21	+	Q^*_{21}	relocare de la activitatea 2 la activitatea 1
4	+	0	+	1	+	$>Q^*_{21}$	creştere cu activitatea 1
5	+	0	0	1	0	Q^*_1	staționară, dividende, activitatea 1

<u>Traiectorii de magistrală care se finalizează cu Traiectoria 2</u>

<u>TR1→TR2</u>

TR1: $Q(t) < Q_2^*$; TR2: Q_2^*;→ $K(t)$ poate fi continuă şi poate creşte.

<u>TR3→TR2</u>

TR2: $Q(t) = Q_2^*$; TR2: $Q(t) = Q_{21}^*$; →$K(t)$ este discontinuă, TR3 nu poate fi predecesoare.

<u>TR4→TR2</u>

TR2: $c_{21} < c_2 < c_1$; TR4: $c_1 < c_2 < c_{21}$; contradicție.

<u>TR5→TR2</u>

TR5: $K(t) = K_1^*$; TR2: $K(t)=K_2^*$; →discontinuitatea lui $K(t)$.

<u>Predecesoarele Traiectoriei 1</u>

Traiectoria 2	NU	K discontinuă
Traiectoria 3	NU	K discontinuă
Traiectoria 4	NU	K discontinuă
Traiectoria 5	NU	TR1: $c_{21} < c_2 < c_1$; TR5: $c_1 < c_2 < c_{21}$

Traiectorii de magistrală care se finalizează cu Traiectoria 5

Predecesoarele Traiectoriei 5

Traiectoria 1	NU	*K* discontinuă
Traiectoria 2	NU	inadvertență de costuri
Traiectoria 3	NU	*K* discontinuă
Traiectoria 4	DA	

Predecesoarele Traiectoriei 4-5

Traiectoria 1	NU	*K* discontinuă
Traiectoria 2	NU	inadvertență de costuri
Traiectoria 3	DA	
Traiectoria 4	NU	*K* discontinuă

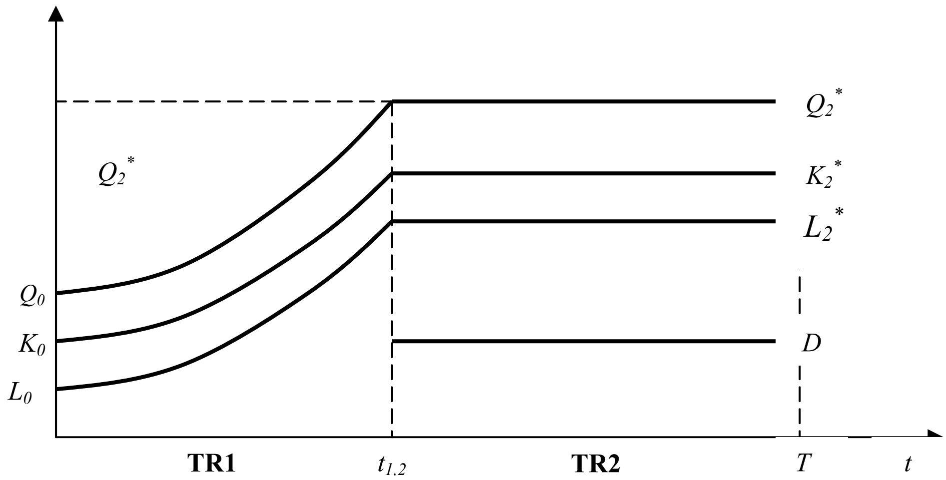
Predecesoarele Traiectoriei 3-4-5

Traiectoria 1	DA	
Traiectoria 2	NU	inadvertență de costuri
Traiectoria 3	NU	*K* discontinuă
Traiectoria 4	NU	*K* discontinuă

Predecesoarele Traiectoriei 1-3-4-5

Traiectoria 1	NU	*K* discontinuă inadvertență de costuri
Traiectoria 2	NU	*K* discontinuă
Traiectoria 3	NU	*K* discontinuă
Traiectoria 4	NU	*K* discontinuă

Dacă $c_{21} < c_2 < c_1 \Rightarrow$ magistrala TR1→TR2



Dacă $c_1 < c_2 < c_{21} \Rightarrow$ magistrala TR1→TR3→TR4→TR5