CAPITOLUL 3

MODELE DINAMICE DE FIRMĂ

Una din metodele de cercetare şi analiză a activităţii firmei constă în abordarea acesteia ca un sistem dinamic complex, prin identificarea elementelor tripletului intrare (variabilele de decizie sau control) – stare (variabilele de stare) – ieşire (variabilele rezultative), a criteriului de optim după care se ghidează firma şi ipotezelor privind evoluţia indicatorilor firmei.

Odată identificate mărimile care definesc starea firmei putem determina evoluţia (pe orizont finit sau infinit), caracteristicile evoluţiei şi în final putem determina evoluţia optimală a firmei şi putem descrie condiţiile în care se poate materializa această evoluţie în funcţie de situaţia concretă sau anticipată asupra mediului extern în care evoluează firma.

Matematic vorbind, acest mod de abordare se reduce în esenţă la modelarea dinamicii firmei printr-o problemă de control optimal (vezi anexa I), după identificarea variabilelor şi funcţionalelor care formează modelul rămânând să ne fixăm asupra orizontului de timp pe care se face analiza (finit sau infinit), să optăm pentru o evoluţie continuă sau discretă a variabilelor sistemului şi în final să optăm pentru una din modalităţile cunoscute de găsire a soluţiei optime a problemei.

Forţa acestei metode este dată de posibilitatea utilizării întregului aparat matematic existent, care asigură rigurozitatea analizelor efectuate şi siguranţa faptului că, odată identificat un model suficient de apropiat de situaţia reală vom avea la îndemână o soluţie matematică la care să ne raportăm în momentul luării deciziilor.

Limitele acestei metode sunt date de:

- dificultatea identificării mărimilor relevante în descrierea stării şi evoluţiei firmei, mai ales în situaţia în care firma trebuie să apeleze la măsuri extreme pentru a supravieţui;

- dificultatea identificării regulilor după care evoluează firma într-un mediu instabil şi imprevizibil;

- dificultatea rezolvării (şi mai ales a analizei) sistemului în condiţiile în care se încearcă luarea în considerare a cât mai multor factori necesari unei descrieri cât mai fidele a situaţiei.

Ţinând cont de cele de mai sus putem trage concluzia că, deşi nu ne putem aştepta în nici un caz la o descriere infailibilă a evoluţiei firmei (mai ales în condiţiile unei economii foarte instabile), modelele dinamice de analiză pot da informaţii utile în ceea ce priveşte strategia viitoare a firmei şi modului în care poate fi materializată această strategie.

În continuare vor fi prezentate trei dintre cele mai cunoscute modele de analiză a dinamicii firmei, reprezentative în ceea ce priveşte indicatorii luaţi în considerare în descrierea evoluţiei firmei, legilor economice (transpuse în restricţii matematice) acceptate în descrierea evoluţiei firmei, criteriilor de performanţă urmărite şi restricţiilor la care mediul extern supune activitatea firmei. În tabelul de mai jos este făcută o prezentare comparativă a celor trei modele care vor fi descrise pe larg în acest capitol:

	Lesourne-Leban	**Ludwig**	**Van Hilten**
Variabile de comandă	I – valoarea investiţiilor L – numărul de angajaţi D – valoarea dividendelor	I – valoarea investiţiilor F – valoarea împrumuturilor	I – valoarea investiţiilor D – valoarea dividendelor
Variabile de stare	K – valoarea totală a capitalului X – valoarea capitalului propriu (valoarea acţiunilor)	*X* - valoarea capitalului propriu (valoarea acţiunilor) *Y* - valoarea capitalului împrumutat (datoria firmei)	K – valoarea totală a capitalului X – valoarea capitalului propriu (valoarea acţiunilor)
Variabile rezultative	Y – valoarea capitalului împrumutat	*K* – valoarea totală a capitalului *D* - valoarea dividendelor	Y – valoarea capitalului împrumutat
Orizont de timp	infinit	finit: *T*	finit: *T*
Criteriu de performanţă	Suma actualizată a dividendelor $\int_0^\infty e^{-it} D(t)dt$	Suma actualizată a dividendelor plus valoarea finală actualizată a capitalului propriu: $\int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT} \cdot X(T)$	Suma actualizată a dividendelor plus valoarea finală actualizată a capitalului propriu: $\int_0^T e^{-it} D(t)dt +$ $e^{-iT} \cdot X(T)$
Parametrii modelului	*i* - revenirea acţionarilor *f* – cota impozitului pe profit *w* – salariul mediu *r* – rata dobânzii pe piaţa creditelor *a* – rata amortizării *k* – cota maximă a capitalului împrumutat faţă de capitalul propriu	*i* - revenirea acţionarilor *f* – cota impozitului pe profit *r* – rata dobânzii pe piaţa creditelor *a* – rata amortizării *b* – amortismentul = *a* *m* – cota din profit alocată investiţiilor *k* – cota maximă a capitalului împrumutat faţă de capitalul propriu	*i* - revenirea acţionarilor *f* – cota impozitului pe profit *r* – rata dobânzii pe piaţa creditelor *q* – productivitatea medie a capitalului *p* – preţul produselor firmei *a* – rata amortizării *k* – cota maximă a capitalului împrumutat faţă de capitalul propriu
Restricţii	$X(t) \leq K(t) \leq (1+k)$ $0 \leq D(t) \leq D_{\max}$ $I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}$	$K(t) = X(t) + Y(t)$ $I(t) \leq m \cdot (R(K(t)) - a \cdot K(t) - r \cdot Y(t)) + a \cdot X(t) + F(t)$ (din $D(t) > 0$) $0 \leq F(t) \leq \gamma \cdot I(t)$	$X(t) \leq K(t) \leq (1+$ $0 \leq D(t) \leq D_{\max}$ $I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}$
Funcţia de producţie	$Q = f(K,L)$	$Q = f(K)$	$Q(t) = q\,K(t)$
Venitul firmei	$R = f(Q)$ – strict crescătoare şi concavă	$R = f(K)$ $\frac{\partial R(t)}{\partial K(t)} > a$, $\frac{\partial^2 R(t)}{\partial^2 K(t)} < 0$	$S = f(Q)$ – strict crescătoare şi concavă $\begin{cases} S'(Q) > 0 \\ S''(Q) < 0 \\ S(Q) > 0 \Leftrightarrow Q > 0 \end{cases}$

Toate cele trei modele sunt considerate cu variaţie continuă, totuşi este uşor de trecut la varianta discretă, rezolvarea celor trei modele fiind făcută în finalul acestei cărţi şi pentru cazul unei evoluţii discrete.

1. Modelul Lesourne-Leban[30]

Obiectivul modelului Lesourne-Leban este maximizarea fluxului (încasărilor) de dividende pe un orizont infinit de timp $t \in [0,\infty)$ în valoare actualizată:

$$\max_{I,F} \int_0^{\infty} e^{-it} D(t)dt \qquad (1)$$

1.1 Ipotezele modelului

1) Capitalul firmei $K(t)$ este format din *capitalul propriu* al firmei $X(t)$ şi *capital împrumutat* $Y(t)$:

$$X(t) + Y(t) = K(t) \qquad (1)$$

2) Dacă presupunem ca durată medie de viaţă a bunurilor capital ale firmei un interval de timp de τ ani atunci din valoarea capitalului existent la momentul t_0: $K(t_0)$ într–un an se depreciază aproximativ $\frac{1}{\tau} K(t_0)$ iar într–un interval de timp $\Delta t = t_1 - t_0$ deprecierea este de aproximativ $\frac{1}{\tau} \cdot K(t_0) \cdot \Delta t$. De asemenea, dacă $I(t_0)$ este valoarea investiţiei care va fi făcută într–un an începând din momentul t_0 atunci volumul investiţiei pe intervalul de timp Δt poate fi aproximată cu $I(t_0) \cdot \Delta t$. În aceste condiţii capitalul firmei la momentul t_1 va fi egal cu valoarea capitalului la momentul t_0 la care se adaugă valoarea investiţiei făcute pe intervalul Δt: $I(t_0) \cdot \Delta t$ şi din care se scade valoarea cu care se depreciază capitalul pe acest interval: $\frac{1}{\tau} \cdot K(t_0) \cdot \Delta t$ şi putem scrie:

$$K(t_1) = K(t_0) + I(t_0) \cdot \Delta t - \frac{1}{\tau} \cdot K(t_0) \cdot \Delta t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(t_1) - K(t_0)}{t_1 - t_0} = I(t_0) - \frac{1}{\tau} \cdot K(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t_1 \to t_0} \frac{K(t_1) - K(t_0)}{t_1 - t_0} = I(t_0) - \frac{1}{\tau} \cdot K(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{K}(t_0) = I(t_0) - \frac{1}{\tau} \cdot K(t_0)$$

din care, ţinând cont că t_0 este oarecare, obţinem *ecuaţia de evoluţie a capitalului*:

$$\dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t)$$

unde:

$a = \frac{1}{\tau}$ este rata de amortizare;

Observație: în acest model se consideră că amortizarea investițiilor din capitalul propriu se face la fel de repede ca plata împrumuturilor pentru investiții, astfel încât cota anuală de amortizare a capitalului propriu X şi rata anuală de rambursare a datoriilor sunt ambele egale cu a.

3) Toate veniturile firmei provin doar din vânzarea bunurilor produse de aceasta, valoarea acestora depinzând de valoarea producție:

$$R(t) = R(Q(t))$$

unde funcția venit $R(Q)$ are proprietățile general valabile:

- $R(Q(t))$ este monoton strict crescătoare: $R'(Q(t)) > 0$
- veniturile marginale la scala de fabricație sunt strict descrescătoare: $R''(Q(t)) < 0$

4) Cheltuielile firmei sunt reprezentate de:

a) salariile angajaților:

$$W(t) = w \cdot L(t)$$

unde $L(t)$ este numărul de salariați ai firmei la momentul t iar w este salariul mediu.

b) amortizarea investițiilor:

$$A(t) = a \cdot K(t)$$

c) dobânzile la creditele contractate: $rY(t)$

5) Profitul brut (sau pierderea) firmei este dat de diferența dintre venituri şi cheltuieli:

$$\Pi(t) = R(Q(t)) - w \cdot L(t) - a \cdot K(t) - rY(t)$$

6) Profitul net este ceea ce rămâne din profitul brut după plata impozitului la stat:

$$E(t) = (1 - f)[R(Q(t)) - wL(t) - aK(t) - rY(t)] \qquad (2)$$

unde f este rata de impozitare a profitului.

7) Profitul net este utilizat pentru plata dividendelor $D(t)$ şi pentru creşterea capitalului propriu $\dot{X}(t)$:

$$E(t) = \dot{X}(t) + D(t) \qquad (3)$$

8) Dividendele sunt nenegative:

$$D(t) \geq 0 \qquad (4)$$

9) Conform condiţiilor impuse de bănci la acordarea împrumuturilor, firma nu poate obţine credite decât în limita unei proporţii maxime datorii/capital propriu:

$$\frac{Y(t)}{X(t)} \leq k \Rightarrow Y(t) \leq kX(t) \qquad (5)$$

cu $k > 0$ (firma are acces la credite) şi $Y(t) \geq 0$ (firma nu acordă credite).

Combinând ecuaţia de balanţă $Y(t) = K(t) - X(t)$ şi condiţia anterioară obţinem:

$$0 \leq K(t) - X(t) \leq (1+k)X(t) \Rightarrow X(t) \leq K(t) \leq (1+k)X(t) \qquad (6)$$

10) Dividende şi investiţiile, care reprezintă variabile de decizie ale conducerii firmei vor fi considerate ca îndeplinind condiţiile:

$$0 \leq D(t) \leq D_{\max} \qquad (7)$$

$$I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max} \qquad (8)$$

necesare în special pentru a obţine un domeniu închis al variabilelor de control necesar asigurării existenţei soluţiei optime.

11) Revenirea acţionarilor i (profitul aşteptat de acţionari la o unitate monetară investită pe acţiuni) este diferită de costul unitar al împrumutului $(1-f)r$ = partea dintr-o unitate monetară de profit net care constituie restituirea datoriilor:

$$i \neq (1-f)r$$

12) Volumul producţiei depinde de volumul capitalului $K(t)$ şi numărul de salariaţi $L(t)$:

$$Q(t) = f(K(t), L(t))$$

1.2 Modelul matematic

$$\max_{D,I,L} \int_0^\infty e^{-it} D(t)dt \qquad (9)$$

$$\dot{X}(t) = (1-f)[R(Q(t)) - wL(t) - (r+a)K(t) + rX(t)] - D(t) \qquad (10)$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t) \qquad (11)$$

$$X(t) \leq K(t) \leq (1+k)X(t) \qquad (12)$$

$$\left.\begin{array}{r}0 \le D(t) \le D_{\max} \quad (13)\\ I_{\min} \le I(t) \le I_{\max} \quad (14)\end{array}\right\}$$ restricţii momentane asupra variabilelor de comandă

$K(0) = K_0$, $X(0) = X_0$ – condiţiile iniţiale ale modelului

1.3 Rezolvarea modelului

Ţinând cont de faptul că modelul presupune o variaţie continuă a indicatorilor firmei va fi aleasă spre rezolvare metoda bazată pe utilizarea *principiului lui Pontreaghin*. În acest sens se calculează succesiv:

a) *Hamiltonianul* problemei (în forma ajustată, fără actualizare):

$$\begin{gathered} H(K(t), I(t), D(t), X(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = D(t) + \lambda_1(t)\{(1-f)[R(Q(t)) - wL(t) - \\ (r+a)K(t) + rX(t)] - D(t)\} + \lambda_2(t)[I(t) - aK(t)] \end{gathered} \tag{15}$$

b) *Lagrangeanul* problemei:

$$\mathcal{L}(\underbrace{K(t), X(t)}_{\text{variabile de stare}}, \underbrace{I(t), D(t)}_{\text{variabile de comanda}}, \underbrace{\lambda_1(t), \lambda_2(t)}_{\text{variabile adjuncte}}, \underbrace{\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4(t), \nu_1(t), \nu_2(t)}_{\text{multiplicatori Lagrange}}) =$$

$$\begin{aligned} &= H(\cdot) + \mu_1(t)D(t) + \mu_2(t)(D_{\max} - D(t)) + \mu_3(t)(I(t) - I_{\min}) + \\ &+ \mu_4(t)(I_{\max} - I(t)) + \nu_1(t)(K(t) - X(t)) + \nu_2(t)((1+k)X(t) - K(t)) \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru simplificarea rezolvării şi din *raţiuni economice*, se presupune că variabilele de control iau valori în domeniul deschis dedus din restricţiile (7) şi (8), astfel încât avem relaţiile:

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_{\max} > D(t) \\ I(t) > I_{\min} \\ I_{\max} > I(t) \end{cases}$$

c) Sistemul canonic este format din ecuaţiile de dinamică ale variabilelor de stare ale modelului $K(t)$ şi $X(t)$:

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = (1-f)[R(Q(t)) - wL(t) - (r+a)K(t) + rX(t)] - D(t) \\ &\dot{K}(t) = I(t) - aK(t) \end{aligned}$$

şi din ecuaţiile de dinamică a variabilelor adjuncte:

$$\dot{\lambda}_1(t) = i\lambda_1(t) - \frac{\partial L(\cdot)}{\partial X(t)} = i\lambda_1(t) - \lambda_1(t)(1-f)r + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = i\lambda_2(t) - \frac{\partial L(\cdot)}{\partial K(t)} = i\lambda_2(t) - \lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] - \nu_1(t) + \nu_2(t) + a\lambda_2(t) \quad (18)$$

la care se adaugă condițiile inițiale $K(0) = K_0$, $X(0) = X_0$ şi cele finale $\lim_{t\to\infty}\lambda_1(t) =$ finit, $\lim_{t\to\infty}\lambda_2(t) =$ finit.

d) Condițiile de optim Kuhn–Tucker asociate problemei de maximizare a lagrangeanului pe mulțimea variabilelor de comandă sunt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial D(t)} = 0 \Rightarrow \mu_1(t) + 1 - \lambda_1(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1(t) = \mu_1(t) + 1 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial I(t)} = 0 \Rightarrow \lambda_2(t) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial L(t)} = 0 \Rightarrow \lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} - w\right] = 0 \quad (21)$$

$$\mu_1(t)D(t) = 0 \quad (22)$$

$$\nu_1(t)[K(t) - X(t)] = 0 \quad (23)$$

$$\nu_2(t)[(1+k)X(t) - K(t)] = 0 \quad (24)$$

$$\mu_1(t), \nu_1(t), \nu_2(t) \geq 0 \quad (25)$$

Analizând sistemul de mai sus se observă imediat că:

$$\lambda_1(t) > 0 \quad (26)$$

care rezultă din relațiile (19) şi (25) şi:

$$\left\{\begin{matrix}\lambda_1(t) > 0 \\ (1-f) > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} - w = 0 \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} = w \quad (27)$$

care rezultă din relațiile (21) şi (26), deci evoluția optimă corespunde legității ca venitul marginal al muncii să fie egal cu costul marginal – aici salariul nominal.

De asemenea, conform relației (20) vom avea şi $\dot{\lambda}_2(t) = 0$ rezultat care combinat cu relația (18) conduce la:

$$-\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] - \nu_1(t) + \nu_2(t) = 0 \quad (28)$$

1.4 Analiza traiectoriilor de bază

Variația (0;+) a celor 3 parametrii μ_1, ν_1, ν_2 implică $2^3 = 8$ variante de analiză, din care cazurile (+,+,+) şi (0,+,+) nu sunt admisibile deoarece din

(23) şi (24) ar rezulta $k = 0$, în contradicţie cu ipoteza exprimată prin (6) că firma are acces la credite.

TR. nr.	$\mu_1(t)$	$\nu_1(t)$	$\nu_2(t)$
1	0	+	0
2	0	0	+
3	0	0	0
4	+	+	0
5	+	0	+
6	+	0	0

Înainte de analiza fiecărei soluţii în parte facem observaţia că variantele 1, 2, 3 pentru care $\mu_1(t) = 0$ conduc, conform relaţiei (19) la egalitatea $\lambda_1(t) = 1$ şi implicit la $\dot{\lambda}_1(t) = 0$, deci egalitatea (17) devine:

$$i - (1 - f)r + \nu_1(t) - (1 + k)\nu_2(t) = 0 \text{ sau } i - (1 - f)r = (1 + k)\nu_2(t) - \nu_1(t) \quad (29)$$

În plus, pe traiectoriile 1, 2, 3, relaţia (28) devine:

$$(1 - f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r + a)\right] = \nu_2(t) - \nu_1(t) \quad (30)$$

Traiectoria 1: ($\nu_1(t) > 0, \mu_1(t) = \nu_2(t) = 0$)

Din $\nu_1(t) > 0$ rezultă imediat că $K(t) = X(t)$, deci firma nu face împrumuturi iar din $\mu_1(t) = 0$ rezultă că $D(t) > 0$, deci firma plăteşte dividende.

Conform relaţiei (29) rezultă relaţia $(1 - f)r - i = \nu_1(t)$ şi cum $\nu_1(t) > 0$ vom avea :

$$(1 - f)r > i \quad (31)$$

deci *acţiunile sunt mai ieftine decât creditul* şi este raţional ca finanţarea să se facă din acţiuni.

Conform relaţiei (30) avem:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r + a) = -\frac{\nu_1(t)}{1 - f} \quad (32)$$

şi înlocuind variabila adjunctă $\nu_1(t)$ din relaţia (31) în relaţia (32) obţinem egalitatea:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{i}{1-f} \qquad (33)$$

care este o ecuaţie algebrică cu necunoscuta $K(t)$. Prin rezolvarea sistemului algebric format din această ecuaţie şi $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} = w$ vom obţine o evoluţie staţionară a capitalului şi a numărului de angajaţi ai firmei:

$$K(t) = K_X^* = \text{constant}, \; L(t) = L_X^* = \text{constant}$$

unde K_X^* şi L_X^* sunt soluţiile acestui sistem. Indicele $_X$ a fost adăugat pentru a remarca faptul că valoarea staţionară este corespunzătoare cazului când finanţarea se face numai din acţiuni.

Valoarea dividendelor se scoate din prima ecuaţie de dinamică iar valoarea investiţiilor va fi egală cu valoarea amortizării:

$$I(t) = a \cdot K_X^* = \text{constant}$$

Traiectoria 2: $(v_2(t) > 0, \mu_1(t) = v_1(t) = 0)$

Din relaţia $v_2(t) > 0$ rezultă imediat egalitatea $(1+k)X(t) - K(t) = 0$ care poate fi rescrisă $X(t) = \frac{K(t)}{1+k}$ şi arată că, pe această traiectorie, nivelul datoriei firmei este maxim.

Din egalitatea $\mu_1(t) = 0$ rezultă $D(t) > 0$ care indică faptul că, pe această traiectorie, firma plăteşte dividende, chiar dacă nu la nivelul maxim posibil.

Din (29) rezultă:

$$(1+k)v_2(t) = i - (1-f)r$$

adică:

$$v_2(t) = \frac{i-(1-f)r}{1+k} \qquad (35)$$

Deoarece $v_2(t) > 0 \text{ si } 1+k > 0$ atrag $(1-f)r < i$ rezultă că această traiectorie este posibilă doar dacă acţiunile sunt scumpe şi creditele sunt ieftine; deci finanţarea se va face din credite.

Din (30) rezultă:

$$(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] = v_2(t) \qquad (36)$$

Înlocuim pe $v_2(t)$ din (35) şi obţinem:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{1}{1+k}\left[kr + \frac{i}{1-f}\right] \qquad (37)$$

Notăm cu K_Y^* soluţia acestei ecuaţii (valoarea staţionară când finanţarea se face din credite la maxim).

Traiectoria 3: ($v_1(t) = \mu_1(t) = v_2(t) = 0$)

Din (29) rezultă:

$$(1-f)r = i$$

situaţie care a fost exclusă prin ipoteză, deci traiectoria 3 nu este admisibilă.

Traiectoria 4: ($v_1(t) > 0, v_2(t) = 0, \mu_1(t) > 0$)

Din relaţia (24) rezultă că tot capitalul e capital propriu:

$$K(t) = X(t) \Rightarrow Y(t) = 0$$

deci finanţarea se face numai din acţiuni.

Din egalitatea (29) rezultă $i-(1-f)r = -v_1(t)$, care, coroborată cu faptul că $v_1(t) > 0$, conduce la condiţia $i < (1-f)r$ deci această traiectorie este posibilă doar dacă acţiunile sunt ieftine şi creditele sunt scumpe.

Cum $v_1(t) = (1-f)r - i$ = constant şi $v_2(t) = 0$ rezultă că prima ecuaţie adjunctă este o ecuaţie diferenţială liniară în $\lambda_1(t)$:

$$\dot{\lambda}_1(t) = [i-(1-f)r]\lambda_1(t) + (1-f)r - i$$

care are o soluţie convergentă la valoarea de echilibru deoarece $i < (1-f)r$.

Din egalitatea (30) şi ţinând cont că $v_2(t) = 0$ şi $i-(1-f)r = -v_1(t)$ deducem:

$$\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] = i-(1-f)r \; < 0$$

care este o ecuaţie implicită în *K*(*t*) şi *L*(*t*). Din aceasta şi relaţia $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial L(t)} = w$ se obţin evoluţiile capitalului şi numărului de angajaţi.

În plus $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a < r \Rightarrow K(t) < K_{YX}^*$ unde K_{YX}^* este soluţia staţionară în cazul finanțării mixte $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} = a + r$ (vezi *traiectoria* 6).

Din a doua ecuație de dinamică se va obține și evoluția investițiilor.

Totuși, traiectoria este posibilă doar dacă *K*(*t*) și *L*(*t*) verifică și prima ecuație de dinamică.

Traiectoria 5: ($v_1(t) = 0, v_2(t) > 0, \mu_1(t) > 0$)

Din relația (24) rezultă că nivelul datoriei firmei este maxim:

$$K(t) = (1+k)X(t) \Rightarrow Y(t) = kX(t)$$

deci finanțarea este mixtă (din acțiuni și credite la maxim).

Din $\mu_1(t) > 0$ rezultă *D*(*t*) = 0 deci pe această traiectorie firma nu plătește dividende.

Din ecuația celei de-a doua variabile adjuncte (30) și $v_1(t) = 0$, avem:

$$\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] = v_2(t) \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a > r \Rightarrow K(t) > K_{YX}^*$$

unde K_{YX}^* este soluția staționară în cazul finanțării mixte.

Traiectoria 6: ($v_1(t) = 0, v_2(t) = 0, \mu_1(t) > 0$)

Din ecuația (23) rezultă:

$K(t) > X(t)$ deci firma are datorii ($Y(t) > 0$).

iar din (24) avem:

$K(t) < (1+k)X(t)$ deci datoriile nu sunt la nivelul maxim ($Y(t) < kX(t)$).

Din ecuația (30), ținând cont de faptul că $v_1(t) = v_2(t) = 0$, obținem:

$$\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = r \Rightarrow K(t) = K_{YX}^*$$

unde K_{YX}^* este soluția staționară în cazul finanțării mixte.

Din $\mu_1(t) > 0$ rezultă că firma nu plătește dividende iar din a doua ecuație de dinamică obținem o valoare constantă a investițiilor:

$$I(t) = a \cdot K_{YX}^* = \text{constant}$$

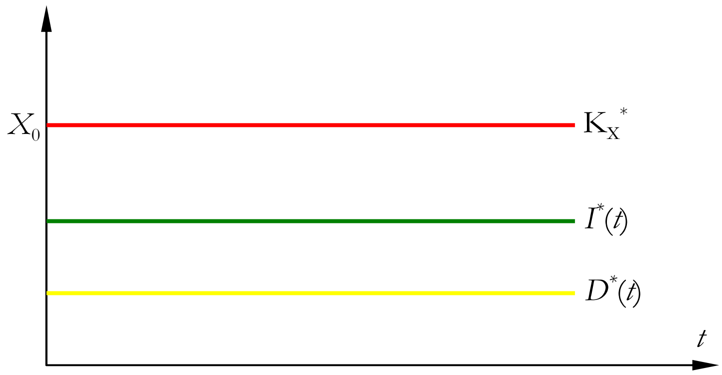
1.5 Analiza traiectoriilor de magistrală

Vom analiza în continuare posibilităţile de concatenare a traiectoriilor pentru obţinerea traiectoriei optime finale. În ceea ce priveşte finalul traiectoriei optime observăm că traiectoriile 4, 5 şi 6 nu pot fi traiectorii finale, întrucât nu poate fi optimal să nu se plătească dividende pe termen lung (deoarece $\mu_1(t) > 0 \Rightarrow D(t) = 0$), deci traiectoriile 1 şi 2 sunt singurele traiectorii finale.

Traiectorii într-un singur stadiu

Analiza va fi făcută în funcţie de raportul dintre preţul acţiunilor *i* şi cel al creditelor (1-*f*)*r* deoarece s-a văzut din analiza traiectoriilor că acest raport decide care sunt traiectoriile admisibile sau neadmisibile.

a) dacă creditele sunt scumpe, adică $i < (1-f)r$ şi $X(0) = K_X^*$, traiectoria optimă este traiectoria 1, evoluţiile indicatorilor firmei putând fi urmărite în figura de mai jos:

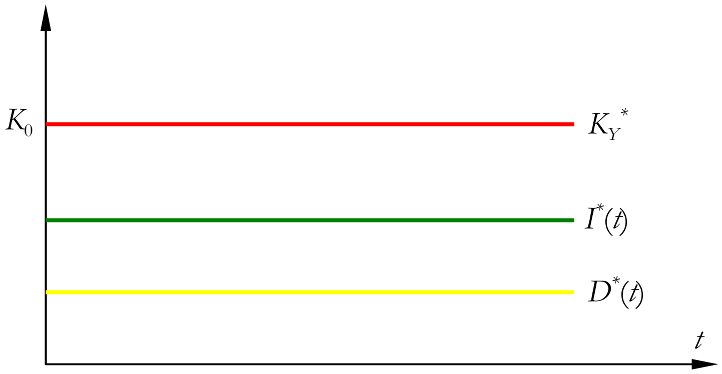


Pentru această situaţie avem o evoluţie staţionară a indicatorilor firmei:

$$D^* = (1-f)(R(K_X^*) - wL - aK_X^*)$$
$$Y^*(t) = 0$$
$$I^*(t) = aK_X^*$$
$$K^*(t) = K_X^*$$

iar valoarea optimă va fi $\int_0^\infty e^{-it} D^* dt \ = \ \dfrac{D^*}{i}$.

b) dacă creditele sunt ieftine, adică $i > (1-f)r$ şi $X(0) = \frac{1}{1+k}K_Y^*$, traiectoria optimă este traiectoria 2, evoluţiile indicatorilor firmei putând fi urmărite în figura de mai jos:



Pentru această situaţie avem de asemenea o evoluţie staţionară a indicatorilor firmei:

$$D^* = (1-f)[R(K_Y^*) - wL(t) - (a + \frac{k}{1+k}r)K_Y^*]$$

$$Y(t) = \frac{k}{1+k}K_Y^*$$

$$I^*(t) = aK_Y^*$$

$$K(t) = K_Y^*$$

iar valoarea optimă va fi $\int_0^\infty e^{-it}D^* dt = \frac{D^*}{i}$.

Traiectorii în două stadii

Dacă creditele sunt scumpe, adică $i < (1-f)r$ şi $X(0) \neq K_X^*$ sau creditele sunt ieftine, adică $i > (1-f)r$ şi $X(0) \neq \frac{1}{1+k}K_Y^*$ traiectoriile finale nu mai pot fi şi traiectorii iniţiale, astfel încât, până ajunge în condiţiile trecerii pe o traiectorie finală firma trebuie să evolueze pe una din traiectoriile 4, 5 sau 6 (în funcţie de valorile iniţiale ale indicatorilor firmei).

Pentru ca o comutare de pe o traiectorie pe alta să fie admisibilă este necesar ca toate soluţiile obţinute prin concatenare să îndeplinească proprietăţile de continuitate şi derivabilitate. Întrucât modelul are restricţii pure asupra stării, există posibilitatea ca *variabilele adjuncte să nu fie continue*.

În punctul τ de concatenare a două traiectorii trebuie satisfăcute relațiile:

$$\lambda_1(\tau^+) = \lambda_1(\tau^-) - \eta_1(\tau) + \eta_2(\tau) \tag{41}$$

$$\lambda_2(\tau^+) = \lambda_2(\tau^-) + \eta_1(\tau) + (1+k)\eta_2(\tau) \tag{42}$$

$$\eta_1(\tau)(K(\tau) - X(\tau)) = 0 \tag{43}$$

$$\eta_2(\tau)((1+k)X(\tau) - K(\tau)) = 0 \tag{44}$$

$$\eta_1(\tau) \geq 0, \eta_2(\tau) \geq 0 \tag{45}$$

Întrucât $\lambda_2(t) = 0$, din egalitatea (42) rezultă:

$$\eta_1(\tau) + (1+k)\eta_2(\tau) = 0 \tag{46}$$

şi cum $\eta_1(\tau)$ şi $\eta_2(\tau)$ sunt pozitive (conform (45) şi (46)) rezultă că $\eta_1(\tau) = \eta_2(\tau) = 0$ deci $\lambda_1(t)$ este continuă, conform (41).

Cum $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$ (conform (19) rezultă că şi multiplicatorul $\mu_1(t)$ este o funcție continuă.

Întrucât pe traiectoriile 1 şi 2 multiplicatorul $\mu_1(t)$ este nul, este necesar ca traiectoriile care preced traiectoriile 1 sau 2 să verifice $\mu_1(t) > 0$. Rezultă că în punctul de comutație:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1(t < \tau) < 0, \dot{\mu}_1(\tau) = 0, \dot{\mu}_1(t > \tau) = 0 \\ \mu_1(t < \tau) > 0, \mu_1(\tau) = 0, \mu_1(t > \tau) = 0 \end{cases}$$

Cum $\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\mu}_1(t)$ (deoarece $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$), înlocuind în relația (17) obținem condiția:

$$\dot{\mu}_1(t) = (1 + \mu_1(t))(i - (1-f)r) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \tag{47}$$

Pentru a vedea care din combinațiile posibile verifică condițiile de mai jos vom analiza succesiv traiectoriile 4, 5 şi 6 pentru a vedea care şi în ce condiții poate precede una din traiectoriile finale 1 şi 2.

Traiectoria 4

Pe această traiectorie avem $\nu_2(t) = 0$ şi utilizând în (47) relațiile: $\nu_2(t) = 0$, $\mu_1(t) = 0$ şi $\dot{\mu}_1(t) < 0$ rezultă:

$$i < (1-f)r$$

deci situația corespunzătoare creditelor scumpe şi traiectoria 4 poate precede doar traiectoria 1.

Din condiția de optim (28), prin explicitarea lui $\nu_1(t)$ rezultă:

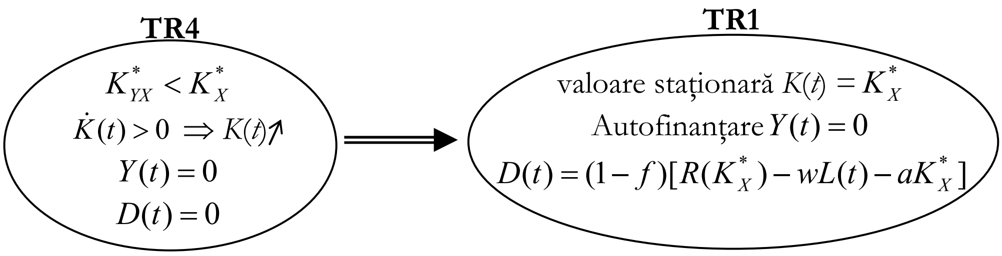
$$\nu_1(t) = -\lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right]$$

care va fi înlocuită în relaţia (47) şi ţinând seama că $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$, avem:

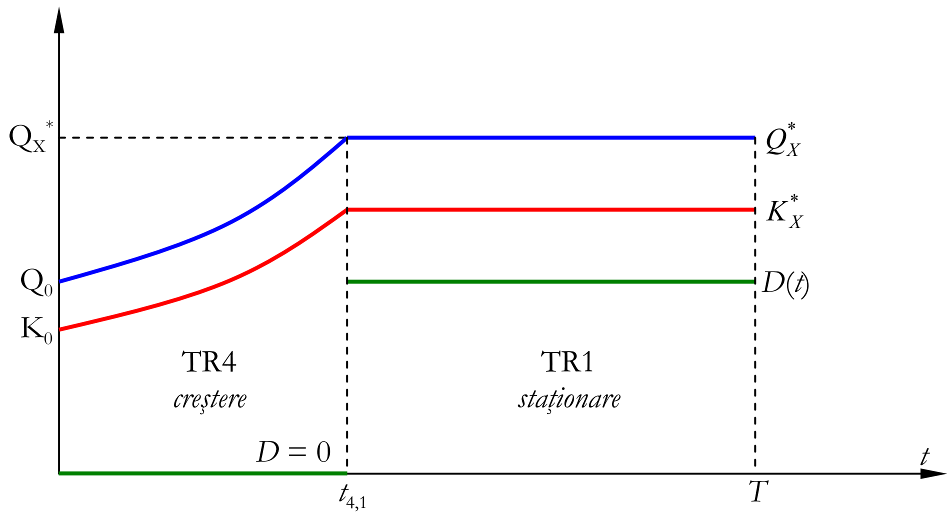
$$\dot{\mu}_1(t) = (i - (1-f)r) - (1+\mu_1(t))(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] - \underbrace{(1+k)\nu_2(t)}_{=0}$$

$$\dot{\mu}_1(t) < 0 \Rightarrow \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a \geq \frac{i}{1-f} \Leftrightarrow K(t) \leq K_X^*$$

Pentru traiectoria 4 se ştie deja că $K(t) > K_{YX}^*$ şi rezultă că în condiţiile unor credite scumpe, deci a unei finanţări doar din surse proprii $X(0) = K(0)$ şi pentru o valoare iniţială a capitalului firmei $K(0)$ mai mică decât valoarea de echilibru K_X^*, firma îşi va începe evoluţia pe traiectoria ascendentă 4 până când capitalul firmei ajunge la valoarea K_X^*, moment în care comută pe traiectoria finală 1. Valorile indicatorilor pe cele două traiectorii sunt trecute în tabelul de mai jos:



iar reprezentarea geometrică a traiectoriei totale este dată în figura de mai jos:



Traiectoria TR4 → TR1 corespunde cazului finanţării pure din acţiuni (creditele sunt scumpe şi volumul împrumuturilor este nul).

Traiectoria 5

Pe această traiectorie avem $\nu_1(t) = 0$.

Din condiţia de optim (28) putem scoate multiplicatorul $\nu_2(t)$:

$$\nu_2(t) = \lambda_1(t)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right]$$

pe care îl înlocuim în (47) şi ţinând seama că $\lambda_1(t) = 1 + \mu_1(t)$:

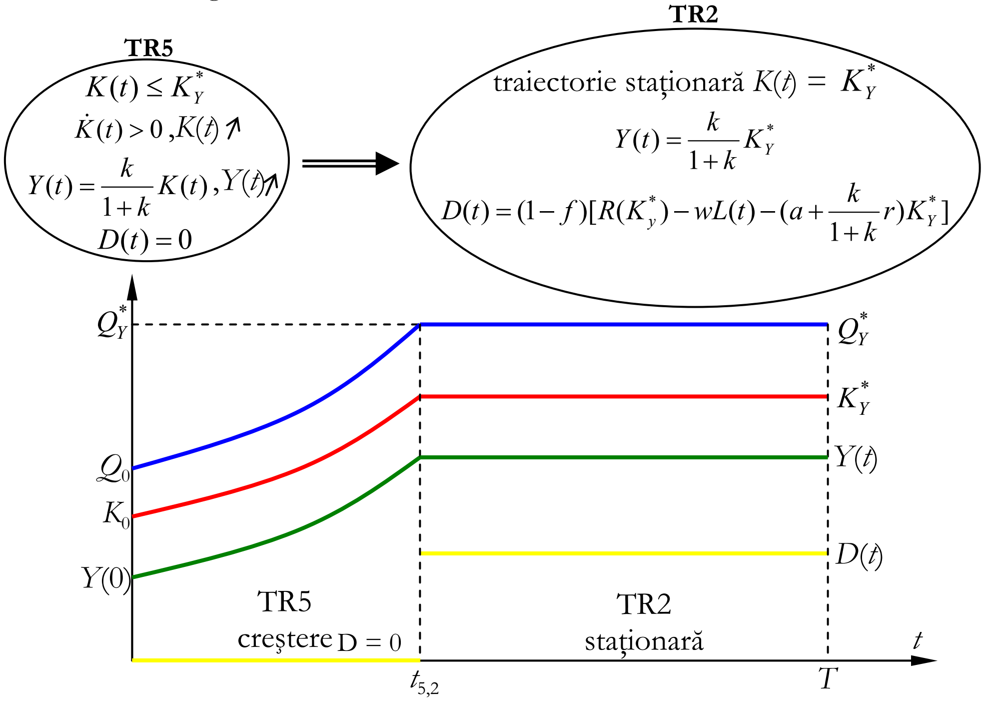
$$\dot{\mu}_1(t) = (i-(1-f)r) - (1+k)(1-f)\left[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - (r+a)\right] \le 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a \ge \frac{1}{1+k}(kr + \frac{i}{1-f}) \Rightarrow K(t) \le K_Y^*$$

Traiectoria 5 trebuie conectată cu traiectoria 2 şi va rezulta cazul finanţării maxime din împrumut. Situaţia corespunde creditelor ieftine şi rezultă că pentru cazul în care:

$$i > (1-f)r \text{ şi } X(0) < \frac{1}{1+k}K_Y^*$$

traiectoria de magistrală este TR5 → TR2.



În cazul acestei magistrale, creşterea se va face cu finanţare maximă din împrumut.

Traiectoria 6

Această traiectorie nu poate precede traiectoria 1 sau 2, datorită imposibilităţii de a respecta continuitatea lui *K(t)*. Astfel:

Pe traiectoria 1: $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{i}{1-f} \Rightarrow K(t) = K_X^*$

Pe traiectoria 6: $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = r \Rightarrow K(t) = K_{YX}^*$

Pe traiectoria 2: $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K(t)} - a = \frac{1}{1+k}(kr + \frac{i}{1-f}) \Rightarrow K(t) = K_Y^*$.

În concluzie nu putem avea decât două traiectorii finale în două stadii:

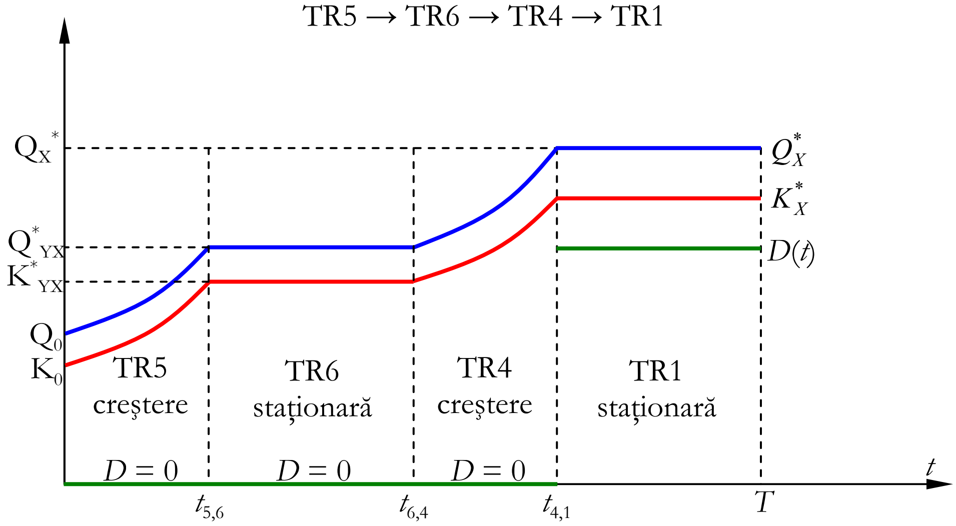
TR4 ⟶ TR1
TR5 ⟶ TR2

Printr-o analiză asemănătoare se poate vedea că pentru cazul când $K(0) = K_{YX}^*$ firma va avea o eventuală evoluţie iniţială pe traiectoria 6 apoi va trece pe succesiunea TR4 ⟶ TR1 iar dacă $K(0) < K_{YX}^*$ va începe pe TR5 până nivelul capitalului va ajunge la valoarea $K(0) = K_{YX}^*$, va staţiona eventual pe TR6 şi apoi va trece pe succesiunea TR4 ⟶ TR1.

Concluzie: Traiectoriile în mai multe stadii sunt:

a) dacă $i < (1-f)r$ şi $X(0) < \frac{1}{1+k}K_{YX}^*$, traiectoria optimală este:

TR5 ⟶ TR6 ⟶ TR4 ⟶ TR1



b) dacă $i > (1-f)r$ şi $X(0) = \dfrac{1}{1+k} K_{YX}^{*}$, traiectoria optimală este:

$$\text{TR5} \longrightarrow \text{TR2}$$

2. Modelul Ludwig[30]

Obiectivul modelului Ludwig este maximizarea fluxului (încasărilor) de dividende pe orizontul limitat de timp [0,T] în valoare actualizată:

$$\max_{I,F} J = \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT} X(T) \quad (1)$$

2.1 Ipotezele modelului

1. Vom considera că evoluţia capitalului are o dinamică clasică:

$$\dot{K}(t) = I(t) - a \cdot K(t) \qquad (2)$$

unde a = coeficientul de depreciere = coeficientul de amortizare

2. Structura capitalului va fi:

$$K(t) = X(t) + Y(t) \qquad (3)$$

unde $X(t)$ reprezintă volumul acţiunilor (capitalul social) iar $Y(t)$ volumul datoriilor (împrumuturilor) la momentul t.

3. Dinamica împrumuturilor este:

$$\dot{Y}(t) = F(t) - b \cdot Y(t) \qquad (4)$$

unde: $F(t)$ = volumul creditelor
b = cota de rambursare anuală a datoriilor(amortismentul).

4. Vom presupune în continuare că se verifică *ipoteza Ludwig*: $b = a$

În aceste condiţii, din relaţia (3) se obţine, prin derivare, dinamica structurii capitalului:

$$\dot{K}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) \quad (3')$$

de unde rezultă succesiv dinamica valorii acţiunilor(capitalului social):

$$\dot{X}(t) = \dot{K}(t) - \dot{Y}(t) \Leftrightarrow$$
$$\dot{X}(t) = I(t) - a \cdot K(t) - F(t) + b \cdot Y(t) \Leftrightarrow$$
$$\dot{X}(t) = I(t) - a \cdot (X(t) + Y(t)) - F(t) + b \cdot Y(t)$$

şi în final, ţinând cont de ipoteza Ludwig(a = b), rezultă:

$$\dot{X}(t) = I(t) - a \cdot X(t) - F(t) \qquad (5)$$

5. Vom considera că profitul net este ceea ce mai rămâne din venitul brut ($R(K(t))$ = cifra de afaceri minus costurile cu factorii variabili, inclusiv

costurile salariale) după ce se scad costurile cu factorii ficşi (amortizarea capitalului = $a \cdot K(t)$ şi dobânzile la datorii = $r \cdot Y(t)$):

$$V(t) = R(K(t)) - a \cdot K(t) - r \cdot Y(t) \quad (6)$$

unde r = rata (normală) a dobânzii (lucrăm in *ipoteza* $r \neq i$).

6. Venitul net obţinut va fi utilizat pentru plata acţionarilor (ca dividende $D(t)$) şi creşterea capitalului social $X(t)$:

$$V(t) = D(t) + \dot{X}(t) \quad (7)$$

7. Dacă $m \in (0,1)$ este cota parte din profitul net reţinută pentru dezvoltare atunci cerinţa acţionarilor ca *dividendele să fie strict pozitive* se traduce prin:

$$D(t) \geq (1 - m) \cdot V(t) > 0 \quad (8)$$

Conform acestei cerinţe, creşterea capitalului social este limitată superior:

$$\dot{X}(t) = V(t) - D(t) \leq V(t) - (1 - m) \cdot V(t) = m \cdot V(t)$$

adică:

$$\dot{X}(t) \leq m \cdot V(t) \quad (8')$$

Conform (5), cererea de investiţii se calculează cu relaţia:

$$I(t) = \dot{X}(t) + a \cdot X(t) + F(t) \quad (9)$$

şi ţinând cont de (8'), obţinem marginea superioară a acesteia:

$$I(t) \leq m \cdot V(t) + a \cdot X(t) + F(t) \quad (10)$$

sau, conform (6):

$$I(t) \leq m \cdot (R(K(t)) - a \cdot K(t) - r\,Y(t)) + a \cdot X(t) + F(t) \quad (10')$$

8. Dacă se face ipoteza: $I(t) \geq 0$ (*nu se admite dezinvestiţia*), atunci din ecuaţia de dinamică (2) rezultă:

$$\dot{K}(t) \geq -\, a \cdot K(t) \text{ sau } \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \geq -\, a$$

ceea ce arată că *rata de creştere* a capitalului poate fi şi *negativă*, fiind deci posibilă şi descreşterea capitalului (decapitalizarea).

9. *Condiţiile de creditare* se impun prin restricţiile:

$$0 \leq F(t) \leq \gamma \cdot I(t) \quad (11)$$

unde $\gamma = \dfrac{F(t)}{I(t)}$ este cota maximă a creditelor pentru investiţii (în raport cu facilităţile sistemului bancar).

Observaţie: Dacă cerinţa (11) este verificată, atunci automat I(t) ≥ 0 şi această restricţie *nu mai apare ca efectivă*.

Pornind de la relaţiile (7) şi (5) şi ţinând cont de relaţia (6) obţinem:

$$(7) \Rightarrow D(t) = V(t) - \dot{X}(t) \overset{(5)}{\Rightarrow} D(t) = V(t) - I(t) + a\cdot X(t) + F(t) \overset{(6),(3)}{\Rightarrow}$$

$$D(t) = R(K(t)) - (a + r)\cdot Y(t) - I(t) + F(t) \qquad (12)$$

care reprezintă *ecuaţia dividendelor* pe baza căreia obţinem funcţia obiectiv:

$$\max_{I,F} J = \int_0^T e^{-it} \cdot (R(K(t)) - (a + r)\cdot Y(t) - I(t) + F(t))dt + e^{-iT} X(T) \qquad (1')$$

10. Vom considera că funcţia de venit $R(t)$ verifică şi condiţiile:

i) $\dfrac{\partial R(t)}{\partial K(t)} > a$

ii) $\dfrac{\partial^2 R(t)}{\partial^2 K(t)} < 0$

prima condiţie rezultând din restricţia $R(K(t)) > a\cdot K(t)$ care spune că veniturile trebuie să acopere cel puţin costurile cu factorii variabili şi cei ficşi iar a doua reprezintă legea randamentelor marginale descrescătoare.

Variabilele modelului sunt:

- variabile de stare: $X(t)$ şi $Y(t)$
- variabile de decizie: $I(t)$ şi $F(t)$
- variabile de ieşire: $K(t)$, $V(t)$ şi $D(t)$

2.2 Modelul matematic

$$\max_{I(t),F(t)} J = \int_0^T e^{-it} \cdot (R(K(t)) - (a + r)\cdot Y(t) - I(t) + F(t))dt + e^{-iT} \cdot X(T)$$

$$\dot{X}(t) = I(t) - a\cdot X(t) - F(t) \qquad X(0) = X_0$$

$$\dot{Y}(t) = F(t) - a\cdot Y(t) \qquad Y(0) = Y_0$$

$$K(t) = X(t) + Y(t)$$

$$I(t) \le m\cdot(R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)) + a\cdot X(t) + F(t)$$

$$0 \le F(t) \le \gamma\cdot I(t)$$

$m \in (0,1)$; $\gamma \in (0,1)$

şi reprezintă o problemă de control optimal.

2.3 Rezolvarea modelului

Pentru rezolvarea acesteia vom utiliza *principiul lui Pontreaghin*.

Deoarece funcţia obiectiv (1') este cu actualizare (apare e^{-it}) construim *hamiltonianul* ajustat (fără actualizare):

$$H(X(t),Y(t),I(t),F(t),\Psi_1(t),\Psi_2(t)) = R(K(t)) - (a + r)\cdot Y(t) - I(t) + F(t) + \Psi_1(t)\cdot[I(t) - a\cdot X(t) - F(t)] + \Psi_2(t)\cdot[F(t) - a\cdot Y(t)] \quad (14)$$

unde variabilele adjuncte sunt exprimate în acest caz prin transformata:

$$\Psi_j(t) = e^{it}\cdot\lambda_j(t)$$

$\lambda_j(t)$ fiind variabilele adjuncte corespunzătoare hamiltonianului $H(\cdot)$ care conţin termenul de actualizare e^{-it}, variabile despre care se ştie că verifică ecuaţiile de dinamică:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} \quad \text{şi} \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H(\cdot)}{\partial Y}$$

de unde rezultă:

$$\dot{\Psi}_1(t) = i\cdot\Psi_1(t) - e^{it}\cdot\frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} \quad \text{şi} \quad \dot{\Psi}_2(t) = i\cdot\Psi_2(t) - e^{it}\cdot\frac{\partial H(\cdot)}{\partial Y} \qquad (16)$$

sau, mai general, teorema:

Teoremă: Dacă $X(t)$ este vectorul variabilelor de stare şi $H(\cdot)$ este hamiltonianul asociat unei probleme de control optimal fără restricţii atunci variabilele adjuncte $\Psi(t)$ folosite în construcţia hamiltonianului, prin excluderea factorului de actualizare (e^{-it}) din funcţia-obiectiv, verifică ecuaţia de dinamică:

$$\dot{\Psi}(t) = i\cdot\Psi(t) - e^{it}\cdot\frac{\partial H(\cdot)}{\partial X} = i\cdot\Psi(t) - \frac{\partial H_{ajustat}(\cdot)}{\partial X} \quad \text{unde } H(t) = e^{-it}\cdot H_{ajustat}(t).$$

Dacă există şi restricţii asupra variabilelor, ca în cazul de faţă restricţiile:

$$\begin{cases} K(t) = X(t) + Y(t) \\ I(t) \le m\cdot(R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\,Y(t)) + a\cdot X(t) + F(t) \\ 0 \le F(t) \le \gamma\cdot I(t) \end{cases}$$

atunci definim *Lagrangeanul* asociat problemei:

$$L(\cdot) = H(\cdot) + \mu_1(t)\cdot[\gamma\cdot I(t) - F(t)] + \mu_2(t)\cdot[m\cdot(R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\,Y(t)) + a\cdot X(t) + F(t) - I(t)] + \mu_3(t)\cdot F(t) \quad (15)$$

unde $\mu_2(t)$ este multiplicatorul asociat restricţiei asupra variabilei de decizie $I(t)$ iar $\mu_1(t)$ şi $\mu_3(t)$ multiplicatorii asociaţi restricţiilor asupra variabilei de decizie $F(t)$ şi ecuaţiile de dinamică (16) trebuie înlocuite cu ecuaţiile:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1(t) = i\cdot \Psi_1(t) - e^{it}\cdot \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial X} \\ \dot{\Psi}_2(t) = i\cdot \Psi_2(t) - e^{it}\cdot \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial Y} \end{cases} \qquad (16)$$

Sistemul de condiţii Kuhn-Tucker se reduce la condiţiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial I} = 0 & (17.a) \\ \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial F} = 0 & (17.b) \end{cases}$$

şi:

$$\begin{cases} \mu_1\cdot[\gamma\cdot I - F] = 0 & (18.a) \\ \mu_2\cdot[m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I] = 0 & (18.b) \\ \mu_3\cdot F = 0 & (18.c) \end{cases}$$

care este un sistem de 5 ecuaţii cu necunoscutele I, F, μ_1, μ_2, μ_3 din care vom scoate variabilele de decizie I şi F în funcţie de variabilele de stare X şi Y şi de variabilele adjuncte Ψ_1 şi Ψ_2.

În cazul de faţă, sistemul condiţiilor Kuhn-Tucker are forma:

$$SKT: \begin{cases} -1 + \Psi_1 + \gamma\cdot\mu_1 - \mu_2 = 0 & (17'.a) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 - \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 & (17'.b) \\ \mu_1\cdot[\gamma\cdot I - F] = 0 & (18.a) \\ \mu_2\cdot[m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I] = 0 & (18.b) \\ \mu_3\cdot F = 0 & (18.c) \\ \text{şi restricţiile de semn: } \mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),I(t),F(t) \geq 0 & \end{cases}$$

În final, variabilele de stare $X(t)$ şi $Y(t)$ vor fi găsite din sistemul de ecuaţii diferenţiale format din ecuaţiile de dinamică ale variabilelor de stare (4) şi (5) la care se adaugă ecuaţiile de dinamică ale variabilelor adjuncte, rezultând un sistem SD de 4 ecuaţii diferenţiale cu 4 necunoscute ($X(t)$, $Y(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$):

$$SD: \begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - a\cdot Y(t) & (4) \\ \dot{X}(t) = I(t) - a\cdot X(t) - F(t) & (5) \\ \dot{\Psi}_1(t) = i\cdot \Psi_1(t) - \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial X} = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot \Psi_1(t) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1 - m)] & (16.a) \\ \dot{\Psi}_2(t) = i\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial L(\cdot)}{\partial Y} = (i + a)\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] + (a + r)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] & (16.b) \end{cases}$$

cu valorile iniţiale $X(0)=X_0$, $Y(0)=Y_0$ plus valorile finale: $\Psi_1(T) = 1$ şi $\Psi_2(T) = 0$ (16.c)

Observație: În formulele in sistem am folosit faptul că:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial X} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} \cdot \frac{\partial K(\cdot)}{\partial X} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} \cdot \frac{\partial (X+Y)}{\partial X} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}$$
$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial Y} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} \cdot \frac{\partial K(\cdot)}{\partial Y} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} \cdot \frac{\partial (X+Y)}{\partial Y} = \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}$$

2.4 Analiza traiectoriilor de bază

Revenind la sistemul de condiții Kuhn-Tucker, deoarece fiecare din ultimele trei ecuații implică 2 cazuri ($\mu_i = 0$ sau $\mu_i \neq 0$, i = 1,2,3) rezolvarea sistemului presupune analiza a $2^3 = 8$ variante, care pot fi sintetizate conform tabelului de mai jos:

Varianta	μ_1	μ_2	μ_3
I	+	+	+
II	+	+	0
III	+	0	+
IV	0	+	+
V	0	0	+
VI	0	+	0
VII	+	0	0
VIII	0	0	0

În continuare vom analiza succesiv fiecare variantă (traiectorie).

Varianta I: $\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t) > 0$

Din condițiile Kuhn-Tucker rezultă:

$$\begin{cases} \gamma \cdot I(t) - F(t) = 0 & (18.a.I) \\ m \cdot V(t) + a \cdot X(t) + F(t) - I(t) = 0 & (18.b.I) \\ F(t) = 0 & (18.c.I) \end{cases}$$

de unde:

$$I(t) = F(t) = 0 \text{ (18'.a.I) și (18'.c.I)}$$

și:

$$m \cdot V(t) + a \cdot X(t) = 0 \qquad (18'.b.I)$$

Ultima relație fiind în contradicție cu ipotezele *a*, *m* ∈ (0,1) și V(*t*), *X*(*t*) > 0, rezultă că această variantă nu este posibilă sau că *traiectoria corespunzătoare nu este admisibilă*.

Varianta II: $\mu_1(t), \mu_2(t) > 0$ și $\mu_3(t) = 0$

Sistemul de condiţii Kuhn-Tucker devine:

$$\begin{cases} \gamma \cdot I(t) - F(t) = 0 & (18.a.II) \\ m \cdot V(t) + a \cdot X(t) + F(t) = I(t) & (18.b.II) \end{cases}$$

Prima relaţie spune că firma face *împrumuturi la nivel maxim*. Cele două ecuaţii formează un sistem liniar de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute ($F(t)$ şi $I(t)$), cu soluţia:

$$\begin{cases} F^*(t) = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\,[m \cdot V(t) + a \cdot X(t)] & (18'.a.II) \\ I^*(t) = \dfrac{1}{1-\gamma}\,[m \cdot V(t) + a \cdot X(t)] & (18'.b.II) \end{cases}$$

Prima arată care este *politica de credite* şi evident $F(t) \geq 0$ iar a doua care este *nivelul investiţiilor* şi de asemenea $I(t) \geq 0$.

Înlocuind aceste soluţii în sistemul dinamic *SD* obţinem:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = m \cdot V(t) = m \cdot (R(K(t)) - a \cdot K(t) - r \cdot Y(t)) & (5.II) \\ \dot{Y}(t) = \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\,\{m \cdot [R(K(t)) - a \cdot K(t) - r \cdot Y(t)] + a \cdot X(t)\} - a \cdot Y(t) & (4.II) \end{cases}$$

unde $K(t) = X(t) + Y(t)$.

Soluţia acestui sistem depinde de forma funcţiei de venit $R(t)$.

Deoarece $V(t) > 0$ şi $m \in (0,1)$ rezultă: $\dot{X}(t) > 0$ deci *capitalul social va creşte* $X(t)\uparrow$. Din (18'.a.II) şi $X(t)\uparrow$ rezultă $F(t)\uparrow$ şi de aici $Y(t)\uparrow$ adică pe traiectoria II datoria firmei creşte.

De asemenea, cum şi X(t) şi Y(t) sunt crescătoare K(t) va fi de asemenea crescător şi $\dot{K}(t) \geq 0$, firma înregistrând o *creştere maximă*, prin politica de împrumuturi maxime posibile.

Dinamică variabilelor adjuncte rezultă din ultimele două ecuaţii ale SD:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a) \cdot \Psi_1(t) - \mu_2(t) \cdot [m \cdot \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a \cdot (1 - m)] & (16.a) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + a) \cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) \cdot [1 + m \cdot \mu_2(t)] + (a + r) \cdot [1 + m \cdot \mu_2(t)] & (16.b) \end{cases}$$

Din condiţiile K-T 17'.a şi 17'.b rezultă:

$$\begin{cases} \Psi_1 = 1 - \gamma \cdot \mu_1 + \mu_2 & (17'.a.II) \\ \Psi_2 = (1 - \gamma) \cdot \mu_2 & (17'.b.II) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{\gamma}[1 - \Psi_1(t)] + \dfrac{1}{\gamma(1-\gamma)} \cdot \Psi_2(t) & \text{(17''.a.II)} \\ \mu_2 = \dfrac{1}{1-\gamma} \cdot \Psi_2(t) & \text{(17''.b.II)} \end{cases}$$

şi în final:

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 = \dfrac{1}{\gamma}[1 - \dot{\Psi}_1(t)] + \dfrac{1}{\gamma(1-\gamma)} \cdot \dot{\Psi}_2(t) & \text{(17'''.a.II)} \\ \dot{\mu}_2 = \dfrac{1}{1-\gamma} \cdot \dot{\Psi}_2(t) & \text{(17'''.b.II)} \end{cases}$$

Ultimele relaţii, în combinaţie cu ecuaţiile de dinamică ale variabilelor adjuncte 16.a şi 16.b duc la un sistem de două ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi neconstanţi, cu două necunoscute, din care vor fi aflate $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ şi apoi $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_1(t) = (i + \mathrm{a}) \cdot \Psi_1(t) - \dfrac{1}{1-\gamma} \cdot [m \cdot \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a \cdot (1 - m)] \cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R}{\partial K}(t) & \text{(16.a)} \\ \dot{\Psi}_2(t) = [i + \mathrm{a} + m \cdot \dfrac{1}{1-\gamma} \cdot (\mathrm{a} + \mathrm{r} - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t))] \cdot \Psi_2(t) + (\mathrm{a} + \mathrm{r}) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) & \text{(16.b)} \end{cases}$$

Ultima ecuaţie este o ecuaţie liniară de gradul întâi în $\Psi_2(t)$ de unde rezultă:

$$\Psi_2^*(t) = \int_0^t [a + r - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau)] \cdot e^{-\int_0^\tau i+a+m \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot [a+r-\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(u)]du} d\tau \cdot e^{\int_0^t i+a+m \cdot \frac{1}{1-\gamma} \cdot [a+r-\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau)]d\tau}$$

apoi:

$$\Psi_1^*(t) = \int_0^t [-\frac{1}{1-\gamma} \cdot [m \cdot \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau) + a(1-m)] \cdot \Psi_2^*(\tau) - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(\tau)] \cdot e^{-(i+a)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(i+a)\cdot t}$$

şi în final:

$$\mu_1^*(t) = \frac{1}{\gamma}[1 - \Psi_1^*(t)] + \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \cdot \Psi_2^*(t)$$

$$\mu_2^*(t) = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \Psi_2^*(t)$$

Pentru ca soluţia să fie admisibilă este necesar ca $\mu_1^*(t)$ şi $\mu_2^*(t)$ să fie pozitive, dar acest fapt poate fi decis numai după alegerea concretă a lui R(K).

Varianta III. $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) = 0$ şi $\mu_3(t) > 0$

Condiţiile K-T devin:

$$SKT:\begin{cases} -1 + \Psi_1 + \gamma\cdot\mu_1 = 0 & (17'.a.III) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 - \mu_1 + \mu_3 = 0 & (17'.b.III) \\ \mu_1 > 0,\ \gamma\cdot I - F = 0 & (18.a.III) \\ \mu_2 = 0,\ m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I > 0 & (18.b.III) \\ \mu_3 > 0,\ F = 0 & (18.c.III) \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $I(t) = F(t) = 0$ oricare ar fi t, deci firma aplică o politică de *neapelare* la credite şi de *investiţii nule* (nu se face nici autofinanţare). Din ecuaţia de evoluţie a capitalului (2) obţinem

$$\dot{K}(t) = -a\cdot K(t) \quad (2.III)$$

deci o *evoluţie descrescătoare* ($\dot{K}(t) < 0$) a *datoriilor firmei*:

$$K^*(t) = K_0\cdot e^{-at} \quad (2'.III)$$

Ecuaţiile de dinamică devin:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = -a\cdot Y(t) & (4.III) \\ \dot{X}(t) = -a\cdot X(t) & (5.III) \\ \dot{\Psi}_1(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot \Psi_1(t) & (16.a.III) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + a)\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + (a + r) & (16.b.III) \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii rezultă o evoluţie concomitent descrescătoare a împrumuturilor şi a acţiunilor ($\dot{Y}(t) < 0$ şi $\dot{X}(t) < 0$) pe traiectoriile:

$$Y^*(t) = Y_0\cdot e^{-at} \quad (5'.III)$$
$$X^*(t) = X_0\cdot e^{-at} \quad (4'.III)$$

şi în final volumul dividendelor:

$$D(t) = R(K^*(t)) - (a + r)\cdot Y^*(t) \quad (12.V)$$

Varianta IV. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) > 0$ şi $\mu_3(t) > 0$

Condiţiile K-T devin:

$$SKT:\begin{cases} -1 + \Psi_1 - \mu_2 = 0 & (17'.a.IV) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 + \mu_2 + \mu_3 = 0 & (17'.b.IV) \\ \mu_1 = 0,\ \gamma\cdot I - F > 0 & (18.a.IV) \\ \mu_2 > 0,\ m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I = 0 & (18.b.IV) \\ \mu_3 > 0,\ F(t) = 0 & (18.c.IV) \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem:

$$SKT:\begin{cases}\Psi_1 = 1 + \mu_2 \Rightarrow \dot{\Psi}_1(t) = \dot{\mu}_2(t) & (17''.a.IV)\\ \Psi_2 = -\mu_3 \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = -\dot{\mu}_3(t) & (17''.b.IV)\\ \mu_1 = 0, \gamma\cdot I > 0 \Rightarrow I > 0 & (18'.a.IV)\\ \mu_2 > 0, I = m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X & (18'.b.IV)\\ \mu_3 > 0, F(t) = 0 & (18'.c.IV)\end{cases}$$

Pe această traiectorie se aplică deci o politică *fără credite* (18'.c.IV) şi există investiţii (18'.a.IV), care vor fi făcute din surse proprii (*autofinanţare pură*".

Înlocuind rezultatele de mai sus în ecuaţiile de dinamică obţinem sistemul:

$$\begin{cases}\dot{Y}(t) = -a\cdot Y(t) & (4.IV)\\ \dot{X}(t) = m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y(t)) & (5.IV)\\ \dot{\mu}_2(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot(1 + \mu_2(t)) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot\dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1 - m)] & (16.a.IV)\\ \dot{\mu}_3(t) = (i + a)\cdot\mu_3(t) + \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] - (a + r)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] & (16.b.IV)\end{cases}$$

cu condiţiile finale: $X(0) = X_0$, $Y(0) = Y_0$, $\mu_2(T) = 0$ şi $\mu_3(T) = 0$.

Din ecuaţia liniară de gradul I cu coeficienţi neconstanţi (16.a.IV) va fi obţinut multiplicatorul $\mu_2(t)$, care va fi înlocuit apoi în ecuaţia (16.b.IV) care va deveni o ecuaţie liniară de gradul I cu coeficienţi neconstanţi în $\mu_3(t)$. Evoluţia pe traiectoria IV are loc atât timp cât $\mu_2(t)$ şi $\mu_3(t)$ sunt simultan pozitivi.

Din ecuaţia (4.IV) obţinem o *evoluţie descrescătoare* ($\dot{Y}(t) < 0$) a *datoriilor firmei*:

$$Y^*(t) = Y_0\cdot e^{-at} \quad (4'.IV)$$

Din ecuaţia (5.IV) rezultă *dinamica volumului acţiunilor*. Avem:

$$\dot{X}(t) = m\cdot V(t) > 0 \Rightarrow X(t)\uparrow \quad (5'.IV)$$

iar evoluţia acţiunilor poate fi dedusă din ecuaţia:

$$\dot{X}(t) = m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y(t))(5.IV)$$

şi depinde de forma funcţiei profitului $R(K)$.

Cum $K(t) = X(t) + Y(t)$ şi $R(K)$ este neliniară, expresia lui $X(t)$ este greu de determinat analitic. În acest caz se folosesc aproximările acestei funcţii prin simulări discrete pe calculator.

Varianta V. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 0$ şi $\mu_3(t) > 0$

Condițiile K-T devin:

$$SKT:\begin{cases} -1 + \Psi_1 = 0 & (17'.a.V)\\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 + \mu_3 = 0 & (17'.b.V)\\ \mu_1 = 0,\ \gamma\cdot I - F > 0 & (18.a.V)\\ \mu_2 = 0,\ m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I > 0 & (18.b.V)\\ \mu_3 > 0,\ F(t) = 0 & (18.c.V)\end{cases}$$

Ultima relație arată că firma acceptă o *politică fără credite*.

Din a treia rezultă $\gamma\cdot I > 0$ deci $I > 0$ iar din a patra $m\cdot V(t) + a\cdot X - I > 0$. În concluzie:

$$0 < I(t) < m\cdot V(t) + a\cdot X(t) \qquad (18'.b.V)$$

deci firma face investiții, sursa lor fiind autofinanțarea, limita superioară a investițiilor fiind partea din profit destinată dezvoltării plus amortizarea părții din capital definită prin capital social.

Din primele două ecuații vom avea:

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{\Psi}_1(t) = 0 & (17''.a.V)\\ \Psi_2(t) = -\mu_3(t) \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = -\dot{\mu}_3(t) & (17''.b.V)\end{cases}$$

Sistemul ecuațiilor de dinamică devine:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = -a\cdot Y(t) & (4.V)\\ \dot{X}(t) = I(t) - a\cdot X(t) & (5.V)\\ 0 = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a) & (16.a.V)\\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + a)\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + (a + r) & (16.b.V)\end{cases}$$

Din ecuația de dinamică a împrumuturilor rezultă că $\dot{Y}(t) < 0$, deci *volumul datoriilor descrește*. Valoarea acestora va fi:

$$Y^*(t) = Y_0\cdot e^{-at} \qquad (4'.V)$$

Din a treia relație avem:

$$\frac{\partial R}{\partial K}(t) = (i + a) \qquad (16'.a.V)$$

de unde rezultă o *traiectorie staționară a capitalului*, notată K_X^* pentru a sublinia faptul că finanțarea este proprie (autofinanțare), unde:

$$K_X^* = (R')^{-1}(a + i) \qquad (16''.a.V)$$

Legitatea de evoluție pe traiectoria V impune ca *profitul marginal net* ($\frac{\partial R}{\partial K}(t)$ – a) să egaleze *rata de interes* a acționarilor.

Din ecuația de dinamică a variabilei adjuncte Ψ_2 și ținând cont de relațiile (17".b.V) și (16'.a.V) rezultă:

$$\dot{\mu}_3(t) = (i + a)\cdot\mu_3(t) + (i - r) \quad (16'.b.V)$$

cu condiția finală $\mu_3(T) = 0$. Soluția acestei ecuații este:

$$\mu_3^*(t) = \frac{r-i}{a+i}[1 - e^{-(i+a)\cdot(T-t)}] \quad (16''.b.V)$$

Condiția $\mu_3^*(t) > 0$ este îndeplinită numai dacă r > i. În concluzie, evoluția pe traiectoria V va avea loc atâta timp cât *creditele sunt scumpe*.

Din (2) rezultă:

$$I^*(t) = a\cdot K_X^* = ct. \quad (2.V)$$

Ecuația de dinamică a capitalului propriu va fi:

$$\dot{X}(t) = I^*(t) - a\cdot X(t) = I^*(t) - a\cdot K_X^* \quad (5.V)$$

și va avea soluția:

$$X^*(t) = e^{-at}(X_0 - K_X^*) + K_X^* \quad (5'.V)$$

În final, putem calcula profitul net:

$$V^*(t) = R(K_X^*) - a\cdot K_X^* - r\cdot Y^*(t) \quad (6.V)$$

și dividendele:

$$D^*(t) = R(K_X^*) - a\cdot K_X^* - (a + r)\cdot Y^*(t) \quad (12.V)$$

Varianta VI. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) > 0$ și $\mu_3(t) = 0$

Sistemul de condiții K-T devine:

$$\begin{cases} -1 + \Psi_1 - \mu_2 = 0 & (17'.a.VI) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 + \mu_2 = 0 & (17'.b.VI) \\ 0 = 0 & (18.a) \\ m\cdot(R(K) - a\cdot K - r\cdot Y) + a\cdot X + F - I = 0 & (18.b) \\ 0 = 0 & (18.c) \end{cases}$$

din care rezultă că $\Psi_2(t) = 0$ oricare ar fi t și implicit $\dot{\Psi}_2(t) = 0$. De aici rezultă că ecuația de dinamică a variabilei adjuncte $\Psi_2(t)$ devine:

$$0 = (i + \mathrm{a})\cdot 0 - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] + (\mathrm{a} + \mathrm{r})\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] \Leftrightarrow$$

$$[\mathrm{a} + \mathrm{r} - \frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)]\cdot[1 + m\cdot\mu_2(t)] = 0$$

şi cum m şi $\mu_2(t)$ sunt pozitive rezultă că:

$$\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) = \mathrm{a} + \mathrm{r} \qquad (19.\mathrm{VI})$$

şi R(K) = (a + r)·K + C, unde constanta C rezultă din condiţiile iniţiale.

Putem astfel considera *legitatea:* Evoluţia optimă se desfăşoară pe traiectoria VI atâta timp cât venitul marginal din vânzări este egal cu rata dobânzii la credite.

Conform (19.VI) care este o ecuaţie algebrică în K rezultă $K(t) = K^*_{YX}$ = ct. unde am folosit indicele $_{YX}$ pentru a arăta că sursa de finanţare este fundamentată atât pe *credite* (Y) cât şi pe autofinanţare (X), unde:

$$K^*_{YX} = \arg_K[\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K} = a + r] \qquad (19'.\mathrm{VI})$$

sau:

$$K^*_{YX} = (R')^{-1}(\mathrm{a} + \mathrm{r}) \quad (19''.\mathrm{VI})$$

Din sistemul de condiţii K-T rezultă şi:

$$\Psi_1 = 1 + \mu_2$$

şi:

$$\dot{\Psi}_1(t) = \dot{\mu}_2$$

Înlocuind în ecuaţia de dinamică a variabilei adjuncte Ψ_1 obţinem:

$$\dot{\mu}_2 = -\frac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + \mathrm{a})\cdot[1 + \mu_2(t)] - \mu_2(t)\cdot[m\cdot\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + a\cdot(1 - m)]$$

şi cum $\frac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t)$ = a + r vom avea:

$$\dot{\mu}_2 = -\mathrm{a} - \mathrm{r} + (i + \mathrm{a})\cdot\mu_2(t) - \mu_2(t)\cdot[m\cdot(\mathrm{a} + \mathrm{r}) + a\cdot(1 - m)] \Leftrightarrow$$

$$\dot{\mu}_2 = (\mathrm{i} - \mathrm{m}\cdot\mathrm{r})\cdot\mu_2 + i - \mathrm{r} \qquad (16''.\mathrm{a.VI})$$

care împreună cu condiţia finală $\mu_2(T) = \Psi_1(T) - 1$ duce la soluţia:

$$\mu_2^*(t) = \frac{r-i}{i-r\cdot m}\cdot[1 - e^{-(i-r\cdot m)(T-t)}] \qquad (23.VI)$$

Studiind semnul acestei soluţii în funcţie de parametrii i, r şi m şi variabila t în tabelul de mai jos:

	$r-i$	$i-rm$	$\frac{r-i}{i-r\cdot m}$	$1-e^{-(i-r\cdot m)(T-t)}$	$\mu_2^*(t)$
$i < rm$	+	–	–	–	+
$i = rm$	+	0	/	0	/
$rm < i < r$	+	+	+	+	+
$i = r$	0	+	0	+	0
$i > r$	–	+	–	+	–

rezultă că este îndeplinită condiţia de admisibilitate $\mu_2^*(t) > 0$ doar dacă $i > r$ şi $m \neq \frac{i}{r}$.

Pentru $i > r$ şi $m \neq \frac{i}{r}$ vom avea din sistemul de condiţii K-T:

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_3 = \Psi_2 = 0 \\ \mu_2 = \Psi_1 - 1 \\ I - F = m\cdot(R(K_{YX}^*) - a\cdot K_{YX}^* - r\cdot Y) + a\cdot X \end{cases}$$

care conduc la sistemul de ecuaţii de dinamică:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - a\cdot Y(t) & (4) \\ \dot{X}(t) = m\cdot(R(K_{YX}^*) - a\cdot K_{YX}^* - r\cdot Y) & (5.VI) \\ \Psi_1^* = 1 + \mu_2^*(t) = ! + \frac{r-i}{i-r\cdot m}\cdot[1 - e^{-(i-r\cdot m)(T-t)}] & (23'.VI) \\ 0 = 0 & (16.b) \end{cases}$$

În plus, avem:

$X(t) + Y(t) = K_{YX}^*$ care duce la $\dot{X}(t) + \dot{Y}(t) = 0$

şi ecuaţia de dinamică a capitalului (2) care devine:

$$0 = I(t) - a\cdot K_{YX}^* \text{ de unde } I^*(t) = a\cdot K_{YX}^* = \text{ct.}$$

De aici rezultă imediat:

$$F^*(t) = a\cdot K_{YX}^* - m\cdot(R(K_{YX}^*) - a\cdot K_{YX}^* - r\cdot Y) - a\cdot[K_{YX}^* - Y(t)] \qquad (18'.b.VI)$$

care înlocuită în ecuaţia de dinamică (4) duce la:

$$\dot{Y}(t) = a\cdot K_{YX}^{*} - m\cdot(R(K_{YX}^{*}) - a\cdot K_{YX}^{*} - r\cdot Y) - a\cdot[K_{YX}^{*} - Y(t)] - a\cdot Y(t) \Leftrightarrow$$
$$\dot{Y}(t) = - m\cdot(R(K_{YX}^{*}) - a\cdot K_{YX}^{*} - r\cdot Y) = - m\cdot V(K_{YX}^{*}) < 0$$

În concluzie, pe traiectoria VI are loc o *diminuare a datoriilor* firmei. Din ecuaţia liniară de mai sus rezultă soluţia:

$$Y^{*}(t) = e^{r\cdot m\cdot t}(Y_0 - Y^{*}) + Y^{*} \qquad (4'.VI)$$

unde nivelul de echilibru Y^{*} este:

$$Y^{*} = \frac{1}{r}[R(K_{YX}^{*}) - aK_{YX}^{*}] \qquad (4''.VI)$$

Evoluţia *capitalului social* $X(t)$ rezultă imediat din relaţia $X(t) + Y(t) = K_{YX}^{*}$ ca fiind:

$$X^{*}(t) = K_{YX}^{*} - Y^{*}(t)$$

şi în plus, cum $\dot{X}(t) + \dot{Y}(t) = 0$ şi $\dot{Y}(t) < 0$ rezultă că $\dot{X}(t) > 0$ deci se duce o politică de *consolidare a firmei*.

În ceea ce priveşte *nivelul creditelor* $F(t)$, din condiţiile K-T rezultă:

$$0 < F^{*}(t) < \gamma\cdot I^{*}(t)$$

ceea ce înseamnă că întreprinderea *face apel* la credite dar *nu la nivel maxim*.

Acest nivel este dat de (18'.b.VI) şi (4'.VI) + (4''.VI):

$$F^{*}(t) = a\cdot K_{YX}^{*} - m\cdot(R(K_{YX}^{*}) - a\cdot K_{YX}^{*} - r\cdot Y^{*}(t)) - a\cdot[K_{YX}^{*} - Y^{*}(t)] =$$
$$= - m\cdot(R(K_{YX}^{*}) - a\cdot K_{YX}^{*} - r\cdot Y^{*}(t)) + a\cdot Y^{*}(t)$$
$$= (a + m\cdot r)\cdot Y^{*}(t) - m\cdot[R(K_{YX}^{*}) - a\cdot K_{YX}^{*}]$$

Cum $Y^{*}(t)$ este descrescătoare rezultă că *nivelul creditelor este în scădere*.

Deoarece

$$F^{*}(t) = - m\cdot(R(K_{YX}^{*}) - a\cdot K_{YX}^{*} - r\cdot Y^{*}(t)) + a\cdot Y^{*}(t) = - m\cdot V^{*}(t) + a\cdot Y^{*}(t)$$

din inegalităţile $0 < F^{*}(t) < \gamma\cdot I^{*}(t)$ vom avea:

$$a\cdot Y^{*}(t) + \gamma\cdot I^{*}(t) > m\cdot V^{*}(t) + \gamma\cdot I^{*}(t) > a\cdot Y^{*}(t)$$

relaţie care reflectă *politica de consolidare* a firmei pe traiectoria VI: "partea din profitul net alocată pentru dezvoltare ($m\cdot V^{*}(t)$) plus împrumuturile pentru investiţii ($\gamma\cdot I^{*}(t)$) depăşeşte amortismentul ($a\cdot Y^{*}(t)$)".

Varianta VII. $\mu_1(t) > 0$, $\mu_2(t) = 0$ şi $\mu_3(t) = 0$

Sistemul de condiţii Kuhn-Tucker devine:

$$SKT: \begin{cases} -1 + \Psi_1 + \gamma\cdot\mu_1 = 0 & (17''.a.VII) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 - \mu_1 = 0 & (17''.b.VII) \\ \gamma\cdot I - F = 0 & (18'.a.VII) \\ 0 = 0 & (18'.b.VII) \\ 0 = 0 & (18'.c.VII) \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{1}{1-\gamma}\cdot \Psi_2(t) & (17''.1) \\ \Psi_1(t) = 1 - \dfrac{\gamma}{1-\gamma}\cdot \Psi_2(t) & (17''.2) \\ \gamma\cdot I(t) = F(t) & (17''.3) \end{cases}$$

Sistemul dinamic *SD* devine:

$$SD: \begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - a\cdot Y(t) & (4.VII) \\ \dot{X}(t) = I(t) - a\cdot X(t) - F(t) & (5.VII) \\ \dot{\Psi}_1(t) = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot \Psi_1(t) & (16.a.VII) \\ \dot{\Psi}_2(t) = (i + a)\cdot \Psi_2(t) - \dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (a + r) & (16.b.VII) \end{cases}$$

Conform relaţiei 17''.2 vom avea:

$$\dot{\Psi}_1(t) = -\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot \dot{\Psi}_2(t) \qquad (17'''.2)$$

Înlocuind 17'''.2 şi 17''.2 în 16.a.III obţinem:

$$-\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot \dot{\Psi}_2(t) = -\frac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a)\cdot\left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot \Psi_2(t)\right) \Leftrightarrow$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = (i + a)\cdot \Psi_2(t) + \frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\partial R}{\partial K}(t) - (i + a)\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma} \qquad (16'.a.VII)$$

Combinând această relaţie cu 16.b.III rezultă:

$$-\frac{\partial R}{\partial K}(t) + (a + r) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\partial R}{\partial K}(t) - (i + a)\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial R}{\partial K}(t) = \gamma(a + r) + (i + a)\cdot(1 - \gamma) = a + (1 - \gamma)\cdot i + \gamma\cdot r = \text{constant} \qquad (19.VII)$$

În concluzie, evoluția optimă are loc pe traiectoria VII atâta timp cât venitul marginal net ($\frac{\partial R}{\partial K}(t)$ – a) este *constant* și *egal* cu suma ponderată a ratelor de interes (rata dobânzii "r" și rata de creștere a acțiunilor "*i*"), unde ponderea γ este rata maximă a împrumuturilor pentru investiții.

De asemenea, *capitalul este staționar*, el fiind soluția ecuației algebrice:

$$R'(K) = \gamma(a + r) + (i + a)\cdot(1 - \gamma)$$

adică:

$$K_Y^* = (R')^{-1}[\gamma(a + r) + (i + a)\cdot(1 - \gamma)] \qquad (19''.VII)$$

Obs. Ecuația (19') are soluție unică, conform proprietăților i) și ii) ale funcției $R(K)$.

Vom avea deci $\dot{K}(t) = 0$ și conform ecuației de dinamică (2) vom avea că valoarea investiției este staționară și anume:

$$I^*(t) = a\cdot K_Y^* = \text{constant} \qquad (20.1)$$

De asemenea, din relația 17".3 rezultă că și volumul creditelor este constant și anume:

$$F^*(t) = \gamma\cdot I^*(t) = \gamma\cdot a\cdot K_Y^* = \text{constant} \qquad (20.2)$$

Firma apelează deci la volumul maxim al creditelor ce i se pot acorda pentru investiția I^*, conform definiției coeficientului γ.

Dinamica variabilelor adjuncte

Revenind la sistemul dinamic *SD*, ecuația (16.a.VII) devine:

$$\dot{\Psi}_1(t) = (i + a)\cdot\Psi_1(t) - (a + (1 - \gamma)\cdot i + \gamma\cdot r) \qquad (16'.a.VII)$$

care este o ecuație liniară în $\Psi_1(t)$ a cărei soluție este:

$$\Psi_1(t) = C\cdot e^{(i+a)t} + 1 + \gamma\cdot\frac{r-i}{i+a}$$

Constanta C va fi aflată din condiția: $\Psi_1(T) = 1$, din care rezultă:

$$1 = C\cdot e^{(i+a)T} + 1 + \gamma\cdot\frac{r-i}{i+a} \Leftrightarrow C = -\gamma\cdot\frac{r-i}{i+a}\cdot e^{-(i+a)T}$$

În final obţinem soluţia:

$$\Psi_1(t) = \gamma\cdot\frac{r-i}{i+a}\cdot[1 - e^{(i+a)(t-T)}] + 1 \qquad (21)$$

Din relaţia 17".2 rezultă

$$\Psi_2(t) = (1-\gamma)\cdot\frac{i-r}{i+a}\cdot[1 - e^{(i+a)(t-T)}] \qquad (22)$$

care verifică $\Psi_2(T) = 0$.

Din relaţia 17".1 şi ţinând cont de condiţia de semn $\mu_1 > 0$ şi $\gamma \in (0,1)$ rezultă condiţia: $\Psi_2(t) > 0$ care se verifică numai dacă $i > r$.

Deci politica $K(t) = K_Y^*$ = constant poate fi aplicată numai dacă *creditele sunt ieftine* ($r < i$).

În final, variabilele de stare rezultă din sistemul:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -a\cdot X(t) + a\cdot K_Y^* - a\cdot\gamma\cdot K_Y^* & (5'.\mathrm{VII}) \\ \dot{Y}(t) = -a\cdot Y(t) + a\cdot\gamma\cdot K_Y^* & (4'.\mathrm{VII}) \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $X(t) = X_0$ şi $Y(t) = Y_0$.

Soluţia este:

$$\begin{cases} X^*(t) = (X_0 - X^*)e^{-at} + X^* \quad \text{unde } X^* = (1-\gamma)\cdot K_Y^* & (5''.\mathrm{VII}) \\ Y^*(t) = (Y_0 - Y^*)e^{-at} + Y^* \quad \text{unde } Y^* = \gamma\cdot K_Y^* & (4''.\mathrm{VII}) \end{cases}$$

De aici rezultă *evoluţia valorii capitalului* $K(t)$ spre valoarea de echilibru K_Y^*:

$$K^*(t) = (K_0 - K^*)e^{-at} + K^* \quad \text{unde } K^* = K_Y^* \qquad (2'.1)$$

şi *volumul dividendelor* pe traiectoria VII:

$$D^*(t) = R(K^*(t)) - (a + r)\cdot Y^*(t) - a\cdot(1-\gamma)\cdot K_Y^* \quad (12')$$

de unde $R^*(t) = R(K^*(t))$ este venitul de-a lungul traiectoriei $K^*(t)$.

Varianta VIII. $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 0$ şi $\mu_3(t) = 0$

Condiţiile K-T devin:

$$SKT:\begin{cases} -1 + \Psi_1 = 0 & (17'.a.VIII) \\ 1 - \Psi_1 + \Psi_2 = 0 & (17'.b.VIII) \\ \mu_1 = 0, \gamma \cdot I - F > 0 & (18.a.VIII) \\ \mu_2 = 0, m \cdot (R(K) - a \cdot K - r \cdot Y) + a \cdot X + F - I > 0 & (18.b.VIII) \\ \mu_3 = 0, F > 0 & (18.c.VIII) \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} \Psi_1(t) = 1 \Rightarrow \dot{\Psi}_1(t) = 0 & (17''.a.VIII) \\ \Psi_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = 0 & (17''.b.VIII) \end{cases}$$

Ecuațiile de dinamică devin:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = F(t) - a \cdot Y(t) & (4.VIII) \\ \dot{X}(t) = I(t) - a \cdot X(t) - F(t) & (5.VIII) \\ 0 = -\dfrac{\partial R}{\partial K}(t) + (i + a) & (16.a.VIII) \\ 0 = -\dfrac{\partial R(\cdot)}{\partial K}(t) + (a + r) & (16.b.VIII) \end{cases}$$

Din ultimele două ecuații rezultă:

$$i + a = \frac{\partial R}{\partial K}(t) = a + r \qquad (16.VIII)$$

şi, în final:

$$i = r \qquad (16'.VIII)$$

ceea ce contrazice ipoteza $i \neq r$, deci traiectoria nu este admisibilă.

În concluzie singurele traiectorii admisibile sunt II … VII.

2.5 Sinteza traiectoriilor optim admisibile. Strategii optime

În funcție de situația internă – reflectată prin nivelul venitului marginal net ($\dfrac{\partial R}{\partial K_t}$ – a) şi de echilibrul macroeconomic (reflectat prin ecartul rata dobânzii – rata de randament a acțiunilor (r – i)), firma poate aplica şase politici optimale. Prin combinarea lor în mod optimal se vor obține, aşa cum vom arăta, *două strategii optimale*, în funcție de condițiile de creditare.

Sinteza rezultatelor privind cele 6 politici optimale analizate mai sus este prezentată în tabloul sinoptic:

Indicatori / Politici optime	Variabile de decizie		Variabile de stare				D_t	Starea firmei şi condiţii
	I_t^*	F_t^*	$\dot{X}_t$	$\dot{Y}_t$	$\dot{K}_t$	K_t		
II – III	Max	Max	+	+	+	$K_t^* \uparrow$	Min	*Creştere maximă* prin credite şi autofinanţare
III – VI	0	0	–	–	–	$K_t^* \downarrow$		*contracţie*
IV – V	Max	0	+	–	+	$K_t^* \uparrow$	Min	*Creştere maximă* prin autofinanţare
V – IV	$a \cdot K_X^*$	0	+	–	0	K_X^* = const	D_t^*	*Staţionară* prin autofinanţare pură (r > i)
VI – II	$a \cdot K_{XY}^*$	Moderat	+	–	0	K_{XY}^*	Min	*Consolidare* prin credite şi autofinanţare (r > i)
VII – I	$a \cdot K_Y^*$	$a \cdot \gamma \cdot K_Y^*$ = max	±	∓	0	K_Y^* = const.	D_t^*	*Staţionară* prin credite maxime (r < i)

unde:

$$K_Y^* = \arg_K \left[\left(\frac{\partial R}{\partial K} - a \right) = \gamma \cdot r + (r - \gamma) \cdot i \right]$$

$$K_{YX}^* = \arg_K \left[\left(\frac{\partial R}{\partial K} - a \right) = r \right]$$

$$K_X^* = \arg_K \left[\left(\frac{\partial R}{\partial K} - a \right) = i \right]$$

Din condiţiile de creditare (credite scumpe (r > i) sau ieftine (r < i)), se identifică *două strategii optime*:

Cazul 1. *Credite ieftine (r < i)*

Traiectoria staţionară optimă va fi drumul (VII), cu $K_t = K_Y^*$ = const. În consecinţă, firma va adopta strategia:

a) dacă $K_0 > K_Y^*$, adică firma deţine la momentul iniţial un stoc al bunurilor de capital (K_0) superior nivelului optim staţionar K_Y^*, se va aplica o politică de descreştere (contracţie), urmând pe termen scurt (TS) drumul optimal (III) – indiferent dacă creditele sunt ieftine sau scumpe, reducând datoriile Y_t ($\dot{Y}_t < 0$), acceptându-se descreşterea capitalului social ($\dot{X}_t < 0$). În concluzie, pe termen scurt, pe perioada $t \in [0, \tau_{37}]$, firma trebuind să intre într-un proces de decapitalizare, urmând traiectoria optimă III, până atinge nivelul optim K_Y^*, adică traiectoria optimă VII, moment notat τ_{37}; acest punct este *momentul de comutaţie* de pe traiectoria III pe traiectoria VII (vezi figura 1).

Algoritmul de determinare a momentului de comutaţie τ_{ij} de pe traiectoria i pe traiectoria j va fi detaliat în paragraful următor.

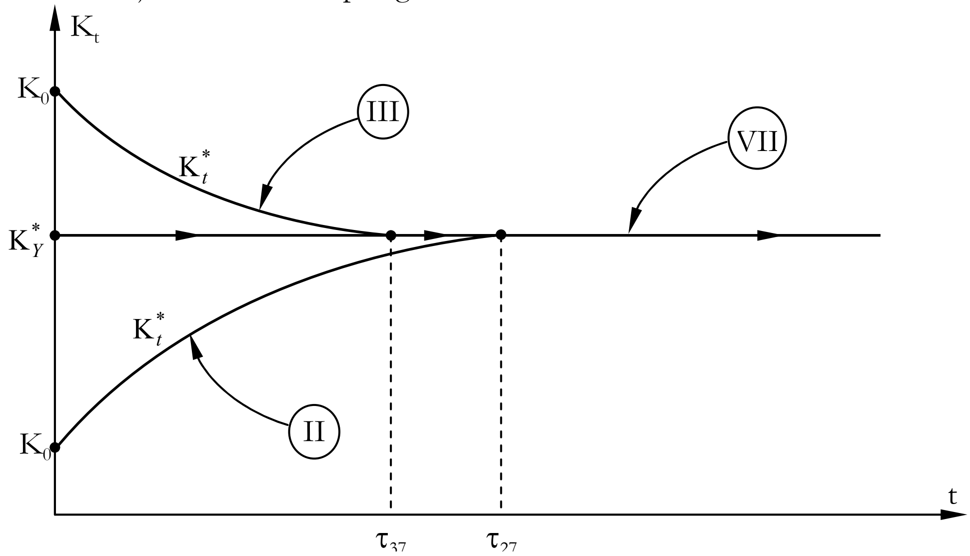


Figura 1. Strategii optime în condiţiile unor credite ieftine r < i

b) dacă $K_0 < K_Y^*$, atunci pe termen scurt firma trebuie să aplice o politică optimală de creştere maximă (traiectoria II cu investiţie maximă posibilă prin sursele de autofinanţare proprii şi *credite maxime*) prin creşterea capitalului ($\dot{K}_t^* > 0$) până la momentul τ_{27} când intră pe traiectoria staţionară (VII) corespunzătoare nivelului K_Y^* al capitalului (vezi figura 1) şi apoi să urmeze traiectoria VII pe termen lung.

c) dacă $K_0 = K_Y^*$, atunci strategia optimă trebuie să fie traiectoria VII, pe termen lung.

Cazul 2. Credite scumpe (r > i)

Problema este mai complicată, deoarece, după cum se evidenţiază în tabloul sintetic de analiză, există două traiectorii optime staţionare (traiectoria V şi traiectoria VI).

Teoremă. Atâta timp cât r > i politica optimală de autofinanţare pură K_X^* (traiectoria V) este superioară politicii mixte (K_{YX}^*) de finanţare prin credite şi autofinanţare (traiectoria VI)

Demonstraţie. Pe traiectoria V, a politicii de autofinanţare pură, avem $\frac{\partial R}{\partial K}(K_X^*) = a + i$ iar pe traiectoria mixtă VI avem $\frac{\partial R}{\partial K}(K_{YX}^*) = a + r$. Cum r

> i rezultă că a + r > a + i şi deci $\frac{\partial R}{\partial K}(K^*_{YX}) > \frac{\partial R}{\partial K}(K^*_X)$. Conform ipotezei veniturilor marginale descrescătoare ($\frac{\partial^2 R}{\partial^2 K} < 0$), din $\frac{\partial R}{\partial K}(K^*_{YX}) > \frac{\partial R}{\partial K}(K^*_X)$ rezultă $K^*_{YX} < K^*_X$.

Analiza posibilităţilor de evoluţie pune în evidenţă combinarea politicilor II, III şi IV cu cele două traiectorii V şi VI, ca în figura 2, în funcţie

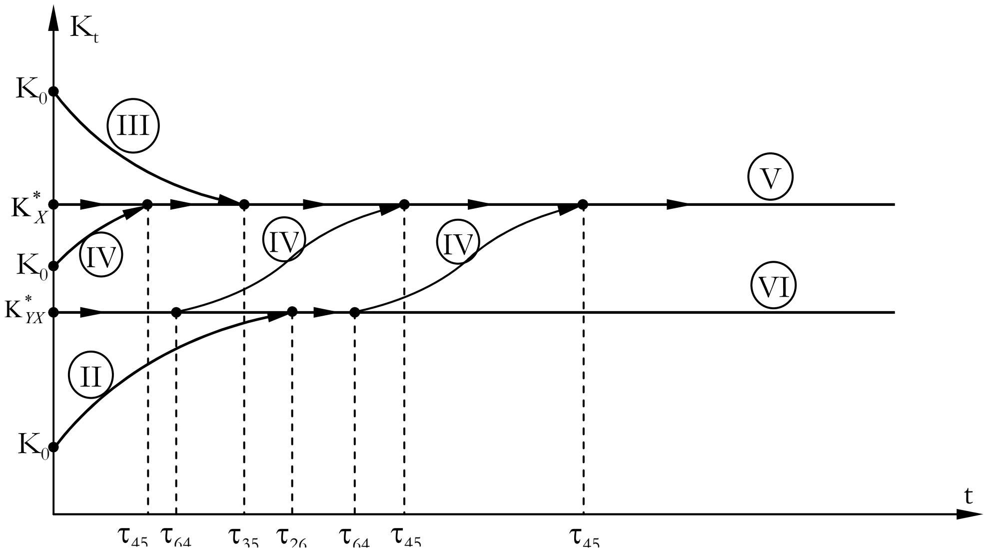


Figura 2. Strategii optime în condiţiile unor credite scumpe r > i

de starea iniţială K_0.

Se constată că:

- dacă nivelul iniţial $K_0 < K^*_{YX}$, firma va aplica pe termen scurt politica II de creştere prin autofinanţare şi credite maxime (chiar dacă în această conjunctură creditele sunt scumpe), până în momentul τ_{26} de atingere a nivelului K^*_{YX}, când intră pe politica VI, staţionară.
- dacă $K_0 \in (K^*_{YX}, K^*_X)$ firma va aplica pe termen scurt politica IV de creştere maximă prin autofinanţare (fără credite), până în momentul τ_{45} când trece pe politica staţionară V, tot cu autofinanţare pură, dar cu investiţii de menţinere ($I^* = a \cdot K^*_X$).

– Dacă $K_0 > K_X^*$, firma va aplica pe termen scurt politica III de contracţie (decapitalizare, cu investiţie nulă), până la momentul τ_{35}, când trece pe politica staţionară V.

Vom demonstra în paragraful următor că, deşi politica VI este staţionară, firma poate trece la anumite momente τ_{64} pe traiectoria de creştere prin autofinanţare IV, cu investiţie maximă, evidenţiindu-se, în funcţie de starea iniţială K_0 strategiile:

$$\begin{cases} VI \to IV \to V \\ II \to VI \to IV \to V \end{cases}$$

2.6 Analiza concatenarităţii traiectoriilor optime. Determinarea momentelor de comutaţie τ_{ij}

A. *Cazul creditelor ieftine* (r < i)

Pentru a găsi criteriile de concatenare a diverselor politici optimale într-o strategie pe termen lung, vom folosi condiţiile de optim date de principiul lui Pontreaghin, care vor da informaţiile privind momentele de comutaţie de pe o traiectorie pe alta.

Din figura 1, pentru r < i, rezultă că trebuie să cercetăm accesibilitatea spre traiectoria VII a drumurilor II şi III.

Notăm cu τ_{ij}^- momentul intrării de pe traiectoria i pe traiectoria j şi cu τ_{ij}^+ momentul plasării pe traiectoria j, unde $\tau_{ij}^- = \tau_{ij}^+ = \tau_{ij}$.

Astfel, pe traiectoria VII avem $\mu_7(t) > 0$ oricare ar fi $t \in [0,T]$, deci $\mu_7(\tau_{i7}^+) > 0$, i = 2;3.

Din (*SKT*) (17".a.VII) şi (17".b.VII), pe traiectoria VII, avem:

$$\Psi_1(\tau_{i7}^+) = 1 - \gamma \cdot \mu_1(\tau_{i7}^+)$$
$$\Psi_2(\tau_{i7}^+) = (1-\gamma) \cdot \mu_1(\tau_{i7}^+) > 0 \quad (17'''.1)$$

a) *Accesibilitatea de pe traiectoria II la traiectoria VII* (strategia II → VII)

Din condiţiile K-T (17'.b.II) rezultă $\Psi_2(t) > 0$, deoarece $\mu_2(t) > 0$ pe traiectoria II, deci $\Psi_2(\tau_{27}^-) > 0$. Cum $\Psi_2(\tau_{27}^-) > 0$ rezultă că traiectoria II accede la traiectoria VII şi momentul de comutaţie de pe II pe VII este soluţia ecuaţiei $\Psi_2(\tau_{27}^-) = \Psi_2(\tau_{27}^+)$, adică $\Psi_2(\tau_{27})\big|_{II} = \Psi_2(\tau_{27})\big|_{VII}$, unde $\cdot\big|_{II}$ şi $\cdot\big|_{VII}$ arată pe ce traiectorie se calculează variabilele adjuncte $\Psi_2(t)$. Însă, aşa cum rezultă din analiza traiectoriilor, expresia analitică $\Psi_2(t)$ nu poate fi determinată analitic în anumite variante, în aceste cazuri folosirea ecuației $\Psi_2(\tau_{27})\big|_{II} = \Psi_2(\tau_{27})\big|_{VII}$ fiind utilă numai dacă se operează cu traiectoria $\Psi_2(\tau_{27})\big|_{II}$ determinată prin metode de aproximare.

Vom folosi din acest motiv o altă cale de determinare a momentului de comutație, bazat pe observația că, dacă traiectoria i accede la traiectoria j, momentul de comutație τ_{ij} este soluția ecuației:

$$K^*(t)\big|_{(i)} = K^*(t)\big|_{(j)} \qquad (23)$$

deci în cazul nostru $K^*(t)\big|_{II} = K_Y^*$ unde $K^*(t)\big|_{II}$ se calculează cu formula $K^*(t) = X_t^* + Y_t^*$ rezultată din sistemul (5.II) și (4.II) și $K_Y^* = K^*(t)\big|_{VII}$ este traiectoria staționară dată de (19".VII), soluție a ecuației:

$$\frac{\partial R}{\partial K_t} - a = r\cdot\gamma + (1-\gamma)\cdot i \qquad (19.VII)$$

Accesibilitatea (II $\rightarrow$ VII) este posibilă dacă $K(t)\big|_{II} < K_Y^*$. Cum $(\frac{\partial R}{\partial K_t}\downarrow)$ rezultă cerința:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right)_{II} > \gamma\cdot r + (1-\gamma)\cdot i \qquad (24')$$

Pentru evaluarea venitului marginal net pe traiectoria II, din (5.II) și (4.II) rezultă:

$$\dot{K}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) = m\cdot(R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\{m\cdot[R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)] + a\cdot X(t)\} - a\cdot Y(t) =$$

$$= \frac{m}{1-\gamma}\cdot[R(K(t)) - a\cdot K(t) - r\cdot Y(t)] + \frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot a\cdot X(t) - a\cdot Y(t) \qquad (25)$$

Cum $R(K(t)$ este concavă monoton crescătoare rezultă că venitul marginal este sub nivelul

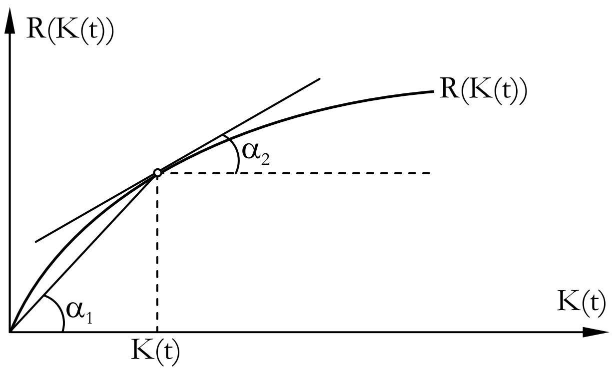


Figura 3

venitului mediu (vezi figura 3):

$$\frac{\partial R}{\partial K_t} < \frac{R}{K_t} \qquad (26)$$

(adică $tg(\alpha_1) < tg(\alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$).

Consecinţă: Între venitul net marginal şi venitul net mediu există inegalitatea:

$$\frac{\partial R}{\partial K_t} - a < \frac{R}{K_t} - a \qquad (26')$$

adică:

$$K_t \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right) < R - a \cdot K_t \qquad (26'')$$

Obţinem:

$$R(K_t) - a \cdot K_t > K_t \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right) \overset{(24')}{>} K_t \cdot (\gamma \cdot r + (1-\gamma) \cdot i) > K_t \cdot r \qquad (26''')$$

ultima inegalitate rezultând din condiţia $i > r$ (credite ieftine). Înlocuind în (25) deducem:

$$\dot{K}(t) > \frac{1}{1-\gamma} \cdot [m \cdot r(K_t - Y(t)) + \gamma \cdot a \cdot X(t) - (1-\gamma) a \cdot Y(t)] \qquad (25')$$

Dar $\dot{K}(t) > 0$ pe traiectoria II. Deducem rezultatul important: "O condiţie suficientă pentru îndeplinirea cerinţei (24) este ca raportul dintre datoria firmei şi capitalul propriu să nu depăşească pragul de viabilitate a firmei ($h = \frac{m \cdot r + a \cdot \gamma}{(1-\gamma) \cdot a}$):

$$\frac{Y_t}{X_t} < \frac{m \cdot r + a \cdot \gamma}{(1-\gamma) \cdot a} \qquad (27)$$

În concluzie, când $K_0 < K_Y^*$, în condiţiile creditelor ieftine ($r < i$), traiectoria II accede (crescător) către traiectoria VII, atingând-o la momentul τ_{27}, soluţie a ecuaţiei (23). Acelaşi comportament se găseşte pentru orice stare iniţială la un moment t_0, cu condiţia ca la acest moment firma să se încadreze în pragul de viabilitate (27).

b) *Accesibilitatea traiectoriei VII de pe traiectoria III*

Este posibilă când $K_0 > K_Y^*$, deoarece $\left(K_t^*\right)|_{III} \downarrow$. Aceasta arată că:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right)\Big|_{III} < \gamma \cdot r + (1-\gamma) \cdot i \quad (28)$$

deci venitul marginal net este redus; în aceste condiţii firma trebuie să aplice un program de contracţie (decapitalizare) până se atinge egalitatea:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial K_t} - a\right)\Big|_{III} = \gamma \cdot r + (1-\gamma) \cdot i \quad (29)$$

ecuaţie care dă soluţia $t = \tau_{37}$, adică momentul de trecere la politica VII.

Observaţie: Analiza concatenărilor posibile prin evidenţierea condiţiilor de realizabilitate a politicilor după cum creditele sunt ieftine (r < i) sau scumpe (r > i), care a dus la obţinerea doar a două variante posibile:

$$\begin{cases} II \to VII \\ III \to VII \end{cases}$$

poate fi suplinită prin analiza de concatenare a diverselor traiectorii, demonstrându-se imposibilitatea trecerii pe traiectoria VII de pe orice traiectorie IV, V sau VI. Astfel:

– trecerea de pe traiectoria VI pe VII arată că $\Psi_2(\tau_{67}^-) = 0$, conform (16'.b.VI) în contradicţie cu $\Psi_2(\tau_{67}^+) > 0$, conform (17'''.VII).
– trecerea de pe traiectoria V pe VII arată că $\Psi_2(\tau_{57}^-) < 0$, conform (16'.b.V) în contradicţie cu $\Psi_2(\tau_{57}^+) > 0$, conform (17'''.VII).
– trecerea de pe traiectoria IV pe VII arată că $\Psi_2(\tau_{47}^-) < 0$, conform (16'.b.IV) în contradicţie cu $\Psi_2(\tau_{47}^+) > 0$, conform (17'''.VII).

B. *Cazul creditelor scumpe* (r > i)

Strategiile optime posibile sunt prezentate în figura 2. Cum politicile optimale VII, VI şi V sunt staţionare, iese din discuţie posibilitatea concatenării între acestea (deoarece $K_X^* \neq K_Y^* \neq K_{XY}^*$).

a) *Accesibilitatea către traiectoria V*, adică spre politica staţionară cu autofinanţare pură, K_X^*.

a$_1$) accesibilitatea de pe *traiectoria II pe traiectoria V* este imposibilă deoarece pe traiectoria II avem $\Psi_2(t) > 0$ oricare ar fi $t > 0$, deci $\Psi_2(\tau_{25}^-) > 0$

în contradicţie cu faptul că pe traiectoria V avem $\Psi_2(t) = -\mu_3(t) < 0$ oricare ar fi $t > 0$, conform (17'.V).

a_2) accesibilitatea *de pe traiectoria IV pe traiectoria V* este posibilă dacă şi numai dacă:

$$K_t^* \big|_{\mathrm{IV}} < K_X^* \quad (24.A.2)$$

deoarece pe traiectoria IV avem $\Psi_2(t) = -\mu_3(t) < 0$ deci există $t = \tau_{45}$ astfel încât $\Psi_2(\tau_{45}^-) = \Psi_2(\tau_{45}^+)$. Evident $t = \tau_{45}$ este soluţia ecuaţiei $K_t^* \big|_{\mathrm{IV}} = K_X^*$.

a_3) accesibilitatea *de pe traiectoria III pe traiectoria V* este posibilă când $K_0 > K_X^*$, deoarece $\left(K_t^*\right)\big|_{\mathrm{III}} \downarrow$.

3. Modelul dinamic al firmei (modelul van Hilten)[30]

Unul dintre cele mai importante modele dezvoltate în literatura de specialitate este acela în care firma este privită ca un sistem dinamic.

Acest model analizează corelaţia dinamică dintre investiţiile făcute din profiturile aduse de activele corporale, investiţiile făcute din credite şi politica de dividende a firmei, în condiţiile impozitului pe profit.

3.1 Ipotezele modelului

Ipoteza 1. Firma are o producţie omogenă, iar funcţia de producţie este liniară:

$$Q(t) = q\,K(t) \tag{1}$$

unde:

- $K(t)$ sunt bunurile de capital, exprimate valoric. Se face ipoteza că o unitate de capital este egală cu o unitate monetară (s-a ales drept numerar unitatea de capital);
- $Q(t)$ reprezintă nivelul producţiei, exprimat valoric;
- q reprezintă productivitatea medie a capitalului, $q = \dfrac{Q(t)}{K(t)} = ct$. Se presupune că productivitatea medie este egală cu productivitatea marginală, ipoteză din care rezultă funcţia de producţie liniară (1).

Toată producţia se presupune că se vinde, astfel încât stocul de producţie finită este zero.

Ipoteza 2. Funcţia de vânzări $S(Q(t))$ este pozitivă, strict concavă şi satisface legea veniturilor descrescătoare la scala de fabricaţie:

$$S(Q(t)) = p(Q(t))\,Q(t) \tag{2}$$

cu:

- $S(Q)$ - funcţia de venit;
- $p(Q(t))$ - funcţia inversă a cererii (piaţa produsului finit este cu competiţie imperfectă); $p'(Q(t)) < 0$

$$\begin{cases} S'(Q) > 0 \\ S''(Q) < 0 \\ S(Q) > 0 \Leftrightarrow Q > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Proprietățile funcției de vânzări arată faptul că aceasta este crescătoare în raport cu producția şi cu randamente descrescătoare la scală. De asemenea, producția nu poate fi negativă.

Ipoteza 3. Singurul input este constituit de bunurile capital. Deprecierea capitalului (amortizarea) este proporţională cu valoarea capitalului $aK(t)$, a fiind rata de amortizare.

Venitul net din vânzări (profitul brut) este:

$$\Pi(K(t)) = [\, q \cdot p(Q(t)) - a] \cdot K(t) \quad (4)$$

Ipoteza 4. Singurul tip de active corporale ale firmei, bunurile capital, pot fi finanţate din împrumuturi şi/sau acţiuni:

$$K(t) = X(t) + Y(t) \qquad (5)$$

unde:

$X(t)$ – valoarea acţiunilor;

$Y(t)$ – valoarea creditelor (împrumuturilor).

Se cunosc, de asemenea, valorile iniţiale ale capitalului ($K(0) = K_0$), acţiunilor ($X(0) = X_0$) şi împrumuturilor ($Y(0) = Y_0$).

Ipoteza 5. Creşterea valorii totale a acţiunilor (a capitalului social) se realizează prin acumulări din profit.

$$\dot{X}(t) = E(t) \quad (6)$$

unde:

- $\dot{X}(t)$ - creşterea valorii acţiunilor;

- $E(t)$ - partea din profit utilizat pentru creşterea valorii acţiunilor.

Profitul poate fi utilizat pentru investiţii şi/sau pentru creşterea valorii acţiunilor.

$$E(t) = (1 - f) \cdot [\Pi(K(t)) - rY(t)] - D(t) \quad (7)$$

unde:

- f rata de impozitare a profitului corporal;
- r rata dobânzii;
- $rY(t)$ valoarea dobânzii;
- $(1 - f)[\Pi(K(t)) - rY(t)]$ profitul net după impozitare şi plata datoriilor.
- $D(t)$ valoarea dividendelor;
- $E(t)$ acumulările din profit sunt partea care rămâne din profiturile corporale, după plata impozitului şi a dividendelor.

Ipoteza 6. Investiţiile nete sunt:

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t) \qquad (8)$$

unde:

$I(t)$ investiţia brută;
$aK(t)$ deprecierea capitalului.

$$\dot{K}(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) \text{ relaţia de dinamică a balanţei.} \qquad (9)$$

Ipoteza 7. Volumul creditului este restricţionat la o pondere din valoarea capitalului social:

$$Y(t) \leq k X(t) \ (10)$$

unde:

k = ponderea maximă a împrumutului.

Ipoteza 8. Costurile unitare depind de structura de finanţare:
$c_N ; N = X, Y, YX$

unde indicele N arată tipul de finanţare:
$N = X$ finanţarea din acţiuni (autofinanţare);
$N = Y$ finanţarea din împrumut maxim;
$N = YX$ finanţarea mixtă.

Ipoteza 9. Pentru demararea activităţii, venitul marginal în momentul iniţial depăşeşte costul marginal (oricare dintre costurile unitare):

$$S'(Q((t))\big|_{t=0} > \max_N \{c_N\}$$

S-a făcut ipoteza că costul unitar este egal cu costul marginal.

Ipoteza 10. Firma se dezvoltă numai dacă venitul net din vânzări este pozitiv:

$$\Pi(K(t)) \geq 0$$

Ipoteza 11. Piaţa financiară şi piaţa monetară se consideră a fi două pieţe distincte, astfel încât preţurile pe cele două pieţe sunt diferite:

$$i \neq (1 - f)r$$

unde:

i este preţul pe piaţa financiară (considerat ca randament al acţiunilor) – dividendele care revin la o unitate monetară plătită de acţionari pe acţiuni; pentru firmă i este un cost, este costul unei acţiuni: firma trebuie să asigure pentru fiecare unitate monetară plătită de acţionari pe acţiuni, o revenire i.

$(1 - f) \cdot r$ este costul unitar al creditului. Întrucât rata de impozitare se aplică după plata datoriilor, la o unitate monetară profit net (după impozitare), revine mai puţin de o unitate monetară dobândă. Este partea dintr-o unitate monetară de profit care revine pentru amortizarea creditului.

Ipoteza 12. Valoarea acţiunilor în momentul iniţial este strict pozitivă:

$$X(0) > 0$$

Performanţa modelului: maximizarea valorii firmei calculată ca sumă de dividende actualizate pe intervalul [0, *T*] şi a valorii reale finale a capitalului social.

Variabile de decizie (control):

I(*t*) – investiţia brută;
D(*t*) – valoarea dividendelor.

Variabile de stare:

X(*t*) – valoarea acţiunilor;
K(*t*) – valoarea bunurilor capital.

Variabile rezultative:

Y(*t*) – volumul creditelor.

3.2 Modelul matematic

$$\max_{D,I} \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT} X(T) \tag{11}$$

$$\dot{X}(t) = (1-f)\left[\Pi(K(t)) - rY(t)\right] - D(t) = (1-f)\left[\Pi(K(t)) - r(K(t) - X(t))\right] - D(t) \tag{12}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t),\ K(0) = K_0 \tag{13}$$

$$X(t) \le K(t) \le (1+k)X(t) \tag{14}$$

$$0 \le D(t) \le D_{\max} \tag{15}$$

$$I_{\min} \le I(t) \le I_{\max} \tag{16}$$

3.3 Rezolvarea modelului

Pentru rezolvare va fi folosit principiul lui Pontreaghin pentru cazul continuu, în care se va ţine cont şi de faptul că funcţia obiectiv este cu actualizare.

1. Construim *Hamiltonianul* problemei:

$$H\left(K(t), X(t), I(t), D(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), t\right) =$$
$$D(t) + \lambda_1(t)\left\{(1-f)\left[\Pi(K(t)) - r(K(t) - X(t))\right] - D(t)\right\} + \lambda_2(I(t) - aK(t)) \tag{20}$$

2. construim *Lagrangeanul* problemei:

$$L\big(K(t),X(t),I(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\nu_1(t),\nu_2(t),\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),\mu_4(t),t\big)$$
$$= D(t)+\lambda_1(t)\{(1-f)\big[\Pi(K(t))-r(K(t)-X(t))\big]-D(t)\}+\lambda_2(t)(I(t)-aK(t))$$
$$+\nu_1(t)\big(K(t)-X(t)\big)+\nu_2(t)\big((1+k)X(t)-K(t)\big)+\mu_1(t)\big(I(t)-I_{\min}\big)+$$
$$\mu_2(t)\big(I_{\max}-I(t)\big)+\mu_3(t)D(t)+\mu_4(t)\big(D_{\max}-D(t)\big)$$
(21)

3. *Sistemul canonic* asociat problemei:

$$\dot{X}(t)=(1-f)[\Pi(K(t))-r(K(t)-X(t))]-D(t),\, X(0)=X_0$$
$$\dot{K}(t)=I(t)-aK(t),\, K(0)=K_0$$
$$\dot{\lambda}_1(t)=i\lambda_1(t)-\frac{\partial L}{\partial X(t)}=[i-(1-f)r]\lambda_1(t)+\nu_1(t)-(1+k)\nu_2(t),\lambda_1(T)=0$$
$$\dot{\lambda}_2(t)=i\lambda_2(t)-\frac{\partial L}{\partial K(t)}=(i+a)\lambda_2(t)-\lambda_1(t)(1-f)(\Pi'_K(K(t))-r)-\nu_1(t)-\nu_2(t),\lambda_2(T)=0$$

4. *Condiţiile Kuhn – Tucker* asociate problemei de maximizare a hamiltonianului pe mulţimea comenzilor posibile:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial I(t)}=0 \Leftrightarrow \lambda_2(t)+\mu_1(t)-\mu_2(t)=0 \qquad (24)$$
$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial D(t)}=0 \Leftrightarrow 1-\lambda_1(t)+\mu_3(t)-\mu_4(t)=0 \qquad (25)$$
$$\mu_1(t)\big[I(t)-I_{\min}\big]=0 \qquad (26)$$
$$\mu_2(t)\big[I_{\max}-I(t)\big]=0 \qquad (27)$$
$$\mu_3(t)D(t)=0 \qquad (28)$$
$$\mu_4(t)\big[D_{\max}-D(t)\big]=0 \qquad (29)$$
$$\mu_i(t)\ge 0,\ i=\overline{1,4} \qquad (30)$$
$$\nu_1(t)\big[K(t)-X(t)\big]=0 \qquad (31)$$
$$\nu_2(t)\big[(1+k)X(t)-K(t)\big]=0 \qquad (32)$$
$$\nu_i(t)\ge 0,\ i=\overline{1,2} \qquad (33)$$

Eliminăm cazurile în care $I(t)$ şi $D(t)$ sunt pe limitele artificiale:

$$I(t)=I_{\max}$$
$$I(t)=I_{\min}$$
$$D(t)=D_{\max}$$

deci $\mu_1(t)=\mu_2(t)=\mu_4(t)=0$.

Înlocuind aceste valori în sistemul de condiţii Kuhn-Tucker şi ţinând cont şi de ecuaţiile sistemului canonic obţinem::

a) din relaţia (24) rezultă $\lambda_2(t) = 0$ şi implicit $\dot{\lambda}_2(t) = 0$ iar din relaţia (23):

$$0 = (i+a)\cdot 0 - \lambda_1(t)(1-f)\cdot\left[\Pi'_K(K(t)) - r\right] - \nu_1(t) + \nu_2(t) \Rightarrow$$
$$\lambda_1(t)(1-f)\cdot\left[\Pi'_K(K(t)) - r\right] = \nu_2(t) - \nu_1(t) \quad (34)$$

b) din relaţia (25) rezultă $\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t)$ şi implicit $\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\mu}_3(t)$ iar din relaţia (22):

$$\dot{\mu}_3(t) = \{i - (1-f)r\}(1+\mu_3(t)) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \quad (35)$$

Profitul marginal are forma:

$$\frac{\partial\Pi(K(t))}{\partial K(t)} = \frac{\partial}{\partial K(t)}[S(Q(t)) - aK(t)] = \frac{\partial S(\cdot)}{\partial Q(t)}\cdot\frac{\partial Q(K(t))}{\partial K(t)} - a \Leftrightarrow$$
$$\frac{\partial\Pi(K(t))}{\partial K(t)} = q\cdot S'_Q - a \quad (36)$$

Vom elimina variabilele adjuncte din ecuaţiile de dinamică ale acestora rezultând o ecuaţie de dinamică a multiplicatorului $\mu_3(t)$ înlocuind în (34) pe $\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t)$ şi rezultatul obţinut în (36) şi obţinem:

$$(1+\mu_3(t))(1-f)[q\cdot S'_Q - a - r] = \nu_2(t) - \nu_1(t) \qquad (37)$$

Utilizând relaţiile:

$$\lambda_2(t) = 0 \qquad (40)$$
$$\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t) \qquad (41)$$
$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu_4(t) = 0 \qquad (46)$$

condiţiile de optim devin:

$$\dot{\mu}_3(t) = [i - (1-f)r](1+\mu_3(t)) + \nu_1(t) - (1+k)\nu_2(t) \qquad (38)$$
$$(1+\mu_3(t)(1-f)[q\cdot S'_Q - (a+r)] = \nu_2(\mathrm{t}) - \nu_1(\mathrm{t}) \qquad (39)$$
$$\mu_3(t)D(t) = 0 \qquad (44)$$
$$\nu_1(t)[K(t) - X(t)] = 0 \qquad (48)$$
$$\nu_2(t)[(1+k)X(t) - K(t)] = 0 \qquad (49)$$

$$I(t) - I_{\min} > 0 \qquad (42)$$

$I_{\max} - I(t) > 0$ (43)

$\mu_3(t) \geq 0$ (45)

$\nu_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,2}$ (47)

3.4 Analiza traiectoriilor de bază

Sistemul de ecuaţii de mai sus are 2^3 variante posibile, după variaţia (0;+) a celor trei multiplicatori μ_3, ν_1, ν_2, din care trei nu au soluţii admisibile.

Traiectorii neadmisibile

1) (+,+,+): Din $\nu_1(t) > 0$ şi $\nu_2(t) > 0$ rezultă $K(t) = X(t)$ şi $(1+k)X(t) = X(t)$ de unde $\begin{cases} X(t) = 0 \\ K(t) = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} X(0) = 0 \\ K(0) = 0 \end{cases}$ în contradicţie cu ipoteza X(0) > 0.

2) (0,0,0): $\mu_3(t) = 0$ implică $\dot{\mu}_3(t) = 0$ şi din (38) rezultă $i = (1-f)r$ în contradicţie cu ipoteza 11.

3) (0,+,+): Aceeaşi contradicţie ca în cazul 1).

Traiectorii de bază admisibile

Se obţin din tabelul:

Tr. Nr.	$\mu_3(t)$	$\nu_1(t)$	$\nu_2(t)$
1	+	0	+
2	+	0	0
3	+	+	0
4	0	+	0
5	0	0	+

Traiectoria 1 ($\mu_3(t) > 0, \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) > 0$)

Din $\mu_3(t) > 0$ rezultă $D(t) = 0$ deci nu se plătesc dividende (*tot profitul se reinvesteşte*).

Din $\nu_2(t) > 0$ rezultă $Y(t) = kX(t)$ adică *împrumuturi maxime*.

Din (39) rezultă $(1+\mu_3(t))(1-f)[qS'_q-(a+r)]=\nu_2(t)$ de unde $[qS'_q-(a+r)]>0$ şi $qS'_Q>(a+r)$ deci venitul marginal din vânzări este mai mare decât costul marginal în cazul finanţării din împrumut maxim şi acţiuni.

$$S'_Q > \frac{a+r}{q} = c_{YX}$$

$$c_{YX} = \frac{a+r}{\dfrac{Q(\cdot)}{K(\cdot)}} = \frac{aK(t)+rK(t)}{Q(t)}$$

Dacă notăm Q_{YX}^* soluţia ecuaţiei $S'_Q = c_{YX}$ atunci pe traiectoria 1 S'_Q este descrescătoare, deci $Q(t) < Q_{YX}^*$ deci producţia este mai mică decât valoarea staţionară.

Din relaţia:

$$Y(t) = kX(t) \text{ rezultă } \dot{Y}(t) = k\dot{X}(t)$$

şi prima ecuaţie de dinamică devine:

$$\dot{X}(t) = (1-f)[S(Q(t)) - aK(t) - rY(t)]$$

deci $\dot{X}(t)>0$ şi $\dot{Y}(t)>0$ adică pe traiectoria 1 *acţiunile cresc şi împrumuturile cresc.*

Din $\mu_3(t)>0$ rezultă că pentru a exista comutaţie la un moment τ, la începutul şi la sfârşitul traiectoriei 1, $\mu_3(t)=0$ adică $\overrightarrow{\mu_3}(t)=\lim\limits_{\substack{t\to\tau\\ t<\tau}}\mu_3(t)=0$ deci $\mu_3(t)$ este descrescătoare la sfârşitul traiectoriei 1 ($\dot{\mu}_3(t)<0$).

De asemenea, limita la dreapta $\overleftarrow{\mu_3}(t)=\lim\limits_{\substack{t\to\tau\\ t>\tau}}\mu_3(t)=0$ deci $\mu_3(t)$ este crescătoare la începutul traiectoriei 1 ($\dot{\mu}_3(t)>0$). Conform (38) avem $\dot{\mu}_3(t)=\{i-(1-f)r\}-(1+k)\nu_2(t)$ şi cum $\dot{\mu}_3(t)>0$ avem $i-(1-f)-(1+k)\nu_2(t)>0$ deci $i>(1-f)r+(1+k)\nu_2(t)$ care implică $i>(1-f)r$ rezultând că *la începutul traiectoriei 1 acţiunile sunt scumpe şi creditele ieftine.*

Traiectoria 2 $(\mu_3(t)>0, \nu_1(t)=0, \nu_2(t)=0)$

Din $\mu_3(t)>0$ rezultă că $D(t)=0$ deci *pe traiectoria* 2 *nu se plătesc dividende.*

Din $\nu_1(t)=0$ rezultă că $K(t)>X(t)$ deci *pe traiectoria 2 se fac împrumuturi.*

Din $\nu_2(t) = 0$ rezultă că $Y(t) < kX(t)$ deci *împrumuturile nu sunt la maxim.*

Din relația (39) rezultă $\underbrace{(1+\mu_3(t))}_{\neq 0}\underbrace{(1-f)}_{\neq 0}\left[qS'_Q - (a+r)\right] = 0$ deci $qS'_q - (a+r) = 0$ sau $S'_Q = \dfrac{a+r}{q} = c_{YX}$ de unde rezultă că traiectoria 2 este staționară:

$$\text{Q(t)} = Q^*_{YX},\ K^*{}_{YX} = \frac{Q^*{}_{YX}}{q} \text{ și I(t)} = \text{a}\,K^*_{YX}.$$

În ceea ce privește posibilitățile de concatenare ale traiectoriei 2 avem:

La *începutul traiectoriei* 2 avem $\dot{\mu}_3(t) > 0$ și $\overleftarrow{\mu_3}(t) = 0$ deci, conform (38), $i > (1-f)r$ adică *acțiunile sunt scumpe și creditele ieftine*; de aceea nu se plătesc dividende, iar împrumutul și tot profitul se reinvestește.

La *sfârșitul traiectoriei* 2 avem $\dot{\mu}_3(t) > 0$ și $\overleftarrow{\mu_3}(t) = 0$ deci, conform (38), $i < (1-f)r$ adică *acțiunile sunt ieftine și creditele scumpe* rezultând că pe traiectoria următoare se plătesc dividende.

Traiectoria 3 ($\mu_3(t) > 0, \nu_1(t) > 0, \nu_2(t) = 0$)

Din $\mu_3(t) > 0$ rezultă $D(t) = 0$ deci *pe traiectoria 3 nu se plătesc dividende.*

Din $\nu_1(t) > 0$ rezultă $K(t) = X(t)$ deci *pe traiectoria 3 nu se fac împrumuturi.*

Din relația (39) avem:

$$(1+\mu_3(t))(1-f)[qS'_Q - (a+r)] = -\nu_1(t)$$

care atrage $qS'_Q - (a+r) < 0$ adică $qS'_Q < (a+r) \Leftrightarrow S'_Q < c_{YX}$ și dacă Q^*_{YX} este soluția ecuației $S'_Q = c_{YX}$ vom avea $Q(t) > Q^*_{YX}$, $K(t) > K^*{}_{YX}$ deci $\dot{K}(t) > 0$ adică *capitalul crește pe traiectoria* 3.

Faptul că nu se plătesc dividende atrage $\dot{X}(t) > 0$ deci *acțiunile cresc pe traiectoria* 3.

În ceea ce privește posibilitățile de concatenare ale traiectoriei 3 avem:

La *începutul traiectoriei* 3 avem $\dot{\mu}_3(t) > 0$ și $\overleftarrow{\mu_3}(t) = 0$ deci, conform (38), $i > (1-f)r$ adică *acțiunile sunt scumpe și creditele ieftine*; de aceea nu se plătesc dividende, iar împrumutul și tot profitul se reinvestește.

La *sfârşitul traiectoriei* 3 avem $\dot{\mu}_3(t) > 0$ şi $\overleftarrow{\mu_3}(t) = 0$ deci, conform (38), $i < (1 - f)r$ adică *acţiunile sunt ieftine şi creditele scumpe* rezultând că pe traiectoria următoare se plătesc dividende.

Traiectoria 4 ($\mu_3(t) = 0, \nu_1(t) > 0, \nu_2(t) = 0$ **)**

Din $\mu_3(t) = 0$ rezultă $D(t) > 0$ deci pe traiectoria 4 *se plătesc dividende.*

Din $\nu_1(t) > 0$ rezultă $K(t) = X(t)$ deci pe traiectoria 4 *nu se fac împrumuturi.*

Din relaţia (39) rezultă $(1 - f)[qS'_Q - (a + r)] = -\nu_1(t)$ $\Leftrightarrow \nu_1(t) = -(1 - f)[qS'_Q - (a + r)]$.

De asemenea, din $\mu_3(t) = 0$ rezultă $\dot{\mu}_3(t)$ şi relaţia (38) devine:

$$\{i - (1 - f)r\} + \nu_1(t) = 0$$

şi înlocuind $\nu_1(t)$ cu valoarea sa obţinută anterior în relaţia (39) vom avea:

$$\{i - (1 - f)r\} = (1 - f)[qS'_Q - (a + r)] \Rightarrow$$

$$S'_Q = \frac{1}{q}\left(a + \frac{i}{1 - f}\right) = c_X$$

unde c_X este costul unitar în cazul autofinanţării pure.

Relaţia obţinută arată că pe traiectoria 4 *venitul marginal din vânzări este egal cu costul marginal al finanţării din acţiuni* (autofinanţării).

Ecuaţia $S'_Q = c_X$ este o ecuaţie algebrică în $Q(t)$ care are ca soluţie o funcţie de producţie constantă:

$$Q(t) = Q^*_X \Rightarrow K(t) = K^*_X \Rightarrow I^* = aK^*_X$$

deci *traiectoria* 4 *este staţionară.*

Cum $\left.\begin{array}{l}\dot{K}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{X}(t) = 0$ rezultă că *valoarea acţiunilor nu creşte* pe traiectoria 4.

Din relaţia (38):

$$i - (1 - f)r = -\nu_1(t) < 0$$

rezultă $i < (1 - f)r$ deci pe traiectoria 4 *acţiunile sunt ieftine şi creditele sunt scumpe.*

Traiectoria 5 ($\mu_3(t) = 0, \nu_1(t) = 0, \nu_2(t) > 0$ **)**

Din $\mu_3(t) = 0$ rezultă $D(t) > 0$ deci pe traiectoria 5 *se plătesc dividende.*

Din $v_1(t)=0$ rezultă $K(t)>X(t)$ deci pe traiectoria 5 *se fac împrumuturi*.

Din $v_2(t)>0$ rezultă $Y(t) = kX(t)$ deci pe traiectoria 5 se fac *împrumuturi la maxim*.

Din ecuaţia (39) avem:

$$(1-f)[qS'_Q-(a+r)]=v_2(t)$$

care coroborat cu (38) şi $\dot{\mu}_3(t)=0$ care conduc la $i-(1-f)r=(1+k)v_2(t)$ obţinem:

$$S'_Q = \frac{1}{q}\left(a+\frac{k}{1+k}r+\frac{1}{1+k}\frac{i}{1-f}\right) = c_Y$$

unde c_Y este costul marginal al finanţării din împrumuturi maxime şi plata dividendelor.

Relaţia obţinută arată că pe traiectoria 5 *venitul marginal din vânzări este egal cu costul marginal al finanţării din împrumut maxim şi plata dividendelor*.

Cum ecuaţia $S'_Q = c_Y$ este o ecuaţie algebrică în $Q(t)$ traiectoria 5 este staţionară:

$$Q(t) = Q_Y^* \Rightarrow K(t) = K_Y^* \Rightarrow I^* = aK_Y^*,\ X(t) = \frac{K_Y^*}{k+1},\ Y(t) = k\frac{K_Y^*}{k+1}$$

Din (38) şi $v_2(t) > 0$ rezultă $i > (1-f)r$ deci pe traiectoria 5 *acţiunile sunt scumpe şi creditele sunt ieftine* (se justifică împrumutul maxim şi plata dividendelor).

3.5 Traiectorii finale

Pentru ca o traiectorie să fie finală trebuie să verifice condiţiile de transversalitate:

$$\begin{cases} \lambda_i(t) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}S(x^*(T),T)+\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\gamma_j\dfrac{\partial}{\partial x_i}h_j(x^*(T),T) \\ \left.\begin{array}{l}\gamma_j h_j(x^*(T),T)=0 \\ \gamma_j \geq 0\end{array}\right\} j=\overline{1,q} \end{cases}$$

care în cazul nostru devin:

$h_1(X(T),T) = [K(T) - X(T)] \geq 0$
$h_2(X(T),T) = [(1+k)X(T) - K(T)] \geq 0$
$S(X(T),T) = X(T)$

Variabilele de stare sunt:

$X_1(t) = X(T)$ = valoarea acţiunilor
$X_2(t) = K(T)$ = valoarea capitalului

Condiţiile de transversalitate devin:

$$\lambda_1(T) = 1 - \gamma_1 + (1 + k)\gamma_2 \quad (52)$$
$$\lambda_2(T) = \gamma_1 - \gamma_2 \quad (53)$$
$$\gamma_1, \gamma_2 \geq 0 \quad (54)$$
$$\gamma_1[K(T) - X(T)] = 0 \quad (55)$$
$$\gamma_2[(1 + k)\, X(T) - K(T)] = 0 \quad (56)$$

Din relaţiile (55) şi (56) rezultă că este imposibil cazul în care $\gamma_1 > 0$ şi $\gamma_2 > 0$, întrucât aceasta ar însemna $K(T) = X(T)$ şi $(1 + k)\, X(T) - K(T) = 0$ adică $k = 0$ în contradicţie cu ipoteza că firma poate face împrumuturi.

Din relaţia (53) rezultă $\lambda_2(T) = \gamma_1 - \gamma_2$ şi conform (44) avem $\lambda_2(T) = 0$. Ţinând cont de observaţia că nu pot fi ambele strict pozitive rezultă $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Ştim că $\lambda_1(t) = 1 + \mu_3(t)$ deci $\mu_3(t) = \lambda_1(t) - 1$ de unde:

$$\mu_3(T) = \lambda_1(T) - 1 = -\gamma_1 + (1 + k)\gamma_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu_3(T) = 0 \\ \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_2(T) = 0 \end{cases}$$

Singurele traiectorii care satisfac aceste condiţii sunt:

Traiectoria 4, pe care $i < (1 - f)r$
Traiectoria 5, pe care $i > (1 - f)r$

Făcând un rezumat al rezultatelor obţinute avem:

TR nr.	Structura financiară	Nivelul producţiei	$\dot{X}(t)$	$\dot{K}(t)$	$D(t)$	Condiţii de fezabilitate
1	$Y(t) = k \cdot X(t)$	$Q(t) < Q^*_{YX}$	+	+	0	–
2	$0 < Y(t) < k \cdot X(t)$	$Q(t) = Q^*_{YX}$	+	0	0	–
3	$Y(t) = 0$	$Q(t) > Q^*_{YX}$	+	+	0	–
4	$Y(t) = 0$	$Q(t) = Q^*_X$	0	0	+	$i < (1 - f) \cdot r$
5	$Y(t) = k \cdot X(t)$	$Q(t) = Q^*_Y$	0	0	+	$i > (1 - f) \cdot r$

3.6 Costurile firmei

a) c_Y – costul finanțării din împrumut maxim

$$c_Y = \frac{1}{q}\cdot\left[a + r\cdot\frac{k}{1+k} + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}\right]$$

$\frac{k}{1+k}$ → cota parte din împrumut pe o unitate de bun capital

$Y(t) = k\cdot X(t)$, $K(t) = (1 + k)\cdot X(t) \to \frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{k}{1+k} \to Y(t) = \frac{k}{1+k}\cdot K(t)$

$r\cdot\frac{k}{1+k}$ → dobânda pe o unitate de bun capital

$\frac{i}{1-f}$ → rata de revenire a acționarilor, înainte de plata impozitului. Dividendele se plătesc după impozitare ⇒ înainte de impozitare trebuie inclusă în cost valoarea $\frac{i}{1-f}$.

$\frac{1}{1+k}$ → partea dintr-o unitate monetară plătită pe acțiuni, care revine la o unitate de bun capital. $K(t) = (1 + k)\cdot X(t) \to \frac{X(t)}{K(t)} = \frac{1}{1+k} \Rightarrow X(t) = \frac{1}{1+k}\cdot K(t)$

$\frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}$ → costul unei acțiuni (al dividendelor), pe o unitate de bun capital.

a – costul deprecierii capitalului

$\left[a + \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}\right]$ = costul total care revine la o unitate de bun capital.

$q = \frac{Q(t)}{K(t)}$

$\frac{1}{q}\cdot\left[a + \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}\right]$ = costul total pe o unitate de produs finit.

Deci:

c_Y include:
- $a \rightarrow$ cost de producţie
- Cost de finanţare:
  - Pe acţiuni $\dfrac{1}{1+k} \cdot \dfrac{i}{1-f}$
  - Din împrumuturi $r \cdot \dfrac{k}{1+k}$

b) $c_{YX} = \dfrac{1}{q}(a + r) \rightarrow$ costul finanţării mixte (toate profiturile se reinvestesc şi nu se plătesc dividende); finanţare din împrumut maxim şi acţiuni.

c) $c_X = \dfrac{1}{q} \cdot \left(a + \dfrac{i}{1-f}\right) \rightarrow$ costul finanţării numai din acţiuni (împrumuturile sunt zero şi se plătesc dividende).

Pentru a obţine traiectoriile finale vom studia posibilităţile de concatenare pornind de la sfârşitul traiectoriei optime care se termină cu una din traiectoriile 4 sau 5 şi vom studia posibilităţile de concatenare în aval de acestea.

Şiruri de traiectorii optimale care se finalizează cu traiectoria 5

Condiţii pe care trebuie să le satisfacă predecesoarea:

1) Pe *traiectoria* 5, $Y(t) = kX(t) \Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $Y(t) = kX(t)$,

2) Pe *traiectoria* 5, $Q(t) = Q_Y^*$ $\Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $Q(t) = Q_Y^*$,

3) Pe *traiectoria* 5, $i > (1 - f)r \Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $i > (1 - f)r$,

4) Pe *traiectoria* 5, $\mu_3(t) = 0 \Rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $\mu_3(t) = 0$,

Din tabelul de mai jos:

Traiectoria	Predecesor admisibil	Cauza
1	DA	satisface 1...4
2	NU	nu satisface 2
3	NU	nu satisface 1
4	NU	nu satisface 3

rezultă că singura predecesoare posibilă este traiectoria 1.

Predecesorii traiectoriei 1

Cerinţele predecesoarei:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{K}=0\\ \dot{Y}=0\end{array}\right\}\rightarrow \text{pe predecesoare K(t) şi Q(t) crescătoare;}$$

$Y(t) = k{\cdot}X(t)$ $\rightarrow$ la sfârşitul predecesoarei $Y(t) = k{\cdot}X(t)$

$Q(t) < Q_Y^*$ $\rightarrow$ pe traiectoria predecesoare $Q(t) < Q_Y^*$

$i > (1 - f){\cdot}r$ $\rightarrow$ $i > (1 - f){\cdot}r$

$\mu_3(t) > 0 \rightarrow \overrightarrow{\mu_3}(t) = 0$

Cum nici una dintre traiectorii nu verifică aceste condiţii rezultă că traiectoria 1 trebuie să fie cea iniţială, deci traiectoria totală care se termină cu *traiectoria* 5 va fi formată doar din *traiectoria* 5 sau din succesiunea de traiectorii *traiectoria* 1 $\rightarrow$ *traiectoria* 5, varianta concretă depinzând de condiţiile iniţiale, aşa cum rezultă din tabelul de mai jos:

Condiţii iniţiale	**Traiectoria optimă**	**Evoluţia capitalului**
$X(0) = \frac{1}{(1+k)\cdot q}Q_Y^*$	5	$K(t) = \frac{1}{q}Q(t)$
$X(0) < \frac{1}{(1+k)\cdot q}Q_Y^*$	$1 \rightarrow 5$	$K(t) = (1 + k){\cdot}X(t) \rightarrow X(t) = \frac{K(t)}{1+k} = \frac{1}{(1+k)\cdot q}Q(t)$

Şiruri de traiectorii optimale care se finalizează cu traiectoria 4

Predecesorii traiectoriei 4:

TR 4	**La sfârşitul predecesoarei**
$K(t) = X(t) \rightarrow Y(t) = 0$	$Y(t) = 0$
$Q(t) = Q_X^*$	$Q(t) = Q_X^*$
$i < (1 - f){\cdot}r$	$i < (1 - f){\cdot}r$
$\mu_3(t) = 0$	$\overrightarrow{\mu_3}(t) = 0$

Singura traiectorie care satisface simultan toate condiţiile este *traiectoria* 3.

Predecesorii traiectoriei 3

TR 3	**La sfârşitul predecesoarei**
$Q(t) > Q_{YX}^*$	$Q(t) = Q_{YX}^*$ (pe toată traiectoria predecesoare)
$i < (1 - f){\cdot}r$	$i < (1 - f){\cdot}r$
$Y(t) = 0$	$Y(t) = 0$

Singura traiectorie care satisface aceste cerinţe este traiectoria 2.

Predecesorii traiectoriei 2

TR 2	**La sfârşitul predecesoarei**
$Q(t) = Q_{YX}^{*}$	$Q(t) < Q_{YX}^{*}$
$\left.\begin{array}{l}\dot{K}=0\\ \dot{X}>0\end{array}\right\} \rightarrow \dot{Y}(t)>0$	$i < (1 - f)\cdot r$

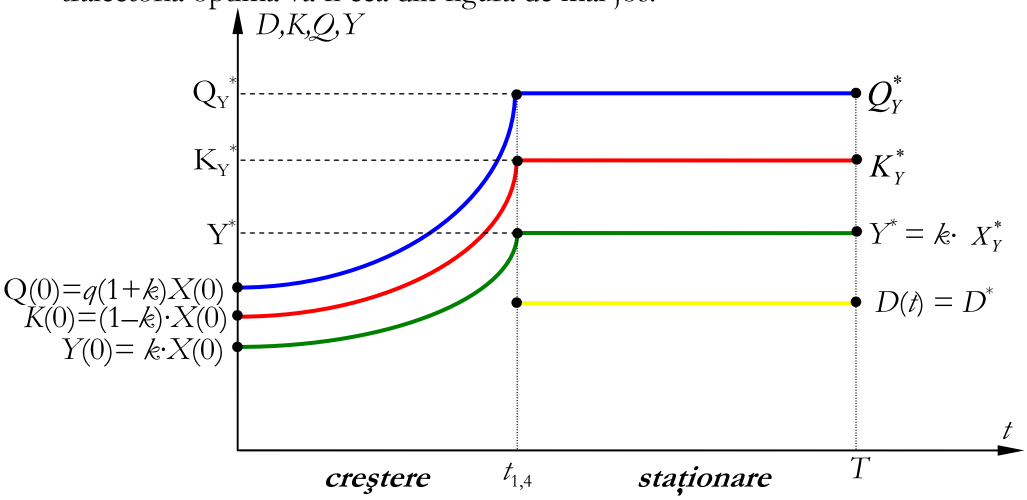
Singura traiectorie care satisface aceste cerinţe este traiectoria 1.

Cum s-a observat la cazul anterior că nici o traiectorie nu poate precede traiectoria 1 rezultă că traiectoria totală care se termină cu traiectoria 4 este posibilă doar în cazul în care acţiunile sunt ieftine: $i < (1 - f)\cdot r$ şi, în funcţie de condiţiile iniţiale, poate fi doar una din tabelul de mai jos:

Condiţiile iniţiale	**Traiectoria optimală**
$X(0) = K(0)$ şi $X(0) = (1/q)\cdot Q_{X}^{*}$	TR 4
$X(0) = K(0)$ şi $(1/q)\cdot Q_{YX}^{*} < X(0) < (1/q)\cdot Q_{X}^{*}$	TR 3 → TR 4
$K(0) = (1/q)\cdot Q_{YX}^{*}$ şi $X(0) = (1/q)\cdot Q_{YX}^{*}$	TR 2 → TR 3 → TR 4
$K(0) = (1 + k)\cdot X(0)$ şi $X(0) < \dfrac{1}{q(1+k)} Q_{YX}^{*}$	TR 1 → TR 2 → TR 3 → TR 4

Făcând un rezumat al rezultatelor obţinute privind forma traiectoriei totale optime putem reprezenta grafic evoluţia indicatorilor firmei pe traiectoria optimă, aspectul acestuia depinzând de situaţia de pe piaţa creditelor şi de condiţiile iniţiale. Astfel:

I) dacă *împrumuturile sunt ieftine la începutul traiectoriei* $(1 - f)\cdot r < i$, traiectoria optimă va fi cea din figura de mai jos:



Traiectoria optimă în cazul creditelor ieftine

Pentru ca această traiectorie să fie posibilă este necesar ca $X(0) < \frac{1}{(1+k)q}Q_Y^*$ care rezultă din faptul că pe traiectoria 1 $K(t) < K_Y^*$ şi pe traiectoria 5 $Q(0) = q\cdot(1 + k)\cdot X(0)$ care rezultă din faptul că $K(t) = (1 + k)\cdot X(t)$.

Firma porneşte de la valorile iniţiale şi se dezvoltă întrucât $\dot{K}(t) > 0$, $\dot{X}(t) > 0$, $\dot{Y}(t) > 0$, cu credite maxime, până în momentul în care $S'_Q = c_Y$, moment în care firma comută pe traiectoria staţionară.

Pe traiectoria 1 venitul marginal din vânzări este mai mare decât costul marginal în cazul finanţării din împrumut maxim.

Vom arăta că această condiţie marginală implică faptul că venitul marginal al unei acţiuni este mai mare decât costul marginal al unei acţiuni (dat de venitul minim i). Avem:

$\frac{\partial \pi}{\partial K}$ → profitul marginal al bunurilor capital;

$\left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right]$ → profitul marginal al bunurilor capital după plata datoriilor către bancă;

$(1 - f)\cdot\left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right]$ → profitul marginal al bunurilor capital după plata datoriilor către bancă şi după impozitare;

Deoarece $(1 + k)$ poate fi privit ca un multiplicator al puterii de cumpărare a capitalului social: întrucât $K(t) = (1 + k)\cdot X(t)$, rezultă că o unitate monetară investită în capitalul social (pe acţiuni) este egală cu $(1 + k)$ unităţi monetare de bunuri capital (datorită împrumutului) şi mai departe, că venitul marginal al unei acţiuni (al unei unităţi monetare investită în acţiuni) este egal cu $(1 + k)$ · venitul marginal al bunurilor capital (al unei unităţi monetare investită în bunuri capital), deci:

$(1 + k)\cdot(1 - f)\cdot\left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right]$ → venitul marginal al unei acţiuni.

Pornind de la $S'_Q > c_Y$ rezultă $(1 + k)\cdot(1 - f)\cdot\left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right] > i$, unde i este costul marginal al acţiunii.

Într-adevăr, din $S'_Q > c_Y$ şi ţinând cont că $c_Y = \frac{1}{q}\cdot\left[a + \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}\right]$ rezultă $q\cdot S'_Q - a > \frac{k}{1+k}r + \frac{1}{1+k}\cdot\frac{i}{1-f}$ şi deoarece $\frac{\partial \pi}{\partial K}$ = $q \cdot S'_Q - a$ avem succesiv: $\frac{\partial \pi}{\partial K}(1 + k) > k \cdot r + \frac{i}{1-f} \Rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial K}(1 + k) - k \cdot r > \frac{i}{1-f} \Rightarrow (1 + k)\cdot (1 - f)\cdot\left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k}r\right] > i.$

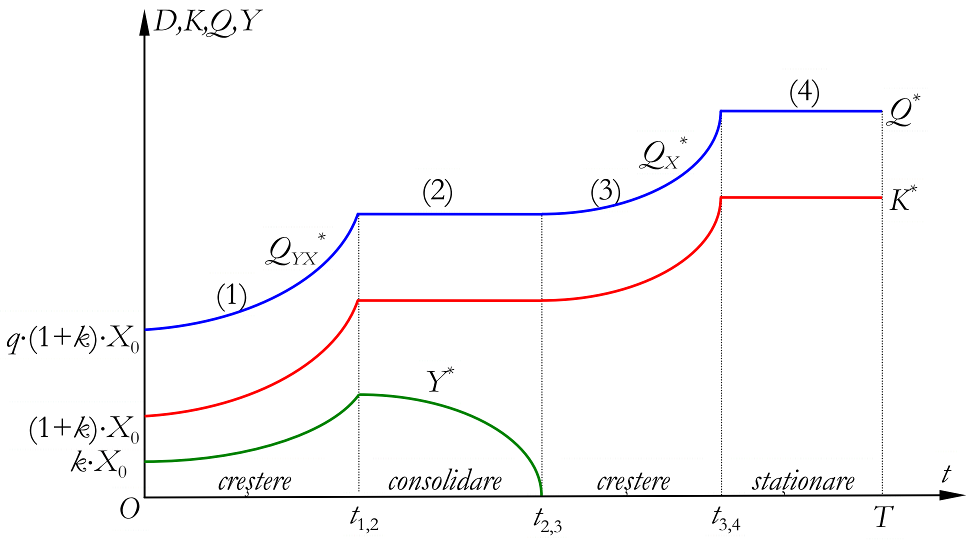
Dacă venitul marginal al acţiunii este mai mare decât costul marginal al acţiunii nu se plătesc dividende ($D(t) = 0$), acţionarii reinvestind toate câştigurile până când nivelul producţiei $Q(t)$ ajunge la nivelul Q_Y^* corespunzător profitului maxim.

Acţionarii nu vor spori capitalul peste valoarea K_Y^*, deoarece va scădea atât venitul marginal al acţiunii în raport cu costul său marginal, cât şi venitul marginal din vânzări în raport cu costul marginal al producţiei. Rezultă că $\begin{Bmatrix} \dot{X}(t) = 0 \\ \dot{K}(t) = 0 \end{Bmatrix}$ deci pe traiectoria 5 toate profiturile se împart acţionarilor:

$$D(t) = (1 - f)\cdot[\pi(K_Y^*) - r\cdot Y_Y^*] = (1 - f)\cdot[\pi(K_Y^*) - r\cdot k\cdot X_Y^*]$$

II) dacă *acţiunile sunt ieftine la începutul perioadei* $i < (1 - f)\cdot r$

Faţă de traiectoria totală care începe în condiţiile unor împrumuturi ieftine în care se păstrează aceeaşi structură de finanţare pe întreg intervalul $[0, T]$: $i > (1 - f)\cdot r$ în cazul acestei traiectorii de magistrală se va schimba structura de finanţare în timpul procesului de creştere.



Traiectoria optimă în cazul creditelor scumpe

Vom analiza mai jos evoluția indicatorilor firmei aşa cum rezultă din graficul de mai sus.

Traiectoria 1

Firma îşi demarează activitatea cu o valoare mică a capitalului social:

$$X(0) < \frac{1}{q(1+k)} Q^*_{YX}.$$

În ciuda creditelor scumpe, firma porneşte activitatea cu împrumut maxim, datorită faptului că venitul marginal din vânzări este mai mare decât costul marginal al finanțării mixte (fiecare unitate de bun capital achiziționat din împrumut va aduce un profit pozitiv) deci firma investeşte la maxim din împrumut şi câştig, rata de creştere a firmei fiind maximă.

La începutul traiectoriei 1 avem $Q(t) < Q^*_{YX}$ deci $S'_Q > c_{YX}$ şi de aici obținem succesiv:

$$S'_Q > c_{YX} = \frac{1}{q}\cdot(a + r)$$

$$\pi'_K = q\cdot S'_Q - a \rightarrow S'_Q = (\pi'_K + a)\cdot \frac{1}{q} > \frac{1}{q}\cdot(a + r) \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi'_K > r \rightarrow (1 - f)\cdot \pi'_K > (1 - f)\cdot r.$$

Deoarece $(1 - f)\cdot \pi'_K > (1 - f)\cdot r$ rezultă că profitul marginal al unei unități de bun capital este mai mare decât costul de finanțare, dacă finanțarea s-ar face numai din împrumut (deci se justifică împrumutul maxim) aşadar firma va atrage împrumut maxim pentru a-şi maximiza vânzările.

Întrucât la începutul perioadei de studiu acțiunile sunt ieftine, firma va reinvesti toate câştigurile (acționarii renunță la dividende deoarece plata lor ar însemna o pierdere pentru firmă).

Definim formula de pârghie (legătura cu efectul de levier):

$$R_E = R_T + (R_T - c)\cdot \frac{Y}{X}$$

unde:

$R_E = (1 + k)\cdot (1 - f)\cdot \left[\frac{\partial \pi}{\partial K} - \frac{k}{1+k} r\right]$ este venitul marginal al acțiunii

$R_T = (1 - f)\cdot \pi'_K$ este venitul marginal al capitalului după impozitare

$c = (1 - f)\cdot r$ este costul marginal al împrumutului

Dacă $R_T > c$ rezultă că $\frac{Y}{X}$ (ponderea împrumutului) trebuie să crească pentru ca venitul marginal al acţiunii R_E să crească.

Dacă $R_T < c$ rezultă că $\frac{Y}{X}$ trebuie să scadă pentru ca R_E să crească.

În cazul traiectoriei 1 avem $R_T > c$, deci $\frac{Y}{X}$ trebuie să crească.

Traiectoria 2

În momentul când $Q(t)$ a devenit egal cu Q^*_{YX} deci $S'_Q = c_{YX}$ acţionarii au trei posibilităţi de împărţire a câştigurilor:

- să accepte plata dividendelor;
- să le utilizeze pentru dezvoltare, caz în care firma va ajunge la un volum al producţiei cu un venit marginal mai mic decât costul marginal al împrumutului $(1 - f)\cdot r$;
- să utilizeze câştigurile pentru plata datoriilor către bănci (pentru amortizarea creditelor, economisind $(1 - f)\cdot r$ pentru fiecare unitate de capital împrumutat.

Deoarece $i < (1 - f)\cdot r$, a treia variantă este cea mai economică aşadar până la momentul $t_{2,3}$ firma îşi achită toate datoriile, finalizând *perioada de consolidare*.

Traiectoria 3

La sfârşitul traiectoriei 2, după faza de consolidare, vom avea $Q(t) < Q^*_X$ deci $S'(Q) > c_X$ şi cum:

$$c_X = \frac{1}{q}\cdot\left(a + \frac{i}{1-f}\right) \text{ şi } S' = \frac{1}{q}[\pi'_K + a]$$

rezultă succesiv:

$$\frac{1}{q}[\pi'_K + a] > \frac{1}{q}\cdot\left(a + \frac{i}{1-f}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi'_K > \frac{i}{1-f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - f)\cdot \pi'_K > i$$

deci venitul marginal al bunurilor capital este mai mare decât costul marginal al bunurilor capital finanțate prin acțiuni. Din acest motiv pe traiectoria 3 investiția netă va fi făcută numai din acțiuni (autofinanțare).

După ce și-a plătit toate datoriile firma începe o perioadă de creștere pe traiectoria 3 prin autofinanțare, până când $Q(t) = Q_X^*$, moment în care începe traiectoria staționară, pe care se plătesc dividende.

Traiectoria 4

Deoarece pe această traiectorie $(1 - f)\cdot \pi'_K = i$ rezultă că pe această traiectorie venitul marginal al capitalului este egal cu costul marginal în cazul finanțării din acțiuni deci capitalul a atins valoarea maximă (peste această valoare firma ar lucra în pierdere) și firma va începe să plătească dividende:

$$D(t) = (1 - f)\cdot\pi(K_X^*)$$