# CAPITOLUL 4

# UN MODEL DINAMIC DE CONDUCERE OPTIMALĂ A ACTIVITĂȚII FIRMEI

Modelele analizate în capitolul precedent au o serie de limitări care fac ca aplicabilitatea lor în economie să se facă doar la un nivel orientativ iar în condițiile României să fie practic inaplicabile. Dintre ipotezele foarte greu de susținut într-o economie în tranziție fac parte:

1. ipoteza constanței parametrilor modelului, prin care este surprinsă influența mediului asupra evoluției firmei.

Astfel, așa cum se vede în tabelul de mai jos, evoluția ratei dobânzii (și evident a ratei așteptate a acționarilor) și a cotei de impozitare a profitului au avut fluctuații atât de mari în perioada 1994-1998 în România încât ipoteza că acestea sunt constante va duce evident la rezultate puternic deviate de la evoluția reală.

| **an** | **1990** | **1991** | **1992** | **1993** | **1994** | **1995** | **1996** | **1997** | **1998** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **r**(%) | 3.8 | 23.4 | 43.6 | 58.9 | 91.4 | 48.6 | 55.8 | 63.7 | 51.1 |
| ***f***(%) | variabil, funcție de profit* | | | | 38 | 38 | 38 | 38 | 38 |

Cea mai naturală concluzie în acest caz este că, pentru o economie în tranziție, cei trei parametrii trebuie considerați ca fiind variabili în timp.

2. faptul că 2 sau 3 indicatori pot descrie evoluția unei firme sau starea acesteia la un moment dat.

În acest caz singura soluție este să identificăm (pe baza evoluției conturilor sau a balanței contabile) care sunt indicatorii care influențează semnificativ evoluția firmei și să ținem cont de toți aceștia în analiza firmei.

3. ipoteza că volumul producției depinde doar de mărimea capitalului (chiar liniar în modelul van Hilten!), fără ca structura acestuia să aibă influențe semnificative asupra evoluției firmei. Rezolvarea este aceeași ca și la ipoteza 2.

4. ipoteza că indicatorii firmei evoluează continuu.

Această ipoteză atrage acceptarea unor ipoteze asupra modelului, cerute de instrumentarul matematic disponibil, care pot denatura foarte mult situația reală existentă.

Cea mai la îndemână soluție în acest caz este să considerăm că evoluția este discretă, caz în care putem renunța la toate ipotezele de regularitate impuse funcțiilor și variabilelor din model și (și mai important) putem creea modele mult mai complicate (și deci mult mai apropiate de realitate) având la dispoziție metode algoritmice mult mai versatile disponibile pentru acest caz.

Pornind de la considerentele de mai sus modelul care va fi expus în continuare are ca scop să:

* Vezi anexa II

- îmbunătăţească performanţele modelelor expuse în capitolul precedent, prin:
    - detalierea activităţii firmei apelând la mai mulţi indicatori pentru descrierea acesteia
    - trecerea de la modelarea continuă la cea discretă
- păstreze un echilibru între:
    - nivelul de complexitate cerut de nivelul relevanţei rezultatelor
    - nivelul de simplitate cerut de instrumentarul matematic existent
- constituie o simbioză între metodele matematice clasice de analiză şi utilizarea calculatorului, în acest scop autorul scriind o colecţie de softuri care să constituie o metodă rapidă de a obţine o soluţie suficient de apropiată de soluţia optimă, atât în cazul modelului propus în continuare cât şi pentru modelele din capitolul anterior, pentru a putea face o comparaţie între acestea.

## Ipotezele modelului

1. Firma are o producţie omogenă iar **volumul producţiei** depinde liniar de capitalul fix utilizat şi de capitalul circulant consumat în procesul de producţie:

$$Q(t) = a \cdot K_F(t) + \beta \cdot K_C(t)$$

unde:
- $K_F(t)$ = bunurile capital fix exprimate valoric;
- $K_C(t)$ = bunurile capital circulant exprimate valoric;
- $a$ = productivitatea medie a capitalului fix, $a = \frac{\partial Q}{\partial K_F}(t)$ = ct.;
- $\beta$ = productivitatea medie a capitalului circulant, $\beta = \frac{\partial Q}{\partial K_C}(t)$ = ct.;

*Observaţie*: Dacă $a = \beta$ obţinem funcţia de producţie utilizată în modelul Van Hill în care am avea: $q = a = \beta$;

Ca şi în modelul Van Hill vom presupune că toată producţia este scoasă imediat pe piaţă astfel încât stocul de produse finite este zero, situaţie realistă în cazul unei firme de dimensiuni mici sau mijlocii care nu deţine monopolul pe piaţa bunului vândut şi nu vinde produse de valoare foarte mare.

2. **Încasările** obţinute din vânzarea bunurilor produse vor fi egale cu:

$$V(t) = p \cdot Q(t)$$

cu $p$ = ct., dacă firma îşi comercializează produsele pe o piaţă cu concurenţă perfectă sau:

$$V(t) = p(Q(t)) \cdot Q(t)$$

pe o piaţă cu concurenţă imperfectă.

De asemenea vom presupune că funcţia de vânzări este pozitivă, strict concavă şi satisface legea veniturilor descrescătoare la scala de fabricaţie:

$p'(Q(t)) < 0$ – în cazul competiţiei imperfecte preţul de vânzare scade odată cu creşterea producţiei care trebuie vândută;

$V'(Q(t)) > 0$ – rezultă din legea funcţiei inverse a producţiei descrescătoare;

$V''(Q(t)) < 0$ – legea randamentelor la scară descrescătoare;

$V(Q(t)) > 0 \Leftrightarrow Q(t) > 0$ – preţul de vânzare este pozitiv;

3. **Capitalul firmei** este format din capitalul propriu ($K_F(t) + K_C(t)$) şi din capital împrumutat $Y(t)$:

$$K(t) = K_F(t) + K_C(t) + Y(t)$$

Vom presupune cunoscute valorile celor trei componente la începutul perioadei analizate: $K_F(0) = K_F^0$, $K_C(0) = K_C^0$, $Y(0) = Y^0$.

4. **Deprecierea capitalului** este dată de amortizarea capitalului fix, care este presupusă proporţională cu valoarea capitalului fix:

$$A(t) = a{\cdot}K_F(t)$$

unde $a$ este rata de amortizare şi de consumul de capital circulant necesar producţiei.

5. **Venitul net** din vânzări(profitul brut) este ceea ce rămâne din venitul obţinut din vânzări după cheltuielile cu deprecierea capitalului:

$$\Pi(t) = V(t) - a{\cdot}K_F(t) - K_C(t) = \text{p}{\cdot}(\alpha{\cdot}K_F(t) + \beta{\cdot}K_C(t)) - a{\cdot}K_F(t) - K_C(t)$$

6. **Profitul net** este partea din profit care rămâne după plata dobânzilor la credite şi impozitului pe profit:

$$E(t) = (1 - f){\cdot}[\text{p}{\cdot}(\alpha{\cdot}K_F(t) + \beta{\cdot}K_C(t)) - a{\cdot}K_F(t) - K_C(t) - r{\cdot}Y(t)]$$

7. Profitul net este utilizat fie pentru consum final (dividende, profit retras de proprietari etc.) fie pentru creşterea capitalului propriu, valoarea creşterii fiind egală cu partea din profitul net care nu este destinat consumului final:

$$\dot{K}_F(t) + \dot{K}_C(t) = E(t) - D(t) \Leftrightarrow$$

$$\dot{K}_F(t) + \dot{K}_C(t) = (1 - f){\cdot}[\text{p}{\cdot}(\alpha{\cdot}K_F(t) + \beta{\cdot}K_C(t)) - a{\cdot}K_F(t) - K_C(t) - r{\cdot}Y(t)] - D(t)$$

unde:

- $f$ = rata de impozitare a profitului;
- $r$ = rata dobânzii pe piaţa creditelor;
- $r{\cdot}Y(t)$ = dobânda la împrumuturile contractate;
- $D(t)$ = consumul final (dividende, profit retras etc.)

8. **Creşterea capitalului fix** se realizează pe baza investiţiilor în capital fix care depăşesc valoarea depreciată a capitalului:

$$\dot{K}_F(t) = I_F(t) - a{\cdot}K_F(t)$$

unde:

- $I_F(t)$ = investiţia brută în capital fix;
- $a{\cdot}K_F(t)$ = deprecierea capitalului fix.

9. **Creşterea împrumutului** este datorată volumului creditelor contractate care depăşesc volumul ratelor plătite la creditele contractate anterior:

$$\dot{Y}(t) = F(t) - b \cdot Y(t)$$

unde:

- $F(t)$ = volumul împrumuturilor efectuate la momentul $t$;
- $b$ = cota de rambursare anuală a datoriilor (amortismentul);

*Observaţie*: Vom considera că *ipoteza Ludwig* ($a = b$) *este îndeplinită doar cu totul întâmplător*.

10. Se consideră că o structură viabilă a capitalului firmei este îndeplinită doar dacă **volumul creditelor** (capitalul împrumutat) nu depăşeşte o anumită pondere faţă de capitalul propriu:

$$0 \leq Y(t) \leq k \cdot (K_F(t) + K_C(t))$$

unde:

- $k$ = ponderea maximă a împrumuturilor

11. Firma se dezvoltă numai dacă venitul net din vânzări este pozitiv:

$$\Pi(t) = V(t) - a \cdot K_F(t) - K_C(t) \geq 0$$

12. Piaţa financiară şi piaţa monetară sunt considerate pieţe distincte, preţurile celor două pieţe putând fi doar accidental (şi pe termen scurt) egale, astfel încât putem considera că:

$$i \neq (1 - f) \cdot r$$

unde:

- $i$ = preţul pe piaţa financiară = randamentul unei unităţi monetare investite în firmă;
- $(1 - f) \cdot r$ = costul unitar al creditului (pentru o unitate împrumutată firma plăteşte atât dobânda la credit $r$ dar nu mai plătesc impozitul $f \cdot r$ pe care l-ar plăti la stat dacă ar utiliza pentru investiţii profitul propriu în loc de împrumut.

13. **Volumul profitului destinat consumului final** se consideră a fi pozitiv (creşterea capitalului propriu se bazează doar pe profitul obţinut de firmă) şi mai mic decât o valoare maximă considerată normală chiar în condiţiile unui profit foarte mare:

$$0 \leq D(t) \leq D_{max}$$

14. **Volumul investițiilor în capitalul fix** trebuie să se încadreze între limitele extreme $I_{min}$ şi $I_{max}$:

$$I_{min} \leq I_F(t) \leq I_{max}$$

unde: $I_{min} < 0 < I_{max}$.

15. Pentru a primi împrumuturi firma trebuie să îndeplinească anumite **criterii de creditare**, legate de volumul împrumutului posibil de contractat:

$$0 \leq F(t) \leq \gamma \cdot I_F(t)$$

unde:

- $\gamma$ = cota maximă a creditelor pentru investiții (în funcție de facilitățile sistemului bancar).

16. Ţelul firmei este să maximizeze câştigul adus de firmă proprietarilor calculat ca profitul total retras de proprietari plus valoarea reală finală a capitalului propriu al firmei (sau valoarea obținută prin vânzarea acestuia exprimat în preţuri curente):

$$\int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT}[K_F(T) + K_C(T)]$$

în cazul continuu sau:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{D^t}{(1+i)^t} + \frac{K_F^T + K_C^T}{(1+i)^T}$$

în cazul discret unde:

- $T$ = durata normală de viaţă a firmei sau orizontul de timp viitor analizat.

Modelul va fi analizat în **4 variante**:

a) cazul continuu în condiții de concurență perfectă;
b) cazul continuu în condiții de concurență imperfectă;
c) cazul discret în condiții de concurență perfectă;
d) cazul discret în condiții de concurență imperfectă;

De asemenea, în final vor fi luate în considerare şi alte variante posibile de dezvoltare a modelului. Cele patru variante de mai sus ale modelului au forma matematică:

### a) Cazul continuu în condiţii de concurenţă perfectă

$$\max_{I_F, F, D} \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT}[K_F(T) + K_C(T)]$$

$\dot{K}_F(t) + \dot{K}_C(t) = (1 - f)\cdot[p\cdot(\alpha\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t) - r\cdot Y(t)] - D(t)$

$\dot{K}_F(t) = I_F(t) - a\cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = F(t) - b\cdot Y(t)$

$I_{min} \leq I_F(t) \leq I_{max}$ ; $I_{min} < 0 < I_{max}$.

$0 \leq Y(t) \leq k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$

$0 \leq D(t) \leq D_{max}$

$0 \leq F(t) \leq \gamma\cdot I_F(t)$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$

$\alpha, \beta, p > 0$

Deoarece din $\gamma\cdot I_F(t) \geq F(t) \geq 0$ rezultă evident $I_{min} \leq I_F(t)$ această condiţie nu mai este efectivă şi va fi eliminată din sistem, prima şi a patra condiţie putând fi scrise împreună prin:

$$0 \leq F(t) \leq \gamma\cdot I_F(t) \leq \gamma\cdot I_{max}$$

Prin înlocuirea variaţiei capitalului fix în prima ecuaţie de stare a sistemului obţinem:

$$I_F(t) - a\cdot K_F(t) + \dot{K}_C(t) = (1 - f)\cdot[p\cdot(\alpha\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t) - r\cdot Y(t)] - D(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{K}_C(t) = (1 - f)\cdot[p\cdot(\alpha\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t) - r\cdot Y(t)] - D(t) - I_F(t) + a\cdot K_F(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{K}_C(t) = [(1 - f)\cdot p\cdot \alpha - (1 - f)\cdot a + a]\cdot K_F + [(1 - f)\cdot p\cdot \beta - (1 - f)]\cdot K_C - (1 - f)\cdot r\,Y(t) - D(t) - I_F(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{K}_C(t) = [(1 - f)\cdot p\cdot \alpha + f a]\cdot K_F + (1 - f)\cdot(p\cdot \beta - 1)\cdot K_C - (1 - f)\cdot r\,Y(t) - D(t) - I_F(t)$$

Sistemul de ecuaţii de stare ale sistemului devine:

$\dot{K}_C(t)$ = [(1 – $f$)·$p$·$a$ + $fa$]·$K_F(t)$ + (1 – $f$)·($p$·$\beta$ - 1)·$K_C(t)$ - (1 – $f$)·$r$·$Y(t)$ - $D(t)$ - $I_F(t)$

$\dot{K}_F(t)$ = $I_F(t)$ - $a$·$K_F(t)$

$\dot{Y}(t)$ = $F(t)$ - $b$·$Y(t)$

acesta fiind un sistem de ecuaţii diferenţiale cu trei ecuaţii şi trei necunoscute cu coeficienţi constanţi, comenzile fiind $I_F(t)$, $F(t)$ şi $D(t)$. Notând cu X($t$) vectorul format cu cele trei variabile de stare $K_F(t)$, $K_C(t)$ şi $Y(t)$ şi cu U($t$) vectorul variabilelor de comanda $I_F(t)$, $F(t)$ şi $D(t)$ putem scrie sistemul de ecuaţii de stare sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} \dot{K}_C(t) \\ \dot{K}_F(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-f)\cdot(p\cdot\beta-1) & (1-f)\cdot p\cdot\alpha+f\cdot a & -(1-f)\cdot r \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_C(t) \\ K_F(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_F(t) \\ F(t) \\ D(t) \end{pmatrix}$$

sau:

$$\dot{X}(t) = A\cdot X(t) + B\cdot U(t)$$

unde $A$ şi $B$ sunt matricele sistemului:

$$A = \begin{pmatrix} (1-f)\cdot p\cdot\alpha+f\cdot a & (1-f)\cdot(p\cdot\beta-1) & -(1-f)\cdot r \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece det($A$) = $a$·$b$·(1 - $f$)·$[(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)]$ ≠ 0 şi det($B$) = -1 ≠ 0 sistemul este controlabil şi observabil, urmând să găsim acele comenzi care duc la maximizarea valorii firmei pe intervalul de timp analizat.

Pentru rezolvare, vom porni de la ultima formă a sistemului:

$$\max_{I_F,F,D} \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT}[K_F(T) + K_C(T)]$$

$\dot{K}_C(t)$ = [(1 – $f$)·$p$·$a$ + $fa$]·$K_F(t)$ + (1 – $f$)·($p$·$\beta$ - 1)·$K_C(t)$ - (1 – $f$)·$r$·$Y(t)$ - $D(t)$ - $I_F(t)$

$\dot{K}_F(t)$ = $I_F(t)$ - $a$·$K_F(t)$

$\dot{Y}(t)$ = $F(t)$ - $b$·$Y(t)$

$F(t) \leq \gamma \cdot I_F(t) \leq \gamma \cdot I_{max}$
$0 \leq Y(t) \leq k \cdot (K_F(t) + K_C(t))$
$0 \leq D(t) \leq D_{max}$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$
$\alpha, \beta, p > 0$

Deoarece avem de rezolvat o problemă de control optimal vom aplica pentru rezolvare **principiul lui Pontreaghin**, obţinând succesiv:

a) **Hamiltonianul** problemei:

$$H(K_F(t),K_C(t),Y(t),I_F(t),F(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)] =$$
$$= e^{-it}\cdot D(t) + \lambda_1(t)\cdot\{[(1-f)\cdot p\cdot\alpha + f\alpha]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\, Y(t) - D(t) - I_F(t)\} + \lambda_2(t)\cdot[I_F(t) - a\cdot K_F(t)] + \lambda_2(t)\cdot[F(t) - b\cdot Y(t)]$$

Deoarece în expresia hamiltonianului apare factorul de actualizare $e^{-it}$ vom face schimbarea de variabilă:

$$\psi_j(t) = e^{it}\cdot\lambda_j(t)\ j = 1,2,3$$

obţinând noile variabile adjuncte $\psi_j(t)$ şi hamiltonianul modificat:

$$\tilde{H}\,(K_F(t),K_C(t),Y(t),I_F(t),F(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)) =$$
$$= D(t) + \psi_1(t)\cdot\{[(1-f)\cdot p\cdot\alpha + f\alpha]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\, Y(t) - D(t) - I_F(t)\} + \psi_2(t)\cdot[I_F(t) - a\cdot K_F(t)] + \psi_3(t)\cdot[F(t) - b\cdot Y(t)]$$

unde $\tilde{H} = e^{it}\cdot H$.

Deoarece sistemul conţine şi restricţii momentane asupra variabilelor de stare şi de control vom construi lagrangeanul asociat problemei:

$$L(K_F(t),K_C(t),Y(t),I_F(t),F(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t),\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),\mu_4(t),\mu_5(t),\mu_6(t),\mu_7(t)) =$$
$$= \tilde{H} + \mu_1(t)\cdot[I_{max} - I_F(t)] + \mu_2(t)\cdot[\gamma\cdot I_F(t) - F(t)] + \mu_3(t)\cdot[k\cdot(K_F(t) + K_C(t)) - Y(t)] + \mu_4(t)\cdot Y(t) + \mu_5(t)\cdot[D_{max} - D(t)] + \mu_6(t)\cdot D(t) + \mu_7(t)\cdot F(t)$$

Sistemul de condiţii Kuhn-Tucker asociat problemei de maximizare a hamiltonianului pe domeniul dat de restricţiile momentane ale sistemului în variabilele de control va fi:

$$\frac{\partial L}{\partial I_F} = 0 \Leftrightarrow -\psi_1 + \psi_2 - \mu_1 + \gamma\cdot\mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 0 \Leftrightarrow \psi_3 - \mu_2 + \mu_7 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial D} = 0 \Leftrightarrow 1 - \psi_1 - \mu_5 + \mu_6 = 0$$

$\mu_1 \cdot [I_{max} - I_F] = 0$
$\mu_2 \cdot [\gamma \cdot I_F - F] = 0$
$\mu_3 \cdot [k \cdot (K_F + K_C) - Y] = 0$
$\mu_4 \cdot Y = 0$
$\mu_5 \cdot [D_{max} - D] = 0$
$\mu_6 \cdot D = 0$
$\mu_7 \cdot F(t) = 0$

$\mu_j \geq 0$, $I_F$, $F$, $D \geq 0$

Avem de rezolvat un sistem algebric de 10 ecuații cu 10 necunoscute ($I_F$, $F$, $D$, $\mu_j$ $j$=1..7) care implică discuția a $2^7 = 128$ variante, în funcție valorile nule sau nu ale multiplicatorilor $\mu_j$.

Din acest sistem vom scoate variabilele de comandă $I_F$, $F$, $D$ în funcție de variabilele de stare $K_F$, $K_C$, $Y$ și variabilele adjuncte $\psi_j$, $j$ = 1,2,3:

$\overline{I_F}(t) = f_1(K_F, K_C, Y, \psi_j, j = 1,2,3)$
$\overline{F}(t) = f_2(K_F, K_C, Y, \psi_j, j = 1,2,3)$
$\overline{D}(t) = f_3(K_F, K_C, Y, \psi_j, j = 1,2,3)$

după care vom rezolva **sistemul canonic** asociat problemei:

$\dot{K}_C(t) = [(1 - f) \cdot p \cdot a + f \cdot a] \cdot K_F(t) + (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - \overline{D}(t) - \overline{I_F}(t)$

$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a \cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = \overline{F}(t) - b \cdot Y(t)$

$\dot{\psi}_1(t) = i \cdot \psi_1(t) - \frac{\partial \widetilde{H}(K_F, K_C, Y, \overline{I_F}, \overline{F}, \overline{D}, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial K_C}(t) = i \cdot \psi_1(t) - \psi_1(t) \cdot (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1)$

$\dot{\psi}_2(t) = i \cdot \psi_2(t) - \frac{\partial \widetilde{H}(K_F, K_C, Y, \overline{I_F}, \overline{F}, \overline{D}, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial K_F}(t) = (i + a) \cdot \psi_2(t) - \psi_1(t) \cdot [(1 - f) \cdot p \cdot a + f \cdot a]$

$\dot{\psi}_3(t) = i \cdot \psi_3(t) - \frac{\partial \widetilde{H}(K_F, K_C, Y, \overline{I_F}, \overline{F}, \overline{D}, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial Y}(t) = (i + b) \cdot \psi_3(t) + \psi_1(t) \cdot (1 - f) \cdot r$

cu ***condițiile inițiale***:

$K_C(0) = K_C^0$,

$K_F(0) = K_F^0$,

$Y(0) = Y^0$

şi ***condițiile finale*** (de transversalitate):

$$\psi_1(T) = \frac{\partial(K_F + K_C)}{\partial K_C}(T) = 1$$

$$\psi_2(T) = \frac{\partial(K_F + K_C)}{\partial K_F}(T) = 1$$

$$\psi_3(T) = \frac{\partial(K_F + K_C)}{\partial Y}(T) = 0$$

care se reduce la:

$$\psi_1(T) = 1,\ \psi_2(T) = 1,\ \psi_3(T) = 0$$

Revenind la sistemul Kuhn-Tucker asociat problemei de maximizare a hamiltonianului pe mulțimea comenzilor admisibile, dintre cele 128 de cazuri o parte pot fi eliminate din start ca neducând la o soluție admisibilă. De exemplu, multiplicatorii $\mu_3$ şi $\mu_4$ nu pot fi simultan nenuli (ar rezulta ca firma are capital nul) şi nici multiplicatorii $\mu_5$ şi $\mu_6$ (ar rezulta ca dividendele maxime sunt zero). De asemenea, nu pot fi simultan diferiți de 0 indicatorii $\mu_1$, $\mu_2$ şi $\mu_7$, deoarece ar rezulta că investiția maximă posibilă este 0, astfel ca rămân de discutat doar 63 cazuri:

| | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $\mu_4$ | $\mu_5$ | $\mu_6$ | $\mu_7$ | *Soluția* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F$, $F$, $D$ oarecare |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = 0$, $I_F$, $F$ oarecare |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F$ oarecare |
| 4 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F$, $F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = 0$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 7 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F$, $F$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 8 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = 0$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 9 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 10 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$ |
| 12 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$ |
| 13 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 14 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 15 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 16 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 17 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 18 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 19 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D,F$ oarecare |
| 20 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$ , $D = 0$, $F$ oarecare |
| 21 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$ , $D = D_{max}$, $F$ oarecare |
| 22 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F$ oarecare |
| 23 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 24 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 25 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$, $D,F$ oarecare |
| 26 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 27 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 28 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare |
| 29 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$ |
| 30 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$ |
| 31 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 32 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 33 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 34 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 35 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 36 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 37 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $I_F$, $F = 0$, $D$ oarecare |
| 38 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2$, $D = 0$, $I_F$, $F = 0$ |
| 39 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F = 0$ |
| 40 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $F = 0$, $I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 41 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 42 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 43 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $I_F$, $F = 0$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 44 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 45 | 0 | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = \psi_2$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 46 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare |
| 47 | 0 | $\neq 0$ | 0 | 0 | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 48 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$ |
| 49 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 50 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 51 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 52 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 53 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 54 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 55 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $D$ oarecare, $F = 0$ |
| 56 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$ , $D = 0$, $F = 0$ |
| 57 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$ , $D = D_{max}$, $F = 0$ |
| 58 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$ |
| 59 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 60 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 61 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$, $D,F = 0$ |
| 62 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 63 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |

În continuare va fi analizat efectul rezultatului din fiecare caz asupra sistemului canonic asociat problemei de control optimal:

$$\dot{K}_C(t) = [(1 - f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F(t) + (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1 - f) \cdot r Y(t) - \overline{D}(t) - \overline{I_F}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a \cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \overline{F}(t) - b \cdot Y(t)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = i \cdot \psi_1(t) - \psi_1(t) \cdot (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = (i + a) \cdot \psi_2(t) - \psi_1(t) \cdot [(1 - f) \cdot p \cdot a + f a]$$

$$\dot{\psi}_3(t) = (i + b) \cdot \psi_3(t) + \psi_1(t) \cdot (1 - f) \cdot r$$

$$K_C(0) = K_C^0,\ K_F(0) = K_F^0,\ Y(0) = Y^0,\ \psi_1(T) = 1,\ \psi_2(T) = 1,\ \psi_3(T) = 0$$

Deşi cele 6 ecuaţii se împart evident în două sisteme distincte, unul format din primele trei ecuaţii şi conţinând ca variabile doar variabilele de stare şi al doilea format din ultimele trei şi conţinând doar variabilele adjuncte, pentru rezultat fiind important evident doar primul, vom păstra totuşi şi ultimele ecuaţii deoarece sunt necesare în analiza soluţiei din fiecare caz.

Vom analiza mai întâi cazurile în care una sau mai multe din variabilele adjuncte ar fi constante.

Astfel, dacă $\psi_1(t)$ = const. = 1 din prima ecuaţie a variabilelor adjuncte rezultă că:

$$(1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) = i$$

situaţie care este îndeplinită doar în cazuri cu totul particulare şi va fi eliminată din analiză.

De asemenea, situaţia în care $\psi_1(t) = \psi_2(t) \neq 0$ conduce la:

$$\dot{\psi}_1(t) = i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot(1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1)$$
$$\dot{\psi}_1(t) = (i + a)\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot[(1 - f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]$$

şi egalând termenii din stânga obţinem succesiv:

$$i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot(1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) = (i + a)\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot[(1 - f)\cdot p\cdot a + f\cdot a] \Leftrightarrow$$
$$i - (1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) = (i + a) - [(1 - f)\cdot p\cdot a + f\cdot a] \Leftrightarrow$$
$$(1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) = (1 - f)\cdot(p\cdot a - \mathrm{a}) \Leftrightarrow$$
$$p\cdot\beta - 1 = p\cdot a - \mathrm{a} \Leftrightarrow$$
$$p = \frac{1 - a}{\beta - \alpha}$$

Soluţia este admisibilă doar dacă $\beta > \alpha$ (productivitatea capitalului circulant este mai mare decât productivitatea capitalului fix) şi este de asemenea un caz cu totul întâmplător, putând fi eliminate din analizele ulterioare.

Situaţia $\psi_3(t) = 0$ atrage după sine succesiv $\psi_2(t) = 0$ şi $\psi_1(t) = 0$ care este în contradicţie cu condiţiile finale $\psi_1(T) = 1$, $\psi_2(T) = 1$.

Variantele 11 şi 12 conduc la sistemul de condiţii:

$$- \psi_1 + \psi_2 + \gamma\cdot\mu_2 = 0$$
$$\psi_3 - \mu_2 = 0$$
$$1 - \psi_1 + \mu_6 = 0$$

la varianta 11 şi:

$$- \psi_1 + \psi_2 + \gamma\cdot\mu_2 = 0$$
$$\psi_3 - \mu_2 = 0$$
$$1 - \psi_1 - \mu_5 = 0$$

la varianta 12.

În ambele variante, eliminând $\mu_2$ din primele două ecuaţii obţinem:

$$- \psi_1 + \psi_2 + \gamma\cdot\psi_3 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 = \psi_2 + \gamma\cdot\psi_3 \Rightarrow \dot{\psi}_1(\mathrm{t}) = \dot{\psi}_2(\mathrm{t}) + \gamma\cdot\dot{\psi}_3(\mathrm{t})$$

Înlocuind derivatele variabilelor adjuncte din sistemul canonic în relaţia de mai sus obţinem:

$$i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot(1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) = (i + a)\cdot\psi_2(t) - \psi_1(t)\cdot[(1 - f)\cdot p\cdot a + f\cdot a] + \gamma\cdot[(i + b)\cdot\psi_3(t) + \psi_1(t)\cdot(1 - f)\cdot r] \Leftrightarrow$$

$$[i - (1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) + (1 - f)\cdot p\cdot a + f a - \gamma\cdot(1 - f)\cdot r]\cdot\psi_1 = (i + a)\cdot\psi_2 + \gamma\cdot(i + b)\cdot\psi_3$$

Combinând această relaţie cu cea rezultată din sistemul de condiţii Kuhn-Tucker obţinem relaţiile:

$$a = b$$
$$p\cdot(a - \beta) = a + \gamma r - 1$$

care reprezintă de asemenea o situaţie total particulară şi vor fi eliminate din analiză.

Din cele de mai sus rezultă că este suficient să analizăm doar sistemul format din primele ecuaţii ale sistemului canonic (care va fi numit în continuare ***sistemul canonic redus***) pentru variantele:

| | ***Soluţia*** |
|---|---|
| **1** | $F = \gamma\cdot I_F,\ D = 0,\ Y = 0$ |
| **2** | $F = \gamma\cdot I_F,\ D = D_{max},\ Y = 0$ |
| **3** | $F = \gamma\cdot I_F,\ D = 0,\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **4** | $F = \gamma\cdot I_F,\ D = D_{max},\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **5** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma\cdot I_F,\ D = 0$ |
| **6** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma\cdot I_F,\ D = D_{max}$ |
| **7** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma\cdot I_F,\ D = 0,\ Y = 0$ |
| **8** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma\cdot I_F,\ D = D_{max},\ Y = 0$ |
| **9** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma\cdot I_F,\ D = 0,\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **10** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma\cdot I_F,\ D = D_{max},\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **11** | $F = \gamma\cdot I_F = 0,\ D = 0$ |
| **12** | $F = \gamma\cdot I_F = 0,\ D = D_{max}$ |
| **13** | $F = \gamma\cdot I_F = 0,\ D = 0,\ Y = 0$ |
| **14** | $F = \gamma\cdot I_F = 0,\ D = D_{max},\ Y = 0$ |
| **15** | $F = \gamma\cdot I_F = 0,\ D = 0,\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **16** | $F = \gamma\cdot I_F = 0,\ D = D_{max},\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **17** | $I_F = I_{max},\ D = 0,\ F = 0$ |
| **18** | $I_F = I_{max},\ D = D_{max},\ F = 0$ |
| **19** | $I_F = I_{max},\ D = 0,\ F = 0,\ Y = 0$ |
| **20** | $I_F = I_{max},\ D = D_{max},\ F = 0,\ Y = 0$ |
| **21** | $I_F = I_{max},\ D = 0,\ F = 0,\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| **22** | $I_F = I_{max},\ D = D_{max},\ F = 0,\ Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |

## Analiza traiectoriilor

**Traiectoria 1** ($F = \gamma\cdot I_F,\ D = 0,\ Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t)$

$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t) \Rightarrow K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$

$\overline{I_F(t)} = 0$

Din a treia ecuație rezultă că firma nu are datorii ($Y = 0$), nu se fac investiții ($I_F(t) = 0$), nu se plătesc dividende (nu se retrag bani din firmă) ($D = 0$) și are loc o restructurare a activității firmei prin scăderea puternică a capitalului fix al firmei:

$$K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} \to 0$$

în favoarea unei creșteri a capitalului circulant:

$$K_C(t) = \{K_C^0 + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F^0\cdot(1 + e^{-a\cdot t})\}e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t} \to \infty.$$

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

**Traiectoria 2** ($F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - D_{max}$

$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t) \Rightarrow K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$

$\overline{I_F(t)} = 0$

Din a treia ecuație rezultă că firma nu are datorii ($Y = 0$), nu se fac investiții ($I_F(t) = 0$), se plătesc dividende la maxim (se retrag bani din firmă la maxim) ($D = D_{max}$) și are loc o restructurare a activității firmei prin scăderea puternică a capitalului fix al firmei:

$$K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} \to 0$$

în favoarea unei creșteri accelerate a capitalului circulant:

$$K_C(t) = \{K_C^0 + [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F^0\cdot(1 + e^{-a\cdot t}) - t\cdot D_{max}\}e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t} \to \infty.$$

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i}\cdot(1 - e^{-iT})\cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)]\cdot e^{-iT}$$

**Traiectoria 3** ($F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot k\cdot(K_F + K_C) - I_F(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = I_F(t) - a\cdot K_F(t)$$

$$k\cdot(\dot{K}_F(t) + \dot{K}_C(t)) = \gamma\cdot I_F(t) - b\cdot k\cdot(K_F + K_C)$$

În acest caz sistemul s-a redus la trei ecuaţii cu trei necunoscute $\{K_F(t), K_C(t), I_F(t)\}$ din care doar $K_F(t)$ şi $K_C(t)$ apar derivate în ecuaţii. Înlocuind derivatele capitalului fix şi capitalului circulant din primele două ecuaţii în a treia ecuaţie obţinem ecuaţia:

$$k\cdot\{[(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t)) - a\cdot K_F(t)\} = \gamma\cdot I_F(t) - b\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$$

din care vom afla valoarea investiţiei făcute de firmă $I_F(t)$ în funcţie de valorile capitalului fix şi circulant:

$$I_F(t) = \{k\cdot\{[(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t)) - a\cdot K_F(t)\} + b\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t))\} / \gamma$$

După înlocuirea expresiei investiţiei $I_F(t)$ obţinută mai sus în primele două ecuaţii se obţine un sistem de două ecuaţii cu coeficienţi constanţi:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)(p\beta - 1 - rk)(1-\frac{k}{\gamma}) - \frac{kb}{\gamma}]\cdot K_C(t) + [(1-f)(pa - rk - a)(1-\frac{k}{\gamma}) - k\frac{b}{\gamma} + a]\cdot K_F(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = k\frac{(1-f)(-rk + p\beta - 1) + b}{\gamma}\cdot K_C(t) + [k\frac{(1-f)(p\alpha - a - rk) + b}{\gamma} - a]\cdot K_F(t)$$

şi condiţiile iniţiale $K_C(0) = K_C^0$, $K_F(0) = K_F^0$ din care vom scoate evoluţiile capitalului fix $K_F(t)$ şi a celui circulant $K_C(t)$, apoi valoarea investiţiei $I_F(t)$ şi a împrumutului $F(t)$.

Evoluţia capitalului va depinde evident de valorile proprii ale matricei sistemului de mai sus $v_1$ şi $v_2$ şi valoarea firmei va fi dată doar de valoarea finală actualizată a capitalului total.

În acest caz firma face împrumuturi la maxim $F = \gamma\cdot I_F$, nivelul capitalului împrumutat este maxim $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ şi nu plăteşte dividende.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = k\cdot(K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

**Traiectoria 4** ($F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Rezolvarea în acest caz este asemănătoare cu cea de la traiectoria 3, singura diferenţă constând în faptul că în sistemul din care vor fi aflate evoluțiile capitalului vom avea şi $D = D_{max}$.

În acest caz firma face împrumuturi la maxim $F = \gamma \cdot I_F$, nivelul capitalului împrumutat este maxim $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ şi plăteşte dividende la maxim.

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = k \cdot (K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i} \cdot (1 - e^{-iT}) \cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)] \cdot e^{-iT}$$

**Traiectoria 5** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_{max}$, $D = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1 - f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F(t) + (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1 - f) \cdot r Y(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t)$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Din a treia ecuație (liniară în $Y(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a datoriei firmei $Y^0$, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$, a ratei de înapoiere a debitelor $b$ și a cotei maxime a împrumuturilor din valoarea investiție $\gamma$ putem avea pentru evoluția datoriei firmei:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} < 0$

Înlocuind evoluțiile capitalului fix și a datoriei în prima ecuație obținem o ecuație liniară în capitalul circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r[\frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}] - I_{max}$$

Notând cu $R(t)$ termenul liber al ecuației:

$$R(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r[\frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}] - I_{max}$$

obținem evoluția capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

Pe această traiectorie firma nu plătește dividende (nu retrage bani), face investiții și împrumuturi la maxim și are o evoluție de stabilizare a valorii capitalului fix și a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

**Traiectoria 6** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$)

Sistemul canonic devine:

$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\, Y(t) - D_{max} - I_{max}$

$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot I_{max} - b\cdot Y(t)$

Rezolvarea în acest caz este identică cu cea de la traiectoria 5 cu diferența că în expresia lui R($t$) din evoluția capitalului circulant va apărea și valoarea maximă a dividendelor $D_{max}$.

Pe această traiectorie firma plătește dividende la maxim(retrage bani la maxim), face investiții și împrumuturi la maxim și are o evoluție de stabilizare a valorii capitalului fix și a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i}\cdot(1-e^{-iT})\cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)]\cdot e^{-iT}$$

**Traiectoria 7** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_{max}$, $D = 0$, $Y = 0$)

În acest caz ecuația de dinamică a datoriei firmei devine:

$$0 = \gamma\cdot I_{max} + 0$$

de unde rezultă $I_{max} = 0$ în contradicție cu ipoteza $I_{max} > 0$ deci traiectoria nu este admisibilă.

**Traiectoria 8** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_{max}$, $D = D_{max}$, $Y = 0$)

În acest caz ecuația de dinamică a datoriei firmei devine:

$$0 = \gamma\cdot I_{max} + 0$$

de unde rezultă $I_{max} = 0$ în contradicție cu ipoteza $I_{max} > 0$ deci traiectoria nu este admisibilă.

**Traiectoria 9** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_{max}$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic devine:

$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\, Y(t) - I_{max}$

$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot I_{max} - b\cdot Y(t)$

La acest sistem se adaugă și ecuația: $Y(t) = k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$

Derivând ecuația suplimentara și înlocuind derivatele funcțiilor cu expresiile lor din sistemul canonic obținem:

$$\gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t) = k \cdot \{ I_{max} - a \cdot K_F(t) + [(1-f) \cdot p \cdot a + f \cdot a] \cdot K_F(t) + (1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1-f) \cdot r \cdot Y(t) - I_{max} \}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t) = k \cdot \{(1-f) \cdot (p \cdot a - 1) \cdot K_F(t) + (1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1-f) \cdot r \cdot Y(t)\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\gamma \cdot I_{max} - b \cdot k \cdot (K_F(t) + K_C(t)) = k \cdot \{(1-f) \cdot (p \cdot a - 1) \cdot K_F(t) + (1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1-f) \cdot r \cdot k \cdot (K_F(t) + K_C(t))\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\gamma \cdot I_{max} + k \cdot (r \cdot k \cdot (1 - f) - b) \cdot [K_F(t) + K_C(t)] = k \cdot (1-f) \cdot [(p \cdot a - 1) \cdot K_F(t) + (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t)]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$K_F(t) = -\frac{(rk\text{-}p\beta+1)(1\text{-}f)\text{-}b}{(rk\text{-}p\alpha+1)(1\text{-}f)\text{-}b} \cdot K_C(t) - \gamma \cdot \frac{I_{\max}}{k((rk\text{-}p\alpha+1)(1\text{-}f)\text{-}a)}$$

De aici rezultă:

$$Y(t) = \frac{kp(\beta\text{-}a)(1\text{-}f)}{(rk\text{-}p\alpha+1)(1\text{-}f)\text{-}b} \cdot K_C(t) - \gamma \cdot \frac{I_{\max}}{(rk\text{-}p\alpha+1)(1\text{-}f)\text{-}a}$$

şi revenind la sistemul canonic ultimele două ecuaţii de dinamică devin două ecuaţii în $K_C(t)$:

$$\dot{K}_C(t) = -a \cdot K_C(t) - I_{\max} \cdot \frac{k[(rk\text{-}p\alpha+1)(1\text{-}f)\text{-}b] + \gamma a}{k[(rk\text{-}p\beta+1)(1\text{-}f)\text{-}b]}$$

$$\dot{K}_C(t) = -b \cdot K_C(t) + \gamma \cdot I_{max} \cdot \frac{rk - p\alpha + 1}{pk(\beta - \alpha)}$$

Sistemul celor două ecuaţii cu o necunoscută are soluţie doar dacă:

$$a = b \text{ şi } p = \frac{\mathrm{rk(f - 1) + a}}{\alpha(\mathrm{f} - 1)} \quad \text{sau } a = b \text{ şi } p = -\gamma \cdot \frac{\mathrm{rk} + 1}{k(\beta - \alpha) - \gamma\beta}$$

Deşi cazul este cu totul particular el este interesant deoarece aminteşte de modelul Ludwig (*Ipoteza Ludwig*: a = b).

De asemenea, în acest caz se observă că nivelul capitalului fix este în dependenţă liniară cu capitalul fix (structura producţiei se păstrează).

Pe această traiectorie se fac investiţii şi împrumuturi la maxim, nu se plătesc dividende şi nivelul datoriei este maxim. Firma este într-o perioadă de creştere rapidă a capitalului propriu.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = k \cdot (K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$[K_F(T) + K_C(T)] \cdot e^{-iT}$$

**Traiectoria 10** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_{max}$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Discuţia este aceeaşi cu cea de la traiectoria 9 cu diferenţa că în acest caz se plătesc dividende, expresia acestora influenţând doar evoluţia capitalului circulant

De asemenea şi în acest caz nivelul capitalului fix este în dependenţă liniară cu capitalul fix (structura producţiei se păstrează).

Pe această traiectorie se fac investiţii şi împrumuturi la maxim, se plătesc dividende la maxim şi nivelul datoriei este maxim. Firma este într-o perioadă de creştere rapidă a capitalului fix şi a nivelului datoriei în paralel cu o evoluţie lentă a capitalului circulant.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = k \cdot (K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i} \cdot (1 - e^{-iT}) \cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)] \cdot e^{-iT}$$

**Traiectoria 11** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1 - f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F(t) + (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1 - f) \cdot r\, Y(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

Din ultimele două ecuaţii se obţin imediat evoluţiile capitalului fix şi datoriei firmei:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$$
$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

iar după înlocuirea acestora în prima ecuaţie ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) + [(1 - f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} - (1 - f) \cdot r\, Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

care este o ecuaţie liniară cu soluţia:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t}$$

unde:

$$R(\tau) = [(1 - f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot \tau} - (1 - f) \cdot r\, Y^0 \cdot e^{-b \cdot \tau}$$

Pe această traiectorie firma nu face investiţii, nu face împrumuturi, nu plăteşte dividende, are loc o scădere a capitalului fix în paralel cu eliminarea rapidă a datoriilor, evoluţia capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului

Valoarea finală a firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu.

**Traiectoria 12** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - D_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

Din ultimele două ecuaţii se obţin imediat evoluţiile capitalului fix şi datoriei firmei:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$$
$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

iar după înlocuirea acestora în prima ecuaţie ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - D_{max}$$

care este o ecuaţie liniară cu soluţia:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

unde:

$$R(\tau) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F^0\cdot e^{-a\cdot\tau} - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot\tau} - D_{max}$$

Pe această traiectorie firma nu face investiţii, nu face împrumuturi, plăteşte dividende la maxim, are loc o scădere a capitalului fix în paralel cu eliminarea rapidă a datoriilor, evoluţia capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i}\cdot(1 - e^{-iT})\cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)]\cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **13** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din acesta rezultă imediat evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$$

şi apoi a capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

unde:

$$R(\tau) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F^0 \cdot e^{-a\cdot\tau}$$

Pe această traiectorie firma nu are datorii, nu face împrumuturi, nu face investiţii, nu plăteşte dividende, are loc o scădere a capitalului fix, evoluția capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului.

*Traiectoria* **14** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din acesta rezultă imediat evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$$

şi apoi a capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

unde:

$$R(\tau) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F^0 \cdot e^{-a\cdot\tau} - D_{max}$$

Pe această traiectorie firma nu are datorii, nu face împrumuturi, nu face investiţii, plăteşte dividende la maxim, are loc o scădere a capitalului fix, evoluția capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului.

**Traiectoria 15** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic va fi:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f) \cdot p \cdot a + f \cdot a] \cdot K_F(t) + (1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1-f) \cdot r \cdot Y(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

la care se adaugă ecuaţia suplimentară $Y = k \cdot (K_F + K_C)$.

Acest caz este posibil doar dacă soluţia dată de sistemul canonic verifică şi ecuaţia suplimentară.

Deoarece sistemul este exact ca în traiectoria 11 soluţia va fi:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$$
$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$
$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t}$$

cu:

$$R(\tau) = [(1-f) \cdot p \cdot a + f \cdot a] \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot \tau} - (1-f) \cdot r \cdot Y^0 \cdot e^{-b \cdot \tau}.$$

Soluţia verifică restricţia suplimentară doar dacă:

$$Y^0 \cdot e^{-b \cdot t} = k \cdot [K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t}] \ (\forall)\ t \in [0,T]$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

**Traiectoria 16** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic va fi:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f) \cdot p \cdot a + f \cdot a] \cdot K_F(t) + (1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) - (1-f) \cdot r \cdot Y(t) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

la care se adaugă ecuaţia suplimentară $Y = k \cdot (K_F + K_C)$.

Acest caz este posibil doar dacă soluţia dată de sistemul canonic verifică şi ecuaţia suplimentară.

Deoarece sistemul este exact ca în traiectoria 12 soluţia va fi:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$$
$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$
$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t}$$

cu:

$$R(\tau) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F^0\cdot e^{-a\cdot\tau} - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot\tau} - D_{max}$$

Soluția verifică restricția suplimentară doar dacă:

$$Y^0\cdot e^{-b\cdot t} = k\cdot[K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} + \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau\cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot t}]\ (\forall)\ t\in[0,T]$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

**Traiectoria 17** ($I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

Din ultima ecuație obținem evoluția datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ și a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Cele două soluții găsite se înlocuiesc în prima ecuație și obținem ecuația de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - I_{max}$$

Notând cu $R(t)$ termenul liber al ecuației:

$$R(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - I_{max}$$

obținem evoluția capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau\cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot t}$$

Pe această traiectorie firma nu plătește dividende (nu retrage bani), face investiții la maxim, nu face împrumuturi și are o evoluție de stabilizare a valorii capitalului fix și de scădere a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

**Traiectoria 18** ($I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - I_{max} - D_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

Din ultima ecuație obținem evoluția datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ și a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Cele două soluții găsite se înlocuiesc în prima ecuație și obținem ecuația de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - I_{max} - D_{max}$$

Notând cu $R(t)$ termenul liber al ecuației:

$$R(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - I_{max} - D_{max}$$

obținem evoluția capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau\cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

Pe această traiectorie firma, plătește dividende la maxim, face investiții la maxim, nu face împrumuturi și are o evoluție de stabilizare a valorii capitalului fix și de scădere a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei plus suma dividendelor plătite în valoare actualizată.

**Traiectoria 19** ($I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - I_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ și a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Cele două soluţii găsite se înlocuiesc în prima ecuaţie şi obţinem ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - I_{max}$$

Notând cu R($t$) termenul liber al ecuaţiei:

$$R(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - I_{max}$$

obţinem evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau\cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

Pe această traiectorie firma nu plăteşte dividende (nu retrage bani), face investiţii la maxim, nu are datorii, nu face împrumuturi şi are o evoluţie de stabilizare a valorii capitalului fix.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

**Traiectoria 20** ($I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - I_{max} - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Cele două soluţii găsite se înlocuiesc în prima ecuaţie şi obţinem ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - I_{max} - D_{max}$$

Notând cu R($t$) termenul liber al ecuaţiei:

$$R(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - I_{max}\, D_{max}$$

obţinem evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot t}$$

Pe această traiectorie firma plăteşte dividende la maxim, face investiţii la maxim, nu are datorii, nu face împrumuturi şi are o evoluţie de stabilizare a valorii capitalului fix.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

**Traiectoria 21** ($I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\, Y(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

la care se adaugă şi condiţia suplimentară $Y = k\cdot(K_F + K_C)$.

Din ultima ecuaţie obţinem evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}$ > 0;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Cele două soluţii găsite se înlocuiesc în prima ecuaţie şi obţinem ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - I_{max}$$

Notând cu R($t$) termenul liber al ecuaţiei:

$$R(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] - (1-f)\cdot r\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - I_{max}$$

obţinem evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$$

Soluţia verifică restricţia suplimentară doar dacă:

$$Y^0\cdot e^{-b\cdot t} = k\cdot[\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t} + \int_0^t R(\tau)\cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau}d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}]$$
$$(\forall)\ t \in [0,T]$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

**Traiectoria 22** ($I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot K_C(t) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - I_{max} - D_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$

$\dot{Y}(t) = -b \cdot Y(t)$

la care se adaugă şi condiţia suplimentară $Y = k \cdot (K_F + K_C)$.

Din ultima ecuaţie obţinem evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Cele două soluţii găsite se înlocuiesc în prima ecuaţie şi obţinem ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot K_C(t) + [(1-f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot [\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}] - (1-f) \cdot r Y^0 \cdot e^{-b \cdot t} - I_{max} - D_{max}$$

Notând cu $R(t)$ termenul liber al ecuaţiei:

$$R(t) = [(1-f) \cdot p \cdot a + f a] \cdot [\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}] - (1-f) \cdot r Y^0 \cdot e^{-b \cdot t} - I_{max} - D_{max}$$

obţinem evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t}$$

Soluţia verifică restricţia suplimentară doar dacă:

$$Y^0 \cdot e^{-b \cdot t} = k \cdot [\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t} + \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot \tau} d\tau \cdot e^{(1-f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t}]$$

$$(\forall)\ t \in [0, T]$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

## Concluzii

În urma analizei celor 22 de traiectorii rezultă că două sunt neadmisibile (7 şi 8) şi 6 sunt foarte improbabile (9, 10, 15, 16, 21, 22) analiza putând fi redusă fără a pierde generalitatea doar la 14 traiectorii, care sunt sintetizate în tabelul de mai jos

| | ***Soluţia*** | |
|---|---|---|
| **1** | $F = \gamma \cdot I_F,\ D = 0,\ Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y = 0$ |
| **2** | $F = \gamma \cdot I_F,\ D = D_{max},\ Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y = 0$ |
| **3** | $F = \gamma \cdot I_F,\ D = 0,\ Y = k \cdot (K_F + K_C)$ | *Sistem* |
| **4** | $F = \gamma \cdot I_F,\ D = D_{max},\ Y = k \cdot (K_F + K_C)$ | *Sistem* |
| **5** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma \cdot I_F,\ D = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| **6** | $I_F = I_{max},\ F = \gamma \cdot I_F,\ D = D_{max}$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| **7** | $F = \gamma \cdot I_F = 0,\ D = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}, Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| **8** | $F = \gamma \cdot I_F = 0,\ D = D_{max}$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}, Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| **9** | $F = \gamma \cdot I_F = 0,\ D = 0,\ Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y = 0$ |
| **10** | $F = \gamma \cdot I_F = 0,\ D = D_{max},\ Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y = 0$ |
| **11** | $I_F = I_{max}$, $D = 0,\ F = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| **12** | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max},\ F = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| **13** | $I_F = I_{max},\ D = 0,\ F = 0,\ Y = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y = 0$ |
| **14** | $I_F = I_{max},\ D = D_{max},\ F = 0,\ Y = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$, $Y = 0$ |

Din cele de mai sus se observă că evoluţiile posibile ale capitalului fix se încadrează în unul din cazurile:

a) $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei capitalului fix are forma din figura 1.

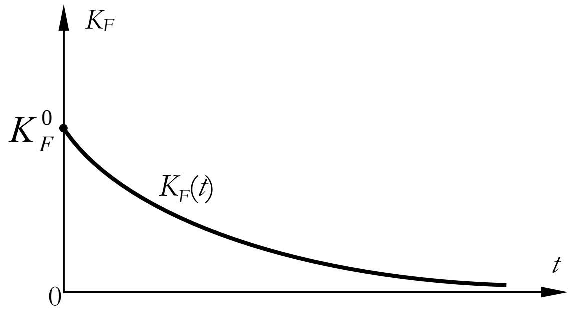



Figura 1

b) $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$ şi $K_F^0 > \frac{I_{\max}}{a}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei capitalului fix are forma din figura 2.

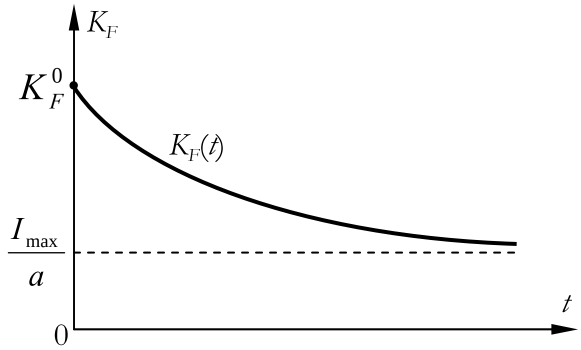



Figura 2

c) $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei capitalului fix are forma din figura 3.

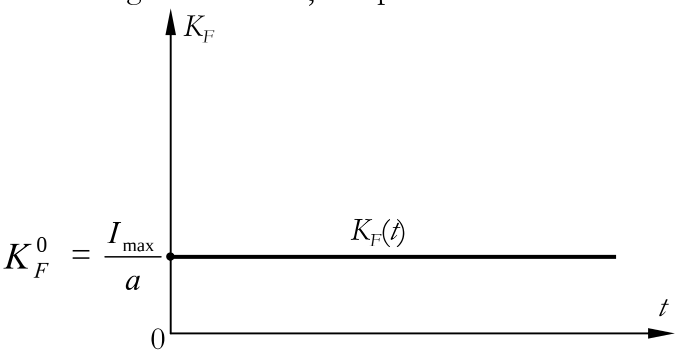



Figura 3

d) $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$ şi $K_F^0 < \frac{I_{max}}{a}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei capitalului fix are forma din figura 4.

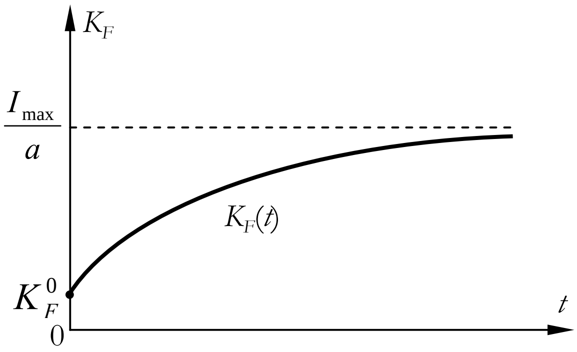



Figura 4

Evoluţiile posibile ale datoriei firmei se încadrează în unul din cazurile:

a) $Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei datoriei firmei are forma din figura 5.

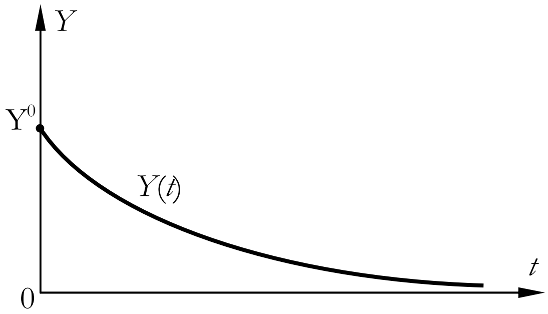



Figura 5

b) $Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ şi $Y^0 > \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei datoriei firmei are forma din figura 6.

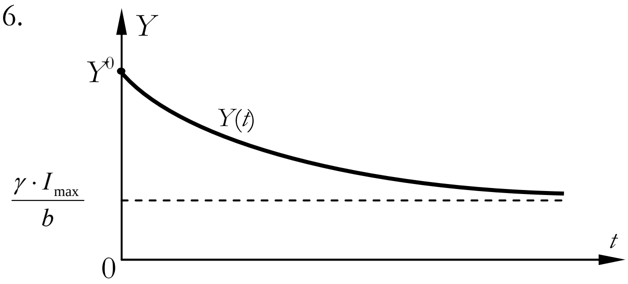



Figura 6

c) $Y(t) = \dfrac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \dfrac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ şi $Y^0 = \dfrac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$

Reprezentarea grafică a evoluției datoriei firmei are forma din figura 7.

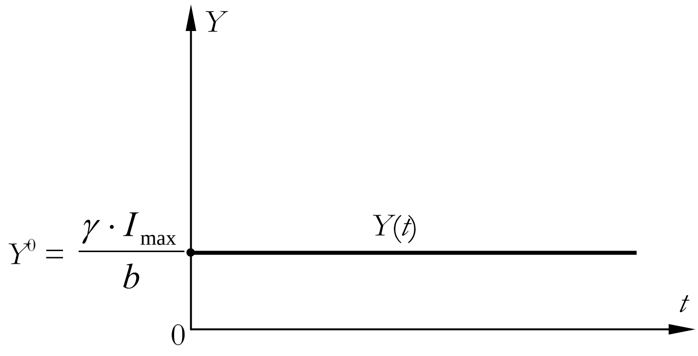



Figura 7

d) $Y(t) = \dfrac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \dfrac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ şi $Y^0 < \dfrac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$

Reprezentarea grafică a evoluției datoriei firmei are forma din figura 8.

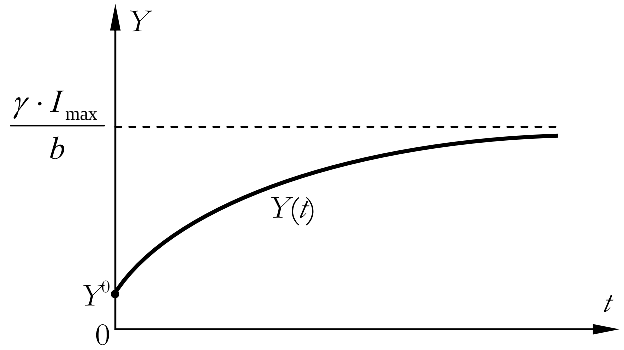



Figura 8

Traiectoria capitalului circulant este mult mai complicată, fiind dependentă de mai mulți din parametrii modelului.

Astfel, pentru traiectoria 1 avem:

$K_C(t) = \{ K_C^0 + [(1 - f) \cdot p \cdot \alpha + f \cdot a] \cdot K_F^0 \cdot (1 + e^{-a \cdot t}) \} e^{(1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t} =$

$[K_C^0 + [(1 - f) \cdot p \cdot \alpha + f \cdot a] \cdot K_F^0] \cdot e^{(1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) \cdot t} + [(1 - f) \cdot p \cdot \alpha + f \cdot a] \cdot K_F^0 \cdot e^{[(1 - f) \cdot (p \cdot \beta - 1) - a] \cdot t}$

Deoarece coeficienții celor două funcții exponențiale sunt evident pozitivi natura evoluției va fi dată de semnele coeficienților lui *t* de la exponent.

Cum evident $(1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) > (1 - f)\cdot(p\cdot\beta - 1) - a$ şi $(1 - f) > 0$ discuţia se rezumă la semnul lui $(p\cdot\beta - 1)$.

Astfel:

a) Dacă $p\cdot\beta > 1$ capitalul circulant are o evoluţie exponenţial crescătoare spre $\infty$.
b) Dacă $p\cdot\beta = 1$ capitalul circulant are o evoluţie descrescătoare spre:

$$K_C^0 + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F^0$$

c) Dacă $p\cdot\beta < 1$ capitalul circulant are o evoluţie descrescătoare spre 0.

Pentru celelalte traiectorii evoluţia va fi discutată pe un caz particular.

## Traiectorii multiple

Din analiza traiectoriilor rezultă că unele traiectorii pot fi traiectorii iniţiale doar în cazuri cu totul particulare şi pot fi eliminate din analiză fără a restrânge semnificativ mulţimea cazurilor posibile.

De asemenea, traiectoria de pornire va fi în funcţie de valorile iniţiale ale capitalului fix, capitalului circulant şi a datoriei firmei.

Putem de asemenea să considerăm ca foarte improbabile traiectoriile în care variabilele de decizie sunt pe limitele maxime posibile, aceste limite fiind fixate în principal pentru a asigura soluţia matematică analitică a modelului. Deşi traiectoriile pe care nu se plătesc dividende par foarte probabile, ţinând cont de situaţia foarte dificilă a firmelor din România în perioada analizată, în care numai mobilizarea întregilor resurse ale firmei în activitatea firmei putea asigura supravieţuirea firmei, totuşi nu trebuie uitat că majoritatea firmelor mici din România sunt de fapt foarte mici, majoritatea firme familiale, care constituie singura sursă de venituri pentru proprietarii lor. În continuare vom accepta totuşi aceste traiectorii dar cu amendamentul că ele nu pot fi urmate de firmă decât perioade scurte sau foarte scurte de timp.

Din acest motiv, la analiza concatenarităţii traiectoriilor şi structura traiectoriei optime totale vom lua în considerare, ca traiectorii principale, doar traiectoriile în care $I(t) < I_{max}$ şi $D(t) < D_{max}$.

Traiectorii care îndeplinesc aceste două condiţii sunt listate în tabelul de mai jos:

| | ***Variabilele de decizie*** | ***Variabilele de stare*** |
|---|---|---|
| **1** | $F = I_F = D = 0$ | $K_C(t) = \{K_C^0 + [(1-f)\cdot p\cdot a + f\cdot a]\cdot K_F^0\cdot(1 + e^{-a\cdot t})\}\cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta - 1)\cdot t}$ <br> $K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $Y(t) = 0$ |
| 3 | $F = \gamma \cdot I_F,\ D = 0$ | $\dot{K}_C(t) = A_{11} \cdot K_C(t) + A_{12} \cdot K_F(t)$<br>$\dot{K}_F(t) = A_{21} \cdot K_C(t) + A_{22} \cdot K_F(t)$<br>$Y(t) = k \cdot (K_F(t) + K_C(t))$ |
| 7 | $F = I_F = D = 0$ | $K_C(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot t}$<br>*unde*: $R(\tau) = [(1-f)\cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F^0 \cdot e^{-a\cdot\tau} - (1-f)\cdot r\, Y^0 \cdot e^{-b\cdot\tau}$<br>$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b\cdot t}$ |
| 9 | $F = I_F = D = 0$ | $K_C(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot\tau} d\tau \cdot e^{(1-f)\cdot(p\cdot\beta-1)\cdot t}$<br>*unde*: $R(\tau) = [(1-f)\cdot p \cdot a + f a] \cdot K_F^0 \cdot e^{-a\cdot\tau}$<br>$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$<br>$Y(t) = 0$ |

*Coeficienții $A_{ij}$ din sistemul care dă evoluția capitalului firmei în traiectoria* 3 *sunt*:

$$A_{11} = \left[(1-f)(p\beta-1-rk)\left(1-\frac{k}{\gamma}\right) - \frac{kb}{\gamma}\right] \quad A_{12} = \left[(1-f)(pa-rk-a)\left(1-\frac{k}{\gamma}\right) - k\frac{b}{\gamma} + a\right]$$

$$A_{21} = k\frac{(1-f)(p\beta - rk - 1) + b}{\gamma} \qquad A_{22} = \left[k\frac{(1-f)(p\alpha - a - rk) + b}{\gamma} - a\right]$$

Se observă că pe toate aceste 4 variante nu se plătesc dividende, astfel că traiectoria optimă nu poate fi formată doar din aceste 4 variante. Totuși, problema în acest caz este că, cel puțin pentru cazul când se acceptă ipoteza concurenței perfecte, condițiile impuse asupra variabilelor nu sunt suficiente și, de asemenea, considerarea maximizării venitului total ca singur țel al firmei nu este întotdeauna realist. Una din condițiile de care ar trebui să se țină cont este ca intervalele pe care nu se plătesc dividende să nu depășească o lungime maximă dată sau ca limita minimă a volumului dividendelor să nu mai fie zero.

Din aceste traiectorii variantele 1, 3 și 8 pot fi inițiale doar pentru cazuri cu totul speciale ($Y^0 = 0$ sau $Y(t) = k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$), deci cea mai probabilă traiectorie la începutul activității firmei va fi traiectoria 7 (este și cazul situației analizate în studiul de caz din capitolul următor).

Pe această traiectorie firma nu face investiții în capitalul fix, împrumuturi și nu plătește dividende, ea utilizând tot venitul obținut pentru susținerea producției prin cumpărarea capitalului circulant.

În aceste condiții va avea loc o scădere a valorii capitalului fix (deoarece cel uzat nu mai este înlocuit) și va scade datoria firmei, deoarece nu se mai fac împrumuturi și se plătesc ratele la cele deja contractate.

Evoluţia capitalului circulant depinde de situaţia mediului economic în care acţionează firma. Astfel, deşi firma mobilizează tot profitul pentru achiziţionarea capitalului circulant există posibilitatea ca şi volumul acestuia (şi deci volumul producţiei) să scadă deoarece, din cauza inflaţiei sau altor factori externi, firma nu reuşeşte să obţină nici măcar venitul necesar acoperirii cheltuielilor de producţie necesare menţinerii producţiei măcar la nivelul iniţial.

Deoarece evoluţia capitalului circulant depinde de prea mulţi parametrii este dificil de dat o regulă generală privind evoluţia acestuia şi din acest motiv ne vom rezuma la a face analiza doar în cazul concret studiat în capitolul următor.

În orice caz, cum pe această traiectorie nu se plătesc dividende şi are loc o decapitalizare puternică a firmei intervalul de timp pe care va evolua firma pe această traiectorie trebuie să fie scurt.

De pe această traiectorie nu se poate trece direct pe traiectoriile cu datoria zero, deoarece, deşi volumul datoriei scade continuu, el nu devine zero niciodată. Motivul este în acest caz ipoteza că ratele anuale plătite reprezintă acelaşi procent din datorie indiferent de mărimea datoriei. Pentru a elimina datoria vom presupune că, pentru un anumit nivel minim al datoriei aceasta este plătită toată în anul respectiv.

Odată ajunsă pe o traiectorie fără datorii firma poate trece de asemenea doar în salt pe una din celelalte traiectorii.

Considerentele anterioare arată că, cel puţin în cazul unei concurenţe perfecte sau practic perfecte ipoteza continuităţii în evoluţia variabilelor modelului este nerealistă. Din acest motiv, în continuare vor fi analizate cazurile în care se renunţă la ipoteza de concurenţă perfectă şi/sau la ipoteza continuităţii evoluţiei variabilelor.

## b) Cazul continuu în condiții de concurență imperfectă

$$\max_{I_F, F, D} \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT}[K_F(T) + K_C(T)]$$

$\dot{K}_F(t) + \dot{K}_C(t) = (1 - f)\cdot[p(K_F(t),K_C(t))\cdot(a\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t) - r\cdot Y(t)] - D(t)$

$\dot{K}_F(t) = I_F(t) - a\cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = F(t) - b\cdot Y(t)$

$I_{min} \le I_F(t) \le I_{max}$; $I_{min} < 0 < I_{max}$.

$0 \le Y(t) \le k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$

$0 \le D(t) \le D_{max}$

$0 \le F(t) \le \gamma\cdot I_F(t)$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$

$a, \beta, p > 0$

Deoarece din $\gamma\cdot I_F(t) \ge F(t) \ge 0$ rezultă evident $I_{min} \le I_F(t)$ această condiție nu mai este efectivă şi va fi eliminată din sistem, prima şi a patra condiție putând fi scrise împreună prin:

$$0 \le F(t) \le \gamma\cdot I_F(t) \le \gamma\cdot I_{max}$$

Prin înlocuirea variației capitalului fix în prima ecuație de stare a sistemului obținem:

$$I_F(t) - a\cdot K_F(t) + \dot{K}_C(t) = (1 - f)\cdot[p(K_F(t),K_C(t))\cdot(a\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t) - r\cdot Y(t)] - D(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{K}_C(t) = (1 - f)\cdot[p(K_F(t),K_C(t))\cdot(a\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t) - r\cdot Y(t)] - D(t) - I_F(t) + a\cdot K_F(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1 - f)\cdot r\cdot Y(t) - D(t) - I_F(t)$$

unde:

$$U(K_F(t),K_C(t)) = (1 - f)\,[p(K_F(t),K_C(t))\cdot(a\cdot K_F(t) + \beta\cdot K_C(t)) - a\cdot K_F(t) - K_C(t)] + a\cdot K_F(t)$$

este o funcție continuă şi derivabilă în $K_F(t)$ şi $K_C(t)$.

Sistemul de ecuații de stare ale sistemului devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - D(t) - I_F(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = I_F(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = F(t) - b\cdot Y(t)$$

acesta fiind un sistem de ecuaţii diferenţiale cu trei ecuaţii şi trei necunoscute, comenzile fiind $I_F(t)$, $F(t)$ şi $D(t)$.

Pentru rezolvare, vom porni de la ultima formă a sistemului:

$$\max_{I_F,F,D} \int_0^T e^{-it} D(t)dt + e^{-iT}[K_F(T) + K_C(T)]$$

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - D(t) - I_F(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = I_F(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = F(t) - b\cdot Y(t)$$

$F(t) \leq \gamma\cdot I_F(t) \leq \gamma\cdot I_{max}$
$0 \leq Y(t) \leq k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$
$0 \leq D(t) \leq D_{max}$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$
$a, \beta, p > 0$

Deoarece avem de rezolvat o problemă de control optimal vom aplica pentru rezolvare principiul lui Pontreaghin, obţinând succesiv:

a) **Hamiltonianul** problemei:

$$H(K_F(t),K_C(t),Y(t),I_F(t),F(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)] =$$
$$= e^{-it}\cdot D(t) + \lambda_1(t)\cdot[U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - D(t) - I_F(t)] + \lambda_2(t)\cdot[I_F(t) - a\cdot K_F(t)]$$
$$+ \lambda_2(t)\cdot[F(t) - b\cdot Y(t)]$$

Deoarece în expresia hamiltonianului apare factorul de actualizare $e^{-it}$ vom face schimbarea de variabilă:

$$\psi_j(t) = e^{it}\cdot\lambda_j(t)\ j = 1,2,3$$

obţinând noile variabile adjuncte $\psi_j(t)$ şi hamiltonianul modificat:

$$\tilde{H}(K_F(t),K_C(t),Y(t),I_F(t),F(t),D(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)] =$$
$$= D(t) + \psi_1(t)\cdot[U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - D(t) - I_F(t)] + \psi_2(t)\cdot[I_F(t) - a\cdot K_F(t)] +$$
$$\psi_3(t)\cdot[F(t) - b\cdot Y(t)]$$

unde $\tilde{H} = e^{it}\cdot H$.

Deoarece sistemul conține și restricții momentane asupra variabilelor de stare și de control vom construi lagrangeanul asociat problemei:

$$L = \widetilde{H} + \mu_1\cdot[I_{max} - I_F(t)] + \mu_2\cdot[\gamma\cdot I_F(t) - F(t)] + \mu_3\cdot[k\cdot(K_F(t) + K_C(t)) - Y(t)] + \mu_4\cdot Y(t) + \mu_5\cdot[D_{max} - D(t)] + \mu_6\cdot D(t) + \mu_7\cdot F(t)$$

Sistemul de condiții Kuhn-Tucker asociat problemei de maximizare a hamiltonianului pe domeniul dat de restricțiile momentane ale sistemului în variabilele de control va fi același cu cel din cazul concurenței perfecte:

$$\frac{\partial L}{\partial I_F} = 0 \Leftrightarrow -\psi_1 + \psi_2 - \mu_1 + \gamma\cdot\mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 0 \Leftrightarrow \psi_3 - \mu_2 + \mu_7 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial D} = 0 \Leftrightarrow 1 - \psi_1 - \mu_5 + \mu_6 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\mu_1\cdot[I_{max} - I_F] = 0\\
&\mu_2\cdot[\gamma\cdot I_F - F] = 0\\
&\mu_3\cdot[k\cdot(K_F + K_C) - Y] = 0\\
&\mu_4\cdot Y = 0\\
&\mu_5\cdot[D_{max} - D] = 0\\
&\mu_6\cdot D = 0\\
&\mu_7\cdot F(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\mu_j \geq 0,\ I_F,\ F,\ D \geq 0$$

Avem de rezolvat un sistem algebric de 10 ecuații cu 10 necunoscute ($I_F$, $F$, $D$, $\mu_j$ $j$=1..7) care implică discuția a $2^7$ = 128 variante, în funcție valorile nule sau nu ale multiplicatorilor $\mu_j$.

Din acest sistem vom scoate variabilele de comandă $I_F$, $F$, $D$ în funcție de variabilele de stare $K_F$, $K_C$, $Y$ și variabilele adjuncte $\psi_j$, $j$ = 1,2,3:

$$\begin{aligned}
\overline{I_F}(t) &= f_1(K_F,K_C,Y,\ \psi_j, j = 1,2,3)\\
\overline{F}(t) &= f_2(K_F,K_C,Y,\ \psi_j, j = 1,2,3)\\
\overline{D}(t) &= f_3(K_F,K_C,Y,\ \psi_j, j = 1,2,3)
\end{aligned}$$

după care vom rezolva **sistemul canonic** asociat problemei:

$$\begin{aligned}
\dot{K}_C(t) &= U(K_F(t),K_C(t)) - (1 - f)\cdot r\cdot Y(t) - \overline{D}(t) - \overline{I_F}(t)\\
\dot{K}_F(t) &= \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)\\
\dot{Y}(t) &= \overline{F}(t) - b\cdot Y(t)
\end{aligned}$$

$\dot{\psi}_1(t) = i\cdot\psi_1(t) - \dfrac{\partial\widetilde{H}(K_F, K_C, Y, \overline{I_F}, \overline{F}, \overline{D}, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial K_C}(t) = i\cdot\psi_1(t) -$
$\psi_1(t)\cdot\dfrac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t)$

$\dot{\psi}_2(t) = i\cdot\psi_2(t) - \dfrac{\partial\widetilde{H}(K_F, K_C, Y, \overline{I_F}, \overline{F}, \overline{D}, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial K_F}(t) = (i + a)\cdot\psi_2(t) -$
$\psi_1(t)\cdot\dfrac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t)$

$\dot{\psi}_3(t) = i\cdot\psi_3(t) - \dfrac{\partial\widetilde{H}(K_F, K_C, Y, \overline{I_F}, \overline{F}, \overline{D}, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial Y}(t) = (i + b)\cdot\psi_3(t) +$
$\psi_1(t)\cdot(1 - f)\cdot r$

cu ***condiţiile iniţiale***:

$K_C(0) = K_C^0$,
$K_F(0) = K_F^0$,
$Y(0) = Y^0$

şi ***condiţiile finale*** (de transversalitate):

$$\psi_1(T) = \frac{\partial(K_F + K_C)}{\partial K_C}(T) = 1$$
$$\psi_2(T) = \frac{\partial(K_F + K_C)}{\partial K_F}(T) = 1$$
$$\psi_3(T) = \frac{\partial(K_F + K_C)}{\partial Y}(T) = 0$$

care se reduce la:

$$\psi_1(T) = 1,\ \psi_2(T) = 1,\ \psi_3(T) = 0$$

Revenind la sistemul Kuhn-Tucker asociat problemei de maximizare a hamiltonianului pe mulţimea comenzilor admisibile, dintre cele 128 de cazuri o parte pot fi eliminate din start ca neducând la o soluţie admisibilă. De exemplu, multiplicatorii $\mu_3$ şi $\mu_4$ nu pot fi simultan nenuli (ar rezulta ca firma are capital nul) şi nici multiplicatorii $\mu_5$ şi $\mu_6$ (ar rezulta ca dividendele maxime sunt zero). De asemenea, nu pot fi simultan diferiţi de 0 indicatorii $\mu_1$, $\mu_2$ şi $\mu_7$, deoarece ar rezulta că investiţia maximă posibilă este 0, astfel ca rămân de discutat doar 63 cazuri:

| | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $\mu_4$ | $\mu_5$ | $\mu_6$ | $\mu_7$ | *Soluţia* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F$, $F$, $D$ oarecare |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = 0$, $I_F$, $F$ oarecare |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F$ oarecare |
| 4 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F$, $F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = 0$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 7 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F$, $F$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 8 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = 0$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 9 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_1 = \psi_2$, $\psi_3 = 0$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 10 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1 + \gamma\cdot\psi_3$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare |
| 11 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$ |
| 12 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$ |
| 13 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 14 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 15 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 16 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 17 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 18 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 19 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D$,$F$ oarecare |
| 20 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$ , $D = 0$, $F$ oarecare |
| 21 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$ , $D = D_{max}$, $F$ oarecare |
| 22 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F$ oarecare |
| 23 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 24 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F$ oarecare, $Y = 0$ |
| 25 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$, $D$,$F$ oarecare |
| 26 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 27 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $\psi_3 = 0$, $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 28 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare |
| 29 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$ |
| 30 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$ |
| 31 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 32 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 33 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 34 | ≠0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | ≠0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 36 | ≠0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 37 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $I_F$, $F = 0$, $D$ oarecare |
| 38 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2$, $D = 0$, $I_F$, $F = 0$ |
| 39 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2$, $D = D_{max}$, $I_F$, $F = 0$ |
| 40 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $F = 0$, $I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 41 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 42 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 43 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2 = 1$, $I_F$, $F = 0$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 44 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 45 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = \psi_2$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 46 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare |
| 47 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$ |
| 48 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$ |
| 49 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 50 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 51 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 52 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 53 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 54 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 55 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $D$ oarecare,$F = 0$ |
| 56 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$ , $D = 0$, $F = 0$ |
| 57 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$ , $D = D_{max}$, $F = 0$ |
| 58 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$ |
| 59 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 60 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 61 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | 0 | ≠0 | $\psi_1 = 1$, $I_F = I_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$, $D$,$F = 0$ |
| 62 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | 0 | ≠0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 63 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | 0 | ≠0 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |

În continuare va fi analizat efectul rezultatului din fiecare caz asupra sistemului canonic asociat problemei de control optimal:

$$\dot{K}_C(t) = [U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - \overline{D}(t) - \overline{I_F}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \overline{F}(t) - b\cdot Y(t)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = (i + a)\cdot\psi_2(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t)$$

$$\dot{\psi}_3(t) = (i + b)\cdot\psi_3(t) + \psi_1(t)\cdot(1 - f)\cdot r$$

$$K_C(0) = K_C^0,\ K_F(0) = K_F^0,\ Y(0) = Y^0,\ \psi_1(T) = 1,\ \psi_2(T) = 1,\ \psi_3(T) = 0$$

În acest caz cele 6 ecuații nu se mai împart în două sisteme distincte, unul format din primele trei ecuații și conținând ca variabile doar variabilele de stare și al doilea format din ultimele trei și conținând doar variabilele adjuncte, ca în cazul concurenței perfecte, pentru rezultat fiind importante toate ecuațiile sistemului canonic.

Vom analiza mai întâi cazurile în care una sau mai multe din variabilele adjuncte ar fi constante.

Astfel, dacă $\psi_1(t)$ = const. = 1 din prima ecuație a variabilelor adjuncte rezultă că:

$$\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t) = i$$

Cum $p(K_F, K_C) = p(Q) = p(\alpha K_F + \beta K_C) \Rightarrow$

$$\frac{\partial p(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t) = \frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K_C}(t) = \beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial p(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t) = \frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K_F}(t) = \alpha\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}$$

deci:

$$\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t) = (1 - f)\cdot[\beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \beta\cdot p(Q) - 1]$$

$$\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t) = (1 - f)\cdot[\alpha\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \alpha\cdot p(Q) - d] + a$$

Conform relațiilor obținute condiția $\psi_1(t)$ = const. = 1 conduce la:

$$\beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \beta\cdot p(Q) - 1 = \frac{i}{1-f}$$

care este o ecuație diferențială liniară în preț cu variabila producția și are soluția:

$$p(Q) = C\cdot\frac{1}{Q} + \frac{i+1-f}{\beta(1-f)}$$

unde $C$ este o constantă oarecare.

Combinând această relație cu expresia lui $p(Q)$ din model vom obține o ecuație algebrică cu necunoscuta $Q$ din care rezultă $Q(K_F,K_C) = \overline{Q}$ = constant și apoi $p(Q) = p(\overline{Q})$ = constant.

Situația în care cele două expresii ale funcției preț ar fi identice ar conduce la faptul că venitul este liniar în $Q$ care este în contradicție cu ipoteza randamentelor la scară descrescătoare.

De asemenea este posibil să nu existe nici o soluție dar acest caz este cu totul particular și va fi eliminat din analiza.

De aici rezultă $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$ sau $K_C = -\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$ iar ultimele două ecuații ale variabilelor adjuncte au forma:

$$\dot{\psi}_2(t) = (i + a)\cdot\psi_2(t) - \alpha\cdot\frac{i+1-f}{\beta} - a\cdot f$$

$$\dot{\psi}_3(t) = (i + b)\cdot\psi_3(t) + (1 - f)\cdot r$$

Din aceste ecuații obținem variabilele adjuncte:

$$\psi_3(t) = \frac{(1-f)r}{i+b}\cdot[e^{-(i+b)\cdot(T-t)} - 1]$$

$$\psi_2(t) = [\frac{\alpha(i+1-f)+\beta fa}{\beta(i+a)} + (1 - \frac{\alpha(i+1-f)+\beta fa}{\beta(i+a)})\cdot e^{-(i+a)\cdot T}]\cdot e^{-(i+a)\cdot t}$$

și totul se reduce la a rezolva sistemul format cu variabilele de stare la care se adaugă restricția suplimentară $K_C = -\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$.

În plus: $U(K_F(t),K_C(t)) = (1 - f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot(\overline{Q}) - a\cdot K_F(t) + \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}]+a\cdot K_F(t)$

De asemenea, situația în care $\psi_1(t) = \psi_2(t) \neq 0$ conduce la:

$$\dot{\psi}_1(t) = i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_C}(t)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = (i + a)\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_F}(t)$$

și egalând termenii din dreapta obținem succesiv:

$$i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_C}(t) = (i+a)\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_F}(t) \Leftrightarrow$$

$$i - \frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_C}(t) = i + a - \frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_F}(t) \Leftrightarrow$$

$$\alpha\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \alpha\cdot p(Q) - a - \beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q - \beta\cdot p(Q) + 1 = 0$$

care este o ecuație diferențială liniară în preț cu variabila producția și are soluția:

$$p(Q) = C\cdot\frac{1}{Q} + \frac{a-1}{\alpha-\beta}$$

unde $C$ este o constantă oarecare.

Combinând această relație cu expresia lui $p(Q)$ din model vom obține o ecuație algebrică cu necunoscuta $Q$ din care rezultă $Q(K_F,K_C) = \overline{Q}$ = constant și apoi $p(Q) = p(\overline{Q})$ = constant, deci suntem din nou în cazul concurenței perfecte.

Situația în care cele două expresii ale funcției preț ar fi identice ar conduce la faptul că venitul este liniar în $Q$ care este în contradicție cu ipoteza randamentelor la scară descrescătoare.

De asemenea este posibil să nu existe nici o soluție dar acest caz este cu totul particular și va fi eliminat din analiza.

De aici rezultă $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$ sau $K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}$ și sistemul de ecuații ale variabilelor adjuncte are forma:

$$\psi_1(t) = \psi_2(t)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = [i + (1-f)\frac{\beta a-\alpha}{\alpha-\beta}]\cdot\psi_1(t) \Rightarrow \psi_1(t) = e^{\left(i+(1-f)\frac{\beta a-\alpha}{\alpha-\beta}\right)(t-T)} = \psi_2(t)$$

$$\dot{\psi}_3(t) = (i+b)\cdot\psi_3(t) + (1-f)\cdot r\, e^{\left(i+(1-f)\frac{\beta a-\alpha}{\alpha-\beta}\right)(t-T)}$$

În plus: $U(K_F(t),K_C(t)) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot(\overline{Q}) - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}] + a\cdot K_F(t)$

Cazul $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 1$ conduce la un sistem algebric în $K_F$ și $K_C$:

$$\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t) = i \Leftrightarrow (1-f)\cdot[\beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \beta\cdot p(Q) - 1] = i$$

$$\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t) = i + a \Leftrightarrow (1-f)\cdot[\alpha\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \alpha\cdot p(Q) - a] + a = i + a$$

care are soluţie doar dacă $\alpha = \beta\cdot a$ caz în care obţinem aceeaşi dependenţă între capitalul circulant şi cel fix cu cea de la cazul $\psi_1(t)$ = const. = 1.

Totuşi, acest caz este cu totul particular şi poate fi eliminat din analiză.

Situaţia $\psi_3(t) = 0$ atrage după sine succesiv $\psi_1(t) = 0$ şi $\psi_2(t) = 0$ care este în contradicţie cu condiţiile finale $\psi_1(T) = 1$, $\psi_2(T) = 1$.

Variantele 11 şi 12 conduc la sistemul de condiţii:

$$- \psi_1 + \psi_2 + \gamma\cdot\mu_2 = 0$$
$$\psi_3 - \mu_2 = 0$$
$$1 - \psi_1 + \mu_6 = 0$$

la varianta 11 şi:

$$- \psi_1 + \psi_2 + \gamma\cdot\mu_2 = 0$$
$$\psi_3 - \mu_2 = 0$$
$$1 - \psi_1 - \mu_5 = 0$$

la varianta 12.

În ambele variante, eliminând $\mu_2$ din primele două ecuaţii obţinem:

$$- \psi_1 + \psi_2 + \gamma\cdot\psi_3 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 = \psi_2 + \gamma\cdot\psi_3 \Rightarrow \dot{\psi}_1(t) = \dot{\psi}_2(t) + \gamma\cdot\dot{\psi}_3(t)$$

Înlocuind derivatele variabilelor adjuncte din sistemul canonic în relaţia de mai sus obţinem:

$$i\cdot\psi_1(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t) = (i + a)\cdot\psi_2(t) - \psi_1(t)\cdot\frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t) + \gamma\cdot[(i + b)\cdot\psi_3(t) + \psi_1(t)\cdot(1-f)\cdot r] \Leftrightarrow$$

$$[i - \frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_C}(t) + \frac{\partial U(K_F, K_C)}{\partial K_F}(t) - \gamma\cdot(1-f)\cdot r]\cdot\psi_1 = (i + a)\cdot\psi_2 + \gamma\cdot(i + b)\cdot\psi_3$$

Combinând această relaţie cu cea rezultată din sistemul de condiţii Kuhn-Tucker obţinem relaţiile:

$$a = b$$

$$\alpha\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \alpha\cdot p(Q) - \beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q - \beta\cdot p(Q) = \gamma\cdot r - a + 1$$

Prima relaţie aminteşte de modelul Ludwig (Ipoteza Ludwig: a = b) iar a doua este aceeaşi ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi şi are soluţia:

$$p(Q) = C\cdot\frac{1}{Q} + \frac{\gamma\cdot r - a + 1}{\alpha - \beta}$$

din care rezultă $K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}$.

În plus: $U(K_F(t),K_C(t)) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot(\overline{Q}) - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}] + a\cdot K_F(t)$

La varianta 10 avem atât $\psi_1(t)$ = const. = 1 cât şi $\psi_2 = 1 + \gamma\cdot\psi_3$ deci ecuaţiile în variabilele adjuncte din sistemul canonic devin:

$$\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_C}(t) = i$$

$$\gamma\cdot\dot{\psi}_3(t) = (i+a)\cdot(1+\gamma\cdot\psi_3) - \frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_F}(t)$$

$$\dot{\psi}_3(t) = (i+b)\cdot\psi_3(t) + (1-f)\cdot r$$

şi conduce la:

$$a = b$$

$$\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_C}(t) = i \Rightarrow (1-f)\cdot[\beta\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \beta\cdot p(Q) - 1] = i$$

$$\frac{\partial U(K_F,K_C)}{\partial K_F}(t) = (i+a) - (1-f)\cdot r \Rightarrow (1-f)\cdot[\alpha\cdot\frac{\partial p(Q)}{\partial Q}\cdot Q + \alpha\cdot p(Q) - a] + a = (i+a) - (1-f)\cdot r$$

sau:

$$a = b$$

$$(1-f)(\alpha + \beta\cdot r) = i\cdot(\beta - \alpha)$$

$$p(Q) = C\cdot\frac{1}{Q} + \frac{\frac{i}{1-f}+1}{\beta} \Rightarrow K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}.$$

Acest caz este de asemenea foarte particular şi va fi eliminat din analiză.

Din cele de mai sus rezultă că este suficient să analizăm doar sistemul format din primele ecuaţii ale sistemului canonic (care va fi numit în continuare ***sistemul canonic redus***) pentru variantele:

| | *Soluția* |
|---|---|
| 1 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $a = b$ |
| 2 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $a = b$ |
| 3 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 4 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 5 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 6 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 7 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 8 | $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 9 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare |
| 10 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$ |
| 11 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$ |
| 12 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 13 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 14 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 15 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 16 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 17 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 18 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$ |
| 19 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$ |
| 20 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 21 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 22 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 23 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 24 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare |
| 25 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$ |
| 26 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$ |
| 27 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = 0$ |
| 28 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = 0$ |
| 29 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ |
| 30 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 31 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 32 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 33 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $D$ oarecare, $F = 0$ |
| 34 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$ |
| 35 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$ |

| | |
|---|---|
| 36 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$ |
| 37 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 38 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = 0$ |
| 39 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$, $D$ oarecare, $F = 0$ |
| 40 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 41 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |

În continuare vom analiza evoluția variabilelor de stare rezolvând sistemul canonic redus:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t) - \overline{D}(t) - \overline{I_F}(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = \overline{F}(t) - b\cdot Y(t)$$

pentru fiecare din cele 41 de variante de mai sus.

## Analiza traiectoriilor

*Traiectoria* **1** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot Y(t)] + a\cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot\overline{I_F}(t) - b\cdot Y(t)$$

cu necunoscutele $K_F(t)$, $\overline{I_F}(t)$ și $Y(t)$.

Prin eliminarea lui $\dot{K}_F(t)$ din primele două ecuații obținem o ecuație algebrică în cele trei necunoscute din care îl putem scoate pe $\overline{I_F}(t)$ în funcție de $K_F(t)$ și $Y(t)$:

$$(1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot\overline{I_F}(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F(t) - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot Y(t)] + (1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot a\cdot K_F(t)$$

$$\overline{I_F}(t) = \left(\frac{(1-f)(\alpha - a\beta)}{\beta - \alpha} + a\right)\cdot K_F(t) - \frac{(1-f)r}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot Y(t) + \frac{1-f}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot(p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

din care, prin înlocuirea lui $\overline{I_F}(t)$ obţinut mai sus în ultimele două ecuaţii ale sistemului canonic redus, obţinem:

$$\dot{K}_F(t) = \frac{(1-f)(\alpha - a\beta)}{\beta - \alpha}\cdot K_F(t) - \frac{(1-f)r}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot Y(t) + \frac{1-f}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot(p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot\left(\frac{(1-f)(\alpha - a\beta)}{\beta - \alpha} + a\right)\cdot K_F(t) - \left(\frac{\gamma\beta(1-f)r}{\beta - \alpha} + b\right)\cdot Y(t) + \gamma\cdot\frac{1-f}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot[p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}]$$

care este un sistem liniar cu coeficienţi constanţi de două ecuaţii cu două necunoscute liniar. Prin rezolvarea acestuia se află evoluţiile capitalului fix şi datoriei firmei, evoluţia capitalului circulant din relaţia $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$ apoi evoluţia investiţiilor firmei şi din aceasta evoluţia împrumuturilor făcute de firmă.

*Traiectoria* **2** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY(t)] + a\cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t) - D_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot\overline{I_F}(t) - b\cdot Y(t)$$

cu necunoscutele $K_F(t)$, $\overline{I_F}(t)$ şi $Y(t)$.

Prin eliminarea lui $\dot{K}_F(t)$ din primele două ecuaţii obţinem o ecuaţie algebrică în cele trei necunoscute din care îl putem scoate pe $\overline{I_F}(t)$ în funcţie de $K_F(t)$ şi $Y(t)$:

$$(1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot\overline{I_F}(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F(t) - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot Y(t)] + (1 - \frac{\alpha}{\beta})\cdot a\cdot K_F(t) - D_{max}$$

$$\overline{I_F}(t) = \left(\frac{(1-f)(\alpha-a\beta)}{\beta-\alpha}+a\right)\cdot K_F(t) - \frac{(1-f)r}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot Y(t) + \frac{1-f}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot(p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}) - \frac{\beta}{\beta-\alpha}D_{max}$$

din care, prin înlocuirea lui $\overline{I_F}(t)$ obţinut mai sus în ultimele două ecuaţii ale sistemului canonic redus, obţinem:

$$\dot{K}_F(t) = \frac{(1-f)(\alpha-a\beta)}{\beta-\alpha}\cdot K_F(t) - \frac{(1-f)r}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot Y(t) + \frac{1-f}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot(p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}) - \frac{\beta}{\beta-\alpha}D_{max}$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot\left(\frac{(1-f)(\alpha-a\beta)}{\beta-\alpha}+a\right)\cdot K_F(t) - \left(\frac{\gamma\beta(1-f)r}{\beta-\alpha}+b\right)\cdot Y(t) + \gamma\cdot[\frac{1-f}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\beta}{\beta-\alpha}D_{max}]$$

care este un sistem liniar cu coeficienţi constanţi de două ecuaţii cu două necunoscute liniar. Prin rezolvarea acestuia se află evoluţiile capitalului fix şi datoriei firmei, apoi evoluţia investiţiilor firmei şi din aceasta evoluţia împrumuturilor făcute de firmă.

*Traiectoria* **3** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$\dot{K}_C(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}] + a\cdot K_F(t) - \overline{D}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$

$$0 = \overline{F}(t) = \overline{I_F}(t)$$

Din a doua ecuaţie rezultă evoluţia capitalului fix:

$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$ de unde rezultă imediat evoluţia capitalului circulant:

$K_C(t) = \dfrac{\overline{Q}}{\beta} - \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$ şi evoluţia dividendelor plătite din prima ecuaţie:

$$\overline{D}(t) = (f\cdot a + (-a + 1 - f)\cdot\frac{\alpha}{\beta})\cdot K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} + (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}]$$

Pe această traiectorie firma plăteşte dividende, dar din ce în ce mai puţine, are o evoluţie crescătoare asimptotic spre $\dfrac{\overline{Q}}{\beta}$ a capitalului circulant şi descrescătoare asimptotic spre 0 a capitalului fix, nu face împrumuturi, nu are datorii şi nu face investiţii, păstrând veniturile, preţul de vânzare şi producţia la un nivel constant.

*Traiectoria* **4** ($F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t))$$

$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$

$$Y(t) = \overline{I_F}(t) = \overline{F}(t) = 0$$

Din a treia ecuaţie rezultă că firma nu are datorii ($Y = 0$), nu se fac investiţii ($I_F(t) = 0$), nu se plătesc dividende (nu se retrag bani din firmă) ($D = 0$) şi are loc o restructurare a activităţii firmei prin scăderea puternică a capitalului fix al firmei:

$$K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} \to 0$$

iar evoluţia capitalului circulant va fi aflat din prima ecuaţie după înlocuirea în aceasta a lui $K_F(t)$.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

*Traiectoria* **5** ($F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = -a \cdot K_F(t)$$
$$Y(t) = \overline{I_F}(t) = \overline{F}(t) = 0$$

Din a treia ecuaţie rezultă că firma nu are datorii ($Y = 0$), nu se fac investiţii ($I_F(t) = 0$), se plătesc dividende la maxim ($D = D_{max}$) şi are loc o restructurare a activităţii firmei prin scăderea puternică a capitalului fix al firmei:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} \to 0$$

iar evoluţia capitalului circulant va fi aflat din prima ecuaţie după înlocuirea în aceasta a lui $K_F(t)$.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i} \cdot (1 - e^{-iT}) \cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)] \cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **6** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - a \cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r \cdot k \cdot (K_F + K_C)] + a \cdot K_F(t) - \overline{D}(t) - \overline{I_F}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a \cdot K_F(t)$$

$$k \cdot (\dot{K}_F(t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t)) = \gamma \cdot \overline{I_F}(t) - b \cdot k \cdot (K_F(t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

Din ultimele două ecuaţii se elimină termenul $\overline{I_F}(t)$ şi obţinem o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi în $K_F(t)$:

$$\dot{K}_F(t) = \frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta} \cdot K_F(t) - \frac{bk\overline{Q}}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}$$

din care se obţine imediat evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = [\frac{bk\overline{Q}}{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha} + (K_F^0 - \frac{bk\overline{Q}}{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha})\cdot e^{-\frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}T}]\cdot e^{-\frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}t}$$

Vom afla apoi evoluţia capitalului circulant din relaţia $K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$, evoluţia investiţiilor din a doua ecuaţie a sistemului canonic redus, evoluţia datoriei din relaţia $Y = k\cdot(K_F + K_C)$, evoluţia împrumuturilor din relaţia $F = \gamma\cdot I_F$ şi în final evoluţia dividendelor din prima ecuaţie a sistemului canonic redus.

*Traiectoria* **7** ($F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1 - f)\cdot r\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t)) - \overline{I_F}(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$k\cdot(\dot{K}_F(t) + \dot{K}_C(t)) = \gamma\cdot\overline{I_F}(t) - b\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$$

În acest caz sistemul s-a redus la trei ecuaţii cu trei necunoscute $\{K_F(t), K_C(t), I_F(t)\}$ din care doar $K_F(t)$ şi $K_C(t)$ apar derivate în ecuaţii. Înlocuind derivatele capitalului fix şi capitalului circulant din primele două ecuaţii în a treia ecuaţie obţinem:

$$k\cdot[U(K_F(t),K_C(t)) - (1 - f)\cdot r\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t)) - a\cdot K_F(t)] = \gamma\cdot I_F(t) - b\cdot k\cdot(K_F(t) + K_C(t))$$

din care vom afla valoarea investiţiei făcute de firmă $I_F(t)$ în funcţie de valorile capitalului fix şi circulant:

$$I_F(t) = V(K_F(t),K_C(t))$$

După înlocuirea expresiei investiţiei $I_F(t)$ obţinută mai sus în primele două ecuaţii se obţine un sistem de două ecuaţii în $K_F(t)$ şi $K_C(t)$:

$$\dot{K}_C(t) = f_1(K_F(t),K_C(t))$$
$$\dot{K}_F(t) = f_2(K_F(t),K_C(t))$$

şi condiţiile iniţiale $K_C(0) = K_C^0$, $K_F(0) = K_F^0$ din care vom scoate evoluţiile capitalului fix $K_F(t)$ şi a celui circulant $K_C(t)$, apoi valoarea investiţiei $I_F(t)$ şi a împrumutului $F(t)$.

Evoluția capitalului va depinde evident de forma funcției preț $p(K_F(t),K_C(t))$ și valoarea firmei va fi dată doar de valoarea finală actualizată a capitalului total.

În acest caz firma face împrumuturi la maxim $F = \gamma\cdot I_F$, nivelul capitalului împrumutat este maxim $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ și nu plătește dividende.

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = k\cdot(K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

*Traiectoria* **8** ($F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Rezolvarea în acest caz este asemănătoare cu cea de la traiectoria 7, singura diferență constând în faptul că în sistemul din care vor fi aflate evoluțiile capitalului vom avea și $D = D_{max}$.

În acest caz firma face împrumuturi la maxim $F = \gamma\cdot I_F$, nivelul capitalului împrumutat este maxim $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ și plătește dividende la maxim.

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = k\cdot(K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i}\cdot(1 - e^{-iT})\cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)]\cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **9** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare)

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F(t) - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot Y(t)] +$$

$$a\cdot K_F(t) - \overline{D}(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma\cdot I_{max} - b\cdot Y(t)$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ și a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Din a treia ecuaţie (liniară în $Y(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a datoriei firmei $Y^0$, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$, a ratei de înapoiere a debitelor $b$ şi a cotei maxime a împrumuturilor din valoarea investiţie $\gamma$ putem avea pentru evoluţia datoriei firmei:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} < 0$

Evoluţia capitalului circulant se obţine din relaţia $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$ şi înlocuind evoluţiile capitalului fix şi a datoriei în prima ecuaţie obţinem evoluţia dividendelor.

Pe această traiectorie firma face investiţii şi împrumuturi la maxim, evoluţia capitalului fix, a celui circulant, a datoriei şi dividendelor depinzând de valorile concrete ale parametrilor.

*Traiectoria* **10** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_{max}$, $D = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - I_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = \gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t)$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Din a treia ecuaţie (liniară în $Y(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$Y(t) = \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a datoriei firmei $Y^0$, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$, a ratei de înapoiere a debitelor $b$ şi a cotei maxime a împrumuturilor din valoarea investiţie $\gamma$ putem avea pentru evoluţia datoriei firmei:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b}$ pentru $Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} < 0$

Înlocuind evoluţiile capitalului fix şi a datoriei în prima ecuaţie obţinem o ecuaţie în capitalul circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$$

din care obţinem evoluţia capitalului circulant:

Pe această traiectorie firma nu plăteşte dividende (nu retrage bani), face investiţii şi împrumuturi la maxim şi are o evoluţie de stabilizare a valorii capitalului fix şi a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

*Traiectoria* **11** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D = D_{max}$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - I_{max} - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = \gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t)$$

Rezolvarea în acest caz este identică cu cea de la traiectoria 10 cu diferenţa că în expresia lui $f(t, K_C(t))$ din ecuaţia de dinamică a capitalului circulant va apărea şi valoarea maximă a dividendelor $D_{max}$.

Pe această traiectorie firma plăteşte dividende la maxim(retrage bani la maxim), face investiţii şi împrumuturi la maxim şi are o evoluţie de stabilizare a valorii capitalului fix şi a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i} \cdot (1 - e^{-iT}) \cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)] \cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **12** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$)

În acest caz din ultima ecuaţie a sistemului canonic redus, coroborată cu relaţia $F = \gamma \cdot I_F = \gamma \cdot I_{max}$ rezultă $I_{max} = 0$ ceea ce contrazice ipoteza $I_{max} > 0$, deci traiectoria nu este admisibilă.

*Traiectoria* **13** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_{max}$, $D = 0$, $Y = 0$)

În acest caz ecuaţia de dinamică a datoriei firmei devine:

$$0 = \gamma \cdot I_{max} + 0$$

de unde rezultă $I_{max} = 0$ în contradicţie cu ipoteza $I_{max} > 0$ deci traiectoria nu este admisibilă.

*Traiectoria* **14** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_{max}$, $D = D_{max}$, $Y = 0$)

În acest caz ecuaţia de dinamică a datoriei firmei devine:

$$0 = \gamma \cdot I_{max} + 0$$

de unde rezultă $I_{max} = 0$ în contradicţie cu ipoteza $I_{max} > 0$ deci traiectoria nu este admisibilă.

*Traiectoria* **15** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1-f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - a \cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F(t) - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r \cdot k \cdot (K_F - \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F(t) + \frac{\overline{Q}}{\beta})] + a \cdot K_F(t) - \overline{D}(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t)$$

Din ultima ecuație rezultă:

$$k \cdot (\dot{K}_F(t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t)) = \gamma \cdot I_{max} - b \cdot k \cdot (K_F(t) - \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F(t) + \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

$$\dot{K}_F(t) = \frac{\gamma\beta \cdot I_{\max} - bk\overline{Q}}{k(\beta - \alpha)} - b \cdot K_F(t)$$

care, coroborată cu a doua ecuație a sistemului, necesită $a = b$ și $I_{max} = \frac{\gamma\beta \cdot I_{\max} - bk\overline{Q}}{k(\beta - \alpha)}$, deci o situație cu totul particulară.

În acest caz capitalul circulant ar depinde liniar de capitalul fix, datoria firmei ar fi maximă, firma ar face împrumuturi și investiții la maxim, ar păstra producția, prețul și vânzările la un nivel constant și ar plăti dividende.

*Traiectoria* **16** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma \cdot I_{max}$, $D = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = \gamma \cdot I_{max} - b \cdot Y(t)$$

La acest sistem se adaugă și ecuația: $Y(t) = k \cdot (K_F(t) + K_C(t))$

Din ultimele două ecuații se află evoluțiile capitalului fix și datoriei firmei:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$Y(t) = \gamma\cdot\frac{I_{\max}}{b} + (Y^0 - \gamma\cdot\frac{I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}$$

din care obţinem imediat evoluţia capitalului circulant din egalitatea $Y = k\cdot(K_F + K_C)$:

$$K_C(t) = \frac{1}{k}\cdot Y(t) - K_F(t) = \frac{1}{k}\cdot[\gamma\cdot\frac{I_{\max}}{b} + (Y^0 - \gamma\cdot\frac{I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}] - [\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}] =$$

$$\left(\frac{\gamma}{kb} - \frac{1}{a}\right)\cdot I_{max} + \frac{1}{k}\cdot(Y^0 - \gamma\cdot\frac{I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t} - (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

Soluţia este admisibilă doar dacă verifică şi prima ecuaţie, caz în care avem o evoluţie a firmei în care nu se plătesc dividende, se fac investiţii şi împrumuturi la maxim, firma este îndatorată la maxim obţinând o creştere rapidă atât a capitalului fix cât şi a celui circulant.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = k\cdot(K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$[K_F(T) + K_C(T)]\cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **17** ($I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_{max}$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Discuţia este aceeaşi cu cea de la traiectoria 16 cu diferenţa că în acest caz se plătesc dividende, expresia acestora influenţând doar evoluţia capitalului circulant

Pe această traiectorie se fac investiţii şi împrumuturi la maxim, se plătesc dividende la maxim şi nivelul datoriei este maxim. Firma este într-o perioadă de creştere rapidă a capitalului fix şi a nivelului datoriei în paralel cu o evoluţie lentă a capitalului circulant.

Traiectoria poate fi traiectorie iniţială doar dacă $Y^0 = k\cdot(K_F^0 + K_C^0)$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i}\cdot(1 - e^{-iT})\cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)]\cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **18** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY(t)] +$$
$$a\cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

Din ultima ecuaţie se obţine evoluţia împrumuturilor făcute de firmă:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-bt}$$

care se înlocuieşte în prima ecuaţie. De asemenea, din a doua ecuaţie se scoate $\overline{I_F}(t)$ în funcţie de $K_F(t)$ şi se introduce în prima ecuaţie, rezultând o ecuaţie liniară cu coeficientul termenului de gradul unu constant în $K_F(t)$:

$$(1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\,(\frac{\alpha}{\beta} - a)\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY^0\cdot e^{-bt}]$$

După aflarea evoluţiei capitalului fix din această ecuaţie se pot afla imediat evoluţiile capitalului circulant şi ale investiţiilor firmei.

Pe această traiectorie firma nu face împrumuturi noi, nu dă dividende, îşi plăteşte datoriile şi are o evoluţie crescătoare a capitalului fix şi circulant.

*Traiectoria* **19** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY(t)] +$$
$$a\cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

Din ultima ecuaţie se obţine evoluţia împrumuturilor făcute de firmă:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-bt}$$

care se înlocuieşte în prima ecuaţie. De asemenea, din a doua ecuaţie se scoate $\overline{I_F}(t)$ în funcţie de $K_F(t)$ şi se introduce în prima ecuaţie, rezultând o ecuaţie liniară cu coeficientul termenului de gradul unu constant în $K_F(t)$:

$$(1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\,(\frac{\alpha}{\beta} - a)\cdot K_F(t) + (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY^0\cdot e^{-bt}] - D_{max}$$

După aflarea evoluţiei capitalului fix din această ecuaţie se pot afla imediat evoluţiile capitalului circulant şi ale investiţiilor firmei.

Pe această traiectorie firma nu face împrumuturi noi, plăteşte dividende maxime şi îşi plăteşte datoriile.

*Traiectoria* **20** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - a \cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}] + a \cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a \cdot K_F(t)$$
$$Y(t) = 0$$

Din a doua ecuaţie se scoate $\overline{I_F}(t)$ în funcţie de $K_F(t)$ şi se introduce în prima ecuaţie, rezultând o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi:

$$(1 - \frac{\alpha}{\beta}) \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f)(\frac{\alpha}{\beta} - a) \cdot K_F(t) + (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}]$$

După aflarea evoluţiei capitalului fix din această ecuaţie se pot afla imediat evoluţiile capitalului circulant şi ale investiţiilor firmei.

Pe această traiectorie firma nu face împrumuturi noi, nu are datorii, nu plăteşte dividende menţinând producţia, preţul produselor şi vânzările la un nivel constant.

*Traiectoria* **21** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - a \cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}] + a \cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t) - D_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a \cdot K_F(t)$$
$$Y(t) = 0$$

Din a doua ecuaţie se scoate $\overline{I_F}(t)$ în funcţie de $K_F(t)$ şi se introduce în prima ecuaţie, rezultând o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi:

$$(1 - \frac{\alpha}{\beta}) \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f)(\frac{\alpha}{\beta} - a) \cdot K_F(t) + (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}] - D_{max}$$

După aflarea evoluției capitalului fix din această ecuație se pot afla imediat evoluțiile capitalului circulant și ale investițiilor firmei.

Pe această traiectorie firma nu face împrumuturi noi, nu are datorii și plătește dividende maxime, menținând producția, prețul produselor și vânzările la un nivel constant.

*Traiectoria* **22** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot \dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot k\cdot(K_F - \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta})] + a\cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$

$$k\cdot(\dot{K}_F(t) + -\frac{\alpha}{\beta}\cdot \dot{K}_F(t)) = -b\cdot k\cdot(K_F + -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

și este un sistem de trei ecuații cu două necunoscute: $\overline{I_F}(t)$ și $K_F(t)$.

Scoatem $\overline{I_F}(t)$ din a doua ecuație și o înlocuim în prima și prima și a treia ecuație devin:

$$(1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot \dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[\frac{\alpha}{\beta} - a - rk\cdot(1-\frac{\alpha}{\beta})]\cdot K_F(t) + [(1-f)\cdot(p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}) - rk\cdot\frac{\overline{Q}}{\beta}]$$

$$\dot{K}_F(t) = -b\cdot K_F(t) - \frac{bk}{\beta-\alpha}\overline{Q}$$

din care rezultă că, pentru ca sistemul să aibă soluție, este necesar ca:

$$(1-f)\cdot[\frac{\alpha}{\beta} - a - rk\cdot(1-\frac{\alpha}{\beta})] = -b\cdot(1-\frac{\alpha}{\beta})$$

$$(1-f)\cdot(p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}) - rk\cdot\frac{\overline{Q}}{\beta} = -\frac{bk}{\beta}\overline{Q}$$

Situația este evident foarte particulară și nu va mai fi analizată.

*Traiectoria* **23** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\,k\cdot(K_F - \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta})] + a\cdot K_F(t) - \overline{I_F}(t) - D_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = \overline{I_F}(t) - a\cdot K_F(t)$$

$$k\cdot(\dot{K}_F(t) + -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t)) = -\,b\cdot k\cdot(K_F + -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

şi este un sistem de trei ecuaţii cu două necunoscute: $\overline{I_F}(t)$ şi $K_F(t)$.

Scoatem $\overline{I_F}(t)$ din a doua ecuaţie şi o înlocuim în prima şi prima şi a treia ecuaţie devin:

$$(1-\frac{\alpha}{\beta})\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[\frac{\alpha}{\beta} - a - rk\cdot(1-\frac{\alpha}{\beta})]\cdot K_F(t) + [(1-f)\cdot(p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}) - rk\cdot\frac{\overline{Q}}{\beta} - D_{max}]$$

$$\dot{K}_F(t) = -b\cdot K_F(t) - \frac{bk}{\beta-\alpha}\overline{Q}$$

din care rezultă că, pentru ca sistemul să aibă soluţie, este necesar ca:

$$(1-f)\cdot[\frac{\alpha}{\beta} - a - rk\cdot(1-\frac{\alpha}{\beta})] = -b\cdot(1-\frac{\alpha}{\beta})$$

$$(1-f)\cdot(p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}) - rk\cdot\frac{\overline{Q}}{\beta} - D_{max} = -\frac{bk}{\beta}\overline{Q}$$

Situaţia este evident foarte particulară şi nu va mai fi analizată.

*Traiectoria* **24** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F = 0$, $D$ oarecare)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY(t)] + a\cdot K_F(t) - \overline{D}(t)$$

$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$

Din ultimele două ecuaţii se obţin evoluţiile capitalului fix:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} \Rightarrow K_C(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{\overline{Q}}{\beta}$$

şi datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

care se înlocuiesc în prima ecuaţie din care se află evoluţia dividendelor plătite.

Pe această traiectorie firma nu face nici împrumuturi nici investiţii, plăteşte ratele la credite, are o evoluţie descrescătoare a capitalului fix şi crescătoare a celui circulant pe fondul menţinerii unui nivel constant al producţiei, preţului şi vânzărilor.

*Traiectoria* **25** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$)

Sistemul canonic devine:

$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t)$

$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$

$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$

Din ultimele două ecuaţii se obţin imediat evoluţiile capitalului fix şi datoriei firmei:

$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$

$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$

iar după înlocuirea acestora în prima ecuaţie ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$$

din care va rezulta evoluţia capitalului circulant.

Pe această traiectorie firma nu face investiţii, nu face împrumuturi, nu plăteşte dividende, are loc o scădere a capitalului fix în paralel cu eliminarea rapidă a datoriilor, evoluţia capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului

Valoarea finală a firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu.

*Traiectoria* **26** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = (U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

Din ultimele două ecuaţii se obţin imediat evoluţiile capitalului fix şi datoriei firmei:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$$
$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

iar după înlocuirea acestora în prima ecuaţie ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$$

din care va rezulta evoluţia capitalului circulant.

Pe această traiectorie firma nu face investiţii, nu face împrumuturi, plăteşte dividende la maxim, are loc o scădere a capitalului fix în paralel cu eliminarea rapidă a datoriilor, evoluţia capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului

Valoarea maximă a valorii firmei va fi:

$$\frac{1}{i} \cdot (1 - e^{-iT}) \cdot D_{max} + [K_F(T) + K_C(T)] \cdot e^{-iT}$$

*Traiectoria* **27** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - a \cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta}] + a \cdot K_F(t) - \overline{D}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = - a \cdot K_F(t)$$
$$Y(t) = F(t) = I_F(t) = 0$$

Din a doua ecuaţie aflăm evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} \Rightarrow K_C(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{\overline{Q}}{\beta}$$

care se înlocuieşte în prima ecuaţie din care se scoate evoluţia dividendelor.

Pe această traiectoria firma nu are datorii, nu face investiţii, plăteşte dividende, are loc o uzură a capitalului fix suplinită de o creştere a capitalului circulant utilizat, pe fondul unei menţineri constante a producţiei, preţului de vânzare şi a volumului vânzărilor.

*Traiectoria* **28** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t))$$
$$\dot{K}_F(t) = -a \cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din acesta rezultă imediat evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$$

şi apoi, după înlocuirea acestei soluţii în prima ecuaţie, cea a capitalului circulant.

Pe această traiectorie firma nu are datorii, nu face împrumuturi, nu face investiţii, nu plăteşte dividende, are loc o scădere a capitalului fix, evoluţia capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului.

*Traiectoria* **29** ($F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = -a \cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din acesta rezultă imediat evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$$

şi apoi, după înlocuirea acestei soluţii în prima ecuaţie, cea a capitalului circulant.

Pe această traiectorie firma nu are datorii, nu face împrumuturi, nu face investiţii, plăteşte dividende la maxim, are loc o scădere a capitalului fix, evoluţia capitalului circulant depinzând de parametrii sistemului.

*Traiectoria* **30** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot k\cdot(K_F - \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F$$

$$+\frac{\overline{Q}}{\beta})] + a\cdot K_F(t) - \overline{D}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$

$$k\cdot(\dot{K}_F(t) + -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t)) = -b\cdot k\cdot(K_F(t) - \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F(t) + \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

Ultimele două ecuaţii formează un sistem de două ecuaţii cu o singură necunoscută:

$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{K}_F(t)) = -b\cdot K_F(t) - \frac{b\overline{Q}}{\beta-\alpha}$$

care are soluţie doar dacă $a = b$ şi $b\cdot\overline{Q} = 0 \Rightarrow \overline{Q} = 0 \Rightarrow K_F(t) = K_C(t) = 0$ deci traiectoria nu este admisibilă.

*Traiectoria* **31** ($F = \gamma\cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic va fi:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1-f)\cdot r\cdot Y(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

la care se adaugă ecuaţia suplimentară $Y = k\cdot(K_F + K_C)$.

Acest caz este posibil doar dacă soluţia dată de sistemul canonic verifică şi ecuaţia suplimentară.

Din ultimele două ecuaţii se află imediat evoluţia capitalului fix şi a datoriei firmei:

$$K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$$

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

şi din relaţia suplimentară evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \frac{1}{k}\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$$

Soluţia este admisibilă doar dacă verifică şi ecuaţia de dinamică a capitalului circulant, ceea ce e echivalent cu:

$$U(K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}, \frac{1}{k}\cdot Y^0 \cdot e^{-b\cdot t} - K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}) = -b\frac{1}{k}\cdot Y^0 \cdot e^{-b\cdot t} + aK_F^0 \cdot e^{-a\cdot t} + (1-f)\cdot r Y^0 \cdot e^{-b\cdot t}$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

*Traiectoria* **32** ($F = \gamma\cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic va fi:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1-f)\cdot r Y(t) - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = -a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

la care se adaugă ecuaţia suplimentară $Y = k\cdot(K_F + K_C)$.

Acest caz este posibil doar dacă soluţia dată de sistemul canonic verifică şi ecuaţia suplimentară.

Din ultimele două ecuaţii se află imediat evoluţia capitalului fix şi a datoriei firmei:

$$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$$
$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b\cdot t}$$

şi din relaţia suplimentară evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \frac{1}{k}\cdot Y^0 \cdot e^{-b\cdot t} - K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$$

Soluţia este admisibilă doar dacă verifică şi ecuaţia de dinamică a capitalului circulant, ceea ce e echivalent cu:

$$U(K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}, \frac{1}{k}\cdot Y^0 \cdot e^{-b\cdot t} - K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}) = -b\frac{1}{k}\cdot Y^0 \cdot e^{-b\cdot t} + aK_F^0 \cdot e^{-a\cdot t} + (1-f)\cdot r Y^0 \cdot e^{-b\cdot t} + D_{max}$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

*Traiectoria* **33** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $D$ oarecare, $F = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot \dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot \overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - rY(t)] + a\cdot K_F(t) - I_{max} - \overline{D}(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

Din ultima ecuaţie se află evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$$

Prin înlocuirea acestora în prima ecuaţie se obţine evoluţia dividendelor iar din relaţia $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C$ se obţine evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \frac{\overline{Q}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot [\frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}]$$

Pe această traiectorie firma face investiţii la maxim, nu mai face împrumuturi, plăteşte dividende şi rate la credite menţinând un nivel constant al producţiei şi preţului de vânzare pe fondul unui raport invers al evoluţiei capital circulant – capital fix.

*Traiectoria* **34** ($I_F = I_{max}$ , $D = 0$, $F = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - I_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

Din ultima ecuaţie obţinem evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{max}}{a} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0$ - $\frac{I_{\max}}{a}$ < 0

Cele două soluţii găsite se înlocuiesc în prima ecuaţie şi obţinem ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$$

din care se află evoluţia capitalului circulant

Pe această traiectorie firma nu plăteşte dividende (nu retrage bani), face investiţii la maxim, nu face împrumuturi şi are o evoluţie de stabilizare a valorii capitalului fix şi de scădere a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

*Traiectoria* **35** ($I_F = I_{max}$ , $D = D_{max}$, $F = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1 - f)\cdot r\, Y(t) - I_{max} - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b\cdot Y(t)$$

Din ultima ecuaţie obţinem evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0$ - $\frac{I_{\max}}{a}$ > 0;

2. O evoluţie constantă $K_F(t)$ = $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0$ - $\frac{I_{\max}}{a}$ = 0;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0$ - $\frac{I_{\max}}{a}$ < 0

Cele două soluţii găsite se înlocuiesc în prima ecuaţie şi obţinem ecuaţia de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$$

din care se află evoluţia capitalului circulant

Pe această traiectorie firma, plăteşte dividende la maxim, face investiţii la maxim, nu face împrumuturi şi are o evoluţie de stabilizare a valorii capitalului fix şi de scădere a datoriei firmei.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei plus suma dividendelor plătite în valoare actualizată.

*Traiectoria* **36** ($\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$)

Sistemul canonic redus devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - a \cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r Y(t)] + a \cdot K_F(t) - I_{max}$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$

$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

Sistemul are trei ecuaţii şi două necunoscute: $K_F(t)$ şi $Y(t)$.

Din a treia ecuaţie se află evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

care se înlocuieşte în prima ecuaţie şi primele două ecuaţii conduc la:

$$-\frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{K}_F(t) = (1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}] + a \cdot K_F(t) - I_{max} + (1 - f) \cdot (\frac{\alpha}{\beta} - a) \cdot K_F(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$

care atrage condiţiile:

$$[(1 - f) \cdot (\frac{\alpha}{\beta} - a) + a] \cdot \frac{\beta}{\alpha} = a$$

$$(1 - f) \cdot [p(\overline{Q}) \cdot \overline{Q} - \frac{\overline{Q}}{\beta}] - I_{max} = I_{max}$$

$$(1 - f) \cdot r \cdot Y^0 = 0$$

Deoarece situaţia este mult prea particulară va fi eliminată din analiză.

*Traiectoria* **37** ($I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - I_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + \left(K_F^0 - \frac{I_{max}}{a}\right) \cdot e^{-a \cdot t}$$

În funcţie de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ și a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{max}}{a} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{max}}{a} < 0$

Soluția găsită se înlocuiește în prima ecuație și obținem ecuația de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$$

din care obținem evoluția capitalului circulant.

Pe această traiectorie firma nu plătește dividende (nu retrage bani), face investiții la maxim, nu are datorii, nu face împrumuturi și are o evoluție de stabilizare a valorii capitalului fix.

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

*Traiectoria* **38** ($I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - I_{max} - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$0 = 0$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ și a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

Soluția găsită se înlocuiește în prima ecuație și obținem ecuația de dinamică a capitalului circulant:

$$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$$

din care obținem evoluția capitalului circulant.

Pe această traiectorie firma plătește dividende la maxim, face investiții la maxim, nu are datorii, nu face împrumuturi și are o evoluție de stabilizare a valorii capitalului fix.

Traiectoria poate fi traiectorie inițială doar dacă $Y^0 = 0$.

Valoarea maximă a valorii firmei va fi dată de valoarea finală actualizată a capitalului propriu al firmei.

*Traiectoria* **39** ($\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$, $D$ oarecare, $F = 0$)

Sistemul canonic devine:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t) = (1-f)\cdot[p(\overline{Q})\cdot\overline{Q} - a\cdot K_F(t) + \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F - \frac{\overline{Q}}{\beta} - r\cdot k\cdot(K_F(t) - \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F(t) + \frac{\overline{Q}}{\beta})] + a\cdot K_F(t) - I_{max} - \overline{D}(t)$$

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$

$$k\cdot(\dot{K}_F(t) - \frac{\alpha}{\beta}\cdot\dot{K}_F(t)) = -b\cdot k\cdot(K_F(t) - \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F(t) + \frac{\overline{Q}}{\beta})$$

Din ultimele două ecuații cu o singură necunoscută rezultă:

$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{K}_F(t) = - b \cdot K_F(t) - \frac{b\overline{Q}}{\beta - \alpha}$$

şi, pentru a avea soluţie, este necesar ca $a = b$ şi $I_{max} = - \frac{b\overline{Q}}{\beta - \alpha}$

Situaţia este de asemenea foarte puţin probabilă şi va fi eliminată din analiză.

*Traiectoria* **40** ($I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = k \cdot (K_F + K_C)$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t), K_C(t)) - (1 - f) \cdot r \cdot Y(t) - I_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a \cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = - b \cdot Y(t)$$

la care se adaugă şi condiţia suplimentară $Y = k \cdot (K_F + K_C)$.

Din ultima ecuaţie obţinem evoluţia datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

Din a doua ecuaţie (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluţia capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$$

În funcţie de valoarea iniţială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiţiei $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluţie descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluţie constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluţie crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

şi din relaţia suplimentară evoluţia capitalului circulant:

$$K_C(t) = \frac{1}{k} \cdot Y^0 \cdot e^{-b \cdot t} - [\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}]$$

Soluția este admisibilă doar dacă verifică şi ecuația de dinamică a capitalului circulant, ceea ce e echivalent cu:

$$U\left(K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}, \frac{1}{k}\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}\right) = -b\frac{1}{k}\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} + a\left(K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}\right)\cdot e^{-a\cdot t} + (1 - f)\cdot r\, Y^0\cdot e^{-b\cdot t} + I_{max}$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

*Traiectoria* **41** ($I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$)

Sistemul canonic devine:

$$\dot{K}_C(t) = U(K_F(t),K_C(t)) - (1 - f)\cdot r\, Y(t) - I_{max} - D_{max}$$
$$\dot{K}_F(t) = I_{max} - a\cdot K_F(t)$$
$$\dot{Y}(t) = -b\cdot Y(t)$$

la care se adaugă şi condiția suplimentară $Y = k\cdot(K_F + K_C)$.

Din ultima ecuație obținem evoluția datoriei firmei:

$$Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$$

Din a doua ecuație (liniară în $K_F(t)$) vom scoate evoluția capitalului fix:

$$K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + \left(K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}\right)\cdot e^{-a\cdot t}$$

În funcție de valoarea inițială a capitalului fix, a valorii maxime posibile a investiției $I_{max}$ şi a ratei de amortizare $a$ putem avea:

1. O evoluție descrescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} > 0$;

2. O evoluție constantă $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} = 0$;

3. O evoluție crescătoare asimptotic spre $\frac{I_{\max}}{a}$ pentru $K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a} < 0$

şi din relația suplimentară evoluția capitalului circulant:

$$K_C(t) = \frac{1}{k}\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - \left[\frac{I_{\max}}{a} + \left(K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}\right)\cdot e^{-a\cdot t}\right]$$

Soluția este admisibilă doar dacă verifică şi ecuația de dinamică a capitalului circulant, ceea ce e echivalent cu:

$$U(K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}, \frac{1}{k}\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} - K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}) = -b\frac{1}{k}\cdot Y^0\cdot e^{-b\cdot t} + a(K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t} + (1 - f)\cdot r Y^0\cdot e^{-b\cdot t} + D_{max} + I_{max}$$

ceea ce este evident un caz cu totul particular.

## Concluzii

În urma analizei celor 41 de traiectorii rezultă că 4 sunt neadmisibile (12, 13, 14 și 30) și 11 sunt foarte improbabile (15, 16, 17, 22, 23, 31, 32, 36, 39, 40, 41) analiza putând fi redusă, fără a pierde generalitatea, doar la restul de 26 traiectorii principale, care sunt sintetizate în tabelul de mai jos:

| | *Condiții* | *Soluția* |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $a = b$ | $K_F$, $Y$ – sistem liniar cu coef. const. |
| 2 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $a = b$ | $K_F$, $Y$ – sistem liniar cu coef. const. |
| 3 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$, $Y = 0$,<br>$K_C(t) = \frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F^0\cdot e^{-a\cdot t} + \frac{\overline{Q}}{\beta}$ |
| 4 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$, $Y = 0$ |
| 5 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0\cdot e^{-a\cdot t}$, $Y = 0$ |
| 6 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ | $K_F(t) = [\frac{bk\overline{Q}}{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha} + (K_F^0 - \frac{bk\overline{Q}}{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha})\cdot e^{-\frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}T}]\cdot e^{-\frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}t}$<br>$K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 7 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ | $\dot{K}_C(t) = f_1(K_F(t), K_C(t))$<br>$\dot{K}_F(t) = f_2(K_F(t), K_C(t))$<br>$Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 8 | $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$, $Y = k\cdot(K_F + K_C)$ | $\dot{K}_C(t) = f_1(K_F(t), K_C(t))$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $\dot{K}_F(t) = f_2(K_F(t), K_C(t))$<br>$Y = k\cdot(K_F + K_C)$ |
| 9 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D$ oarecare | $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$<br>$Y(t) = \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}$<br>$K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$ |
| 10 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$<br>$Y(t) = \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$ |
| 11 | $I_F = I_{max}$, $F = \gamma\cdot I_F$, $D = D_{max}$ | $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$<br>$Y(t) = \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma\cdot I_{\max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$ |
| 18 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$ | $Y(t) = Y^0\cdot e^{-bt}$<br>$\dot{K}_F(t) = A\cdot K_F(t) + f(t)$<br>$K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$ |
| 19 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$ | $Y(t) = Y^0\cdot e^{-bt}$<br>$\dot{K}_F(t) = A\cdot K_F(t) + f(t)$<br>$K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$ |
| 20 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $D = 0$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ | $Y(t) = 0$<br>$\dot{K}_F(t) = A\cdot K_F(t) + B$<br>$K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$ |
| 21 | $\alpha\cdot K_F + \beta\cdot K_C = \overline{Q}$, $D = D_{max}$, $I_F$ oarecare, $F = 0$, $Y = 0$ | $Y(t) = 0$<br>$\dot{K}_F(t) = A\cdot K_F(t) + B$<br>$K_C = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot K_F + \frac{\overline{Q}}{\beta}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 24 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$K_C(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| 25 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$ |
| 26 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$ |
| 27 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D$ oarecare, $Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$K_C(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$Y(t) = 0$ |
| 28 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = 0$, $Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = 0$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$ |
| 29 | $F = \gamma \cdot I_F = 0$, $D = D_{max}$, $Y = 0$ | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = 0$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$ |
| 33 | $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$, $I_F = I_{max}$, $D$ oarecare, $F = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$<br>$K_C(t) = \frac{\overline{Q}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot [\frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}]$ |
| 34 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$ |
| 35 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{\max}}{a}) \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$ |

| | | |
|---|---|---|
| 37 | $I_F = I_{max}$, $D = 0$, $F = 0$, $Y = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$<br>$Y(t) = 0$ |
| 38 | $I_F = I_{max}$, $D = D_{max}$, $F = 0$, $Y = 0$ | $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$<br>$\dot{K}_C(t) = f(t, K_F(t))$<br>$Y(t) = 0$ |

Din cele de mai sus se observă că cele mai des întâlnite evoluţii posibile ale capitalului fix se încadrează tot în unul din cazurile studiate la situaţia cu concurenţă perfectă, în care rezolvarea se reducea la o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi.

Variantele sunt detaliate în continuare, în paralel cu reprezentarea grafică a acestora, analiza celorlarte variante fiind făcută pe cazuri particulare

a) $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a\cdot t}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei capitalului fix are forma din figura 9.

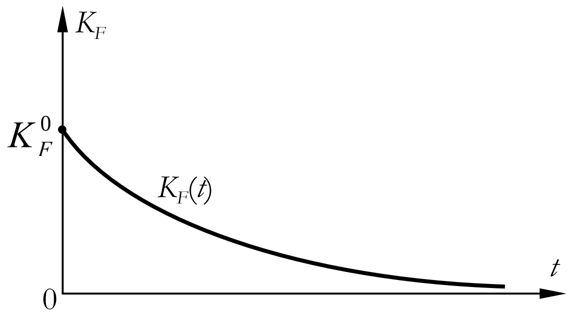



Figura 9

b) $K_F(t) = \frac{I_{max}}{a} + (K_F^0 - \frac{I_{max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$ şi $K_F^0 > \frac{I_{max}}{a}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei capitalului fix are forma din figura 10.

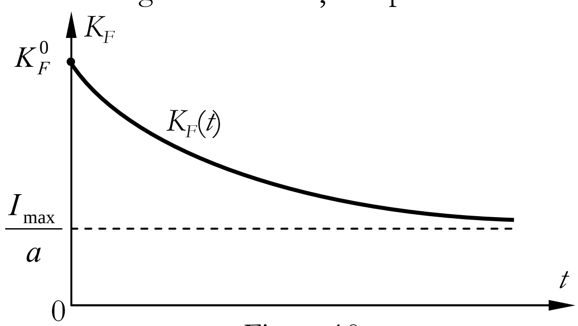



Figura 10

c) $K_F(t) = \dfrac{I_{\max}}{a}$

Reprezentarea grafică a evoluției capitalului fix are forma din figura 11.

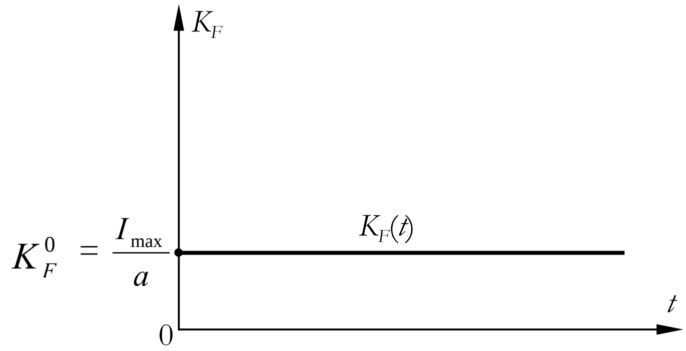



Figura 11

d) $K_F(t) = \dfrac{I_{\max}}{a} + (K_F^0 - \dfrac{I_{\max}}{a})\cdot e^{-a\cdot t}$ și $K_F^0 < \dfrac{I_{\max}}{a}$

Reprezentarea grafică a evoluției capitalului fix are forma din figura 12.

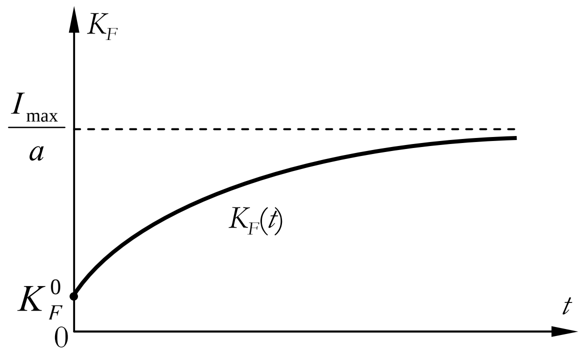



Figura 12

Cele mai întâlnite evoluțiile posibile ale datoriei firmei se încadrează în unul din cazurile:

a) $Y(t) = Y^0\cdot e^{-b\cdot t}$

Reprezentarea grafică a evoluției datoriei firmei are forma din figura 13.

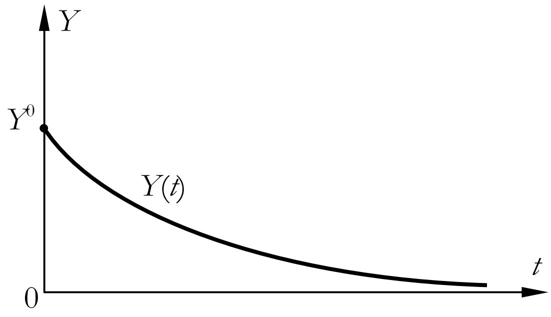



Figura 13

b) $Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ şi $Y^0 > \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$

Reprezentarea grafică a evoluției datoriei firmei are forma din figura 14.

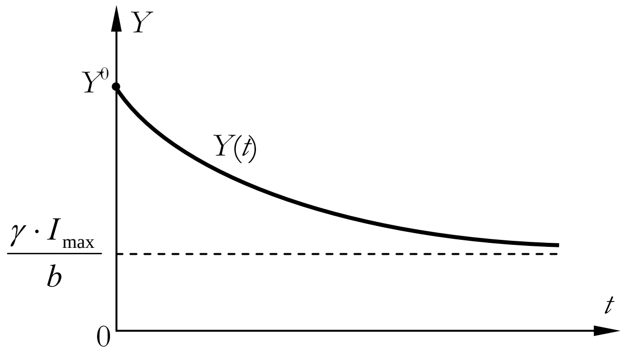



Figura 14

c) $Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}) \cdot e^{-b \cdot t}$ şi $Y^0 = \frac{\gamma \cdot I_{\max}}{b}$

Reprezentarea grafică a evoluției datoriei firmei are forma din figura 15.

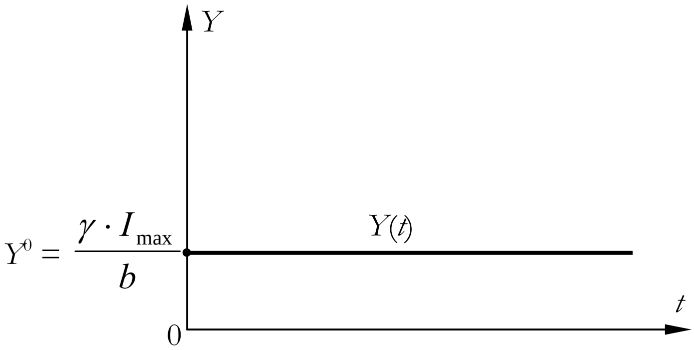



Figura 15

d) $Y(t) = \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b} + (Y^0 - \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b})\cdot e^{-b\cdot t}$ şi $Y^0 < \frac{\gamma \cdot I_{max}}{b}$

Reprezentarea grafică a evoluţiei datoriei firmei are forma din figura 16.

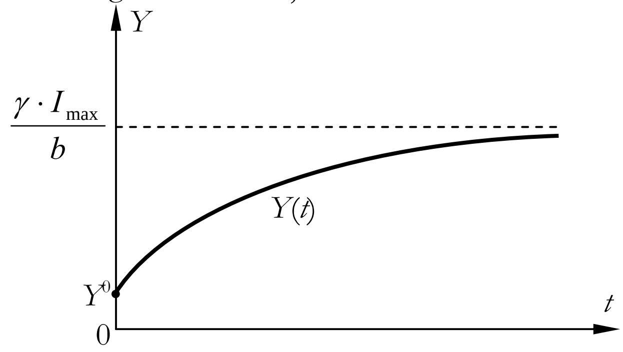



Figura 16

Traiectoria capitalului circulant este mult mai complicată, fiind dependentă de mai mulţi din parametrii modelului şi va fi studiată pe cazuri particulare.

## Traiectorii multiple

Din analiza traiectoriilor rezultă că unele traiectorii pot fi traiectorii iniţiale doar în cazuri cu totul particulare şi pot fi eliminate din analiză fără a restrânge semnificativ mulţimea cazurilor posibile.

De asemenea, traiectoria de pornire va fi în funcţie de valorile iniţiale ale capitalului fix, capitalului circulant şi a datoriei firmei.

Din analiza traiectoriilor rezultă că unele traiectorii pot fi traiectorii iniţiale doar în cazuri cu totul particulare şi pot fi eliminate din analiză fără a restrânge semnificativ mulţimea cazurilor posibile.

De asemenea, traiectoria de pornire va fi în funcţie de valorile iniţiale ale capitalului fix, capitalului circulant şi a datoriei firmei.

Putem de asemenea să considerăm ca foarte improbabile traiectoriile în care variabilele de decizie sunt pe limitele maxime posibile, aceste limite fiind fixate în principal pentru a asigura soluţia matematică analitică a modelului. Deşi traiectoriile pe care nu se plătesc dividende par foarte probabile, ţinând cont de situaţia foarte dificilă a firmelor din România în perioada analizată, în care numai mobilizarea întregilor resurse ale firmei în activitatea firmei putea asigura supravieţuirea firmei, totuşi nu trebuie uitat că majoritatea firmelor mici din România sunt de fapt foarte mici, majoritatea firme familiale, care constituie singura sursă de venituri pentru proprietarii lor. În continuare vom accepta totuşi aceste traiectorii dar cu amendamentul că ele nu pot fi urmate de firmă decât perioade scurte sau foarte scurte de timp.

Din acest motiv, la analiza concatenarităţii traiectoriilor şi structura traiectoriei optime totale vom lua în considerare, ca traiectorii principale, doar traiectoriile în care $I(t) < I_{max}$ şi $D(t) < D_{max}$.

Dacă ţinem cont de consideraţiile de mai sus rămân în discuţie doar 11 traiectorii care îndeplinesc aceste două condiţii, din care doar patru îndeplinesc şi condiţia de a se plăti dividende (traiectoriile 3, 6, 24 şi 27).

Cele unsprezece traiectorii sunt listate în tabelul de mai jos:

| | *Comenzi* | *Variabile de stare* |
|---|---|---|
| 1 | $F = \gamma \cdot I_F$<br>$D = 0, a = b$ | $K_F$, $Y$ – sistem liniar cu coef. const.<br>$\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$ |
| 3 | $F = \gamma \cdot I_F$<br>$D$ oarecare | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$,<br>$K_C(t) = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$, $\alpha \cdot K_F + \beta \cdot K_C = \overline{Q}$<br>$Y = 0$, |
| 4 | $F = \gamma \cdot I_F$,<br>$D = 0$ | $K_C(t)$ – ecuaţie dif. neliniară<br>$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = 0$ |
| 6 | $F = \gamma \cdot I_F$<br>$D$ oarecare | $K_F(t) = [\dfrac{bk\overline{Q}}{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha} + (K_F^0 - \dfrac{bk\overline{Q}}{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha})$<br>$\cdot e^{-\frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}T}] \cdot e^{-\frac{a\beta\gamma - bk\beta + bk\alpha}{k\beta - k\alpha - \gamma\beta}t}$<br>$K_C = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot K_F + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$Y(t) = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 7 | $F = \gamma \cdot I_F$<br>$D = 0$ | $\dot{K}_C(t) = f_1(K_F(t), K_C(t))$<br>$\dot{K}_F(t) = f_2(K_F(t), K_C(t))$<br>$Y(t) = k \cdot (K_F + K_C)$ |
| 18 | $D = 0$,<br>$I_F$ oarecare<br>$F = 0$ | $K_C = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot K_F + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$\dot{K}_F(t) = A \cdot K_F(t) + f(t)$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-bt}$ |
| 20 | $D = 0$,<br>$I_F$ oarecare,<br>$F = 0$ | $\dot{K}_F(t) = A \cdot K_F(t) + B$<br>$K_C = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot K_F + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $Y(t) = 0$ |
| 24 | $F = I_F = 0$<br>$D$ oarecare | $K_C(t) = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| 25 | $F = 0$<br>$I_F = 0$<br>$D = 0$ | $\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$<br>$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = Y^0 \cdot e^{-b \cdot t}$ |
| 27 | $F = I_F = 0$,<br>$D$ oarecare | $K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$K_C(t) = -\dfrac{\alpha}{\beta} \cdot K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t} + \dfrac{\overline{Q}}{\beta}$<br>$Y(t) = 0$ |
| 28 | $F = 0$<br>$I_F = 0$<br>$D = 0$ | $\dot{K}_C(t) = f(t, K_C(t))$<br>$K_F(t) = K_F^0 \cdot e^{-a \cdot t}$<br>$Y(t) = 0$ |

Totuşi, existând foarte multe cazuri posibile teoretic (cel puţin cele 11 cele mai probabile de mai sus) este mult mai eficient să studiem traiectoria optimă pe cazuri particulare.

## c) cazul discret în condiţii de concurenţă perfectă

Valorile variabilelor de stare şi de comanda vor fi considerate ca în figura de mai jos:

$$K_F^0, K_C^0, Y^0 \qquad K_F^1, K_C^1, Y^1 \qquad K_F^2, K_C^2, Y^2 \qquad \cdots \qquad K_F^{T-1}, K_C^{T-1}, Y^{T-1} \qquad K_F^T, K_C^T, Y^T$$

$$t=0 \quad \underbrace{\qquad}_{I_F^1, F^1, D^1} \quad t=1 \quad \underbrace{\qquad}_{I_F^2, F^2, D^2} \quad t=2 \qquad \cdots \qquad t=T\text{-}1 \quad \underbrace{\qquad}_{I_F^T, F^T, D^T} \quad t=T$$

*Modelul matematic* este în acest caz:

$$\max_{I_F, F, D} \sum_{t=1}^{T} \frac{D^t}{(1+i)^t} + \frac{K_F^T + K_C^T}{(1+i)^T}$$

$$K_F^t - K_F^{t-1} + K_C^t - K_C^{t-1} = (1-f)\cdot[p\cdot(a\cdot K_F^{t-1} + \beta\cdot K_C^{t-1}) - a\cdot K_F^{t-1} - K_C^{t-1} - r\cdot Y^{t-1}] - D^t$$

$$K_F^t - K_F^{t-1} = I_F^t - a\cdot K_F^{t-1}$$

$$Y^t - Y^{t-1} = F^t - b\cdot Y^{t-1}$$

$$I_{min} \le I_F^t \le I_{max}; \quad I_{min} < 0 < I_{max}.$$

$$0 \le Y^t \le k\cdot(K_F^t + K_C^t)$$

$$0 \le D^t \le D_{max}$$

$$0 \le F^t \le \gamma\cdot I_F^t$$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$

$\alpha, \beta, p > 0$

Deoarece din $\gamma\cdot I_F^t \ge F^t \ge 0$ rezultă evident $I_{min} \le I_F^t$ această condiţie nu mai este efectivă şi va fi eliminată din sistem, prima şi a patra condiţie putând fi scrise împreună prin:

$$0 \le F^t \le \gamma\cdot I_F^t \le \gamma\cdot I_{max}$$

Prin înlocuirea variaţiei capitalului fix în prima ecuaţie de stare a sistemului obţinem:

$$I_F^t - a\cdot K_F^{t-1} + K_C^t - K_C^{t-1} = (1-f)\cdot[p\cdot(a\cdot K_F^{t-1} + \beta\cdot K_C^{t-1}) - a\cdot K_F^{t-1} - K_C^{t-1} - r\cdot Y^{t-1}] - D^t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$K_C^t - K_C^{t-1} = (1-f)\cdot[p\cdot(a\cdot K_F^{t-1} + \beta\cdot K_C^{t-1}) - a\cdot K_F^{t-1} - K_C^{t-1} - r\cdot Y^{t-1}] + a\cdot K_F^{t-1} - I_F^t - D^t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$K_C^t = [f + (1-f)\cdot p\cdot\beta]\cdot K_C^{t-1} + [fa + (1-f)\cdot p\cdot a]\cdot K_F^{t-1} - (1-f)\cdot r\, Y^{t-1} - I_F^t - D^t$$

*Sistemul de ecuații de stare* ale sistemului devine:

$K_C^t = [f + (1-f)\cdot p\cdot\beta]\cdot K_C^{t-1} + [fa + (1-f)\cdot p\cdot a]\cdot K_F^{t-1} - (1-f)\cdot r\, Y^{t-1} - I_F^t - D^t$

$K_F^t = I_F^t + (1-a)\cdot K_F^{t-1}$

$Y^t = F^t + (1-b)\cdot Y^{t-1}$

fiind un sistem de ecuații cu diferențe finite de trei ecuații și trei necunoscute cu coeficienți constanți, comenzile fiind $I_F^t$, $F^t$ și $D^t$. Notând cu $X^t$ vectorul format cu cele trei variabile de stare $K_C^t$, $K_F^t$ și $Y^t$ și cu $U^t$ vectorul variabilelor de comanda $I_F^t$, $F^t$ și $D^t$ putem scrie sistemul de ecuații de stare sub forma matricială:

$$\begin{pmatrix} K_C^t \\ K_F^t \\ Y^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f+(1-f)\cdot p\cdot\beta & fa+(1-f)\cdot p\cdot\alpha & -(1-f)\cdot r \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_C^{t-1} \\ K_F^{t-1} \\ Y^{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I^t \\ F^t \\ D^t \end{pmatrix}$$

sau:

$$X^t = A\cdot X^{t-1} + B\cdot U^t$$

unde $A$ și $B$ sunt matricele sistemului:

$$A = \begin{pmatrix} f+(1-f)\cdot p\cdot\beta & fa+(1-f)\cdot p\cdot\alpha & -(1-f)\cdot r \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece det($A$) = $(1-a)(1-b)[f + (1 - f)\cdot p\cdot\beta] \neq 0$ și det($B$) = $-1 \neq 0$ sistemul este controlabil și observabil, urmând să găsim acele comenzi care duc la maximizarea valorii firmei pe intervalul de timp analizat.

Pentru rezolvare, se poate folosi *principiul lui Pantreaghin* pentru cazul discret, *principiul lui Bellman* (deoarece modelul se poate reduce la o problemă de programare dinamică) sau cu metode de aproximare a soluției optime (de exemplu *simulare*, *algoritmi genetici* sau *rețele neuronale*).

Ultima metodă oferă avantajul aplicabilității la o clasă foarte largă de cazuri concrete, oferă posibilitatea utilizării unui număr mare de variabile şi restricții (necesare pentru a face modelul cât mai apropiat de realitatea economică existentă la momentul analizei).

În cazul nostru, putem foarte uşor construi un *algoritm genetic* de rezolvare plecând de la următoarele observații:

a) Valoarea finală a variabilelor de stare se poate exprima foarte uşor în funcție de starea inițială a sistemului și de comenzile aplicate pe perioada de timp analizată, deoarece avem un sistem de ecuații cu diferențe finite cu coeficienți constanți, al cărui termen general are forma:

$$X^N = A^N \cdot X^0 + B \cdot \sum_{k=1}^{N} A^{N-k} \cdot U^k$$

deci starea finală va fi:

$$X^T = A^T \cdot X^0 + B \cdot \sum_{t=1}^{T} A^{T-t} \cdot U^t$$

b) conform acestui rezultat problema se poate scrie:

$$\max_{I_F^t, F^t, D^t} \sum_{t=1}^{T} \frac{D^t}{(1+i)^t} + \frac{K_F^T + K_C^T}{(1+i)^T}$$

$$X^T = A^T \cdot X^0 + B \cdot \sum_{t=1}^{T} A^{T-t} \cdot U^t$$

$$0 \leq F^t \leq \gamma \cdot I_F^t \leq \gamma \cdot I_{max}$$

$$0 \leq Y^t \leq k \cdot (K_F^t + K_C^t)$$

$$0 \leq D^t \leq D_{max}$$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$
$a, \beta, p > 0$

sau:

$$\max_{I_F, F, D} \langle D, I \rangle + \frac{K_F^T + K_C^T}{(1+i)^T}$$

$$\begin{pmatrix} K_C^T \\ K_C^T \\ Y^T \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} K_C^0 \\ K_C^0 \\ Y^0 \end{pmatrix} + B\cdot(A_1, A_2, A_3)(I_F, F, D)^{\perp}$$

$0 \le F \le \gamma \cdot I_F \le \gamma \cdot I_{max}$
$0 \le D \le D_{max}$
$0 \le Y \le k(K_F + K_C)$

unde $I = \left( \dfrac{1}{(i+1)^t} \right)^{\perp}$, $t = 1,...,T$

$A_i = (A_i^{T-1}, A_i^{T-2}, ..., A_i^1, A_i^0)$ cu $A_i^k$ = coloana $i$ din $A^k$, cu $i \in \{1,2,3\}$, $k = 0,...,T-1$

$D = (D^1, D^2,..., D^T)$, $I_F = (I_F^1, I_F^2,..., I_F^T)$, $F = (F^1, F^2,...,F^T)$

$Y = (Y^0, Y^1, Y^2,..., Y^T)$, $K_F = (K_F^0, K_F^1, K_F^2,..., K_F^T)$, $K_C = (K_C^0, K_C^1, K_C^2,..., K_C^T)$

c) Rezolvarea se reduce la a găsi acei vectori $D = (D^1, D^2, ..., D^T)$, $I_F = (I_F^1, I_F^2,..., I_F^T)$, $F = (F^1, F^2, ..., F^T)$ din spaţiul vectorial $\Re_+^T$ care verifică restricţiile:

$0 \le F \le \gamma \cdot I_F \le \gamma \cdot I_{max}$
$0 \le D \le D_{max}$
$0 \le Y \le k(K_F + K_C)$

pentru care se obţine maximul expresiei $\langle D, I \rangle + \dfrac{K_F^T + K_C^T}{(1+i)^T}$, unde $K_F^T$ şi $K_C^T$ se obţin din egalitatea: $\begin{pmatrix} K_C^T \\ K_C^T \\ Y^T \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} K_C^0 \\ K_C^0 \\ Y^0 \end{pmatrix} + B\cdot(A_1, A_2, A_3)(I_F, F, D)^{\perp}$.

d) Un algoritm genetic destinat rezolvării problemei constă în generarea unui număr mare de vectori $(I_F, F, D) \in \Re_+^{3T}$ ce verifică setul de condiţii:

$0 \le F \le \gamma \cdot I_F \le \gamma \cdot I_{max}$
$0 \le D \le D_{max}$
$0 \le Y \le k(K_F + K_C)$

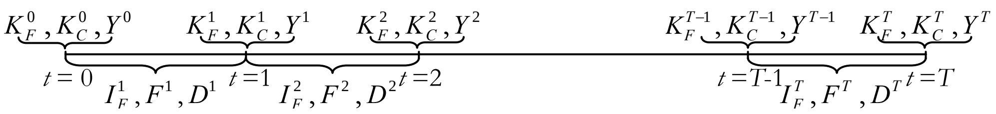
ca populație inițială și apoi a unui număr foarte mare de populații descendente utilizând regulile de încrucișare și mutațiile clasice (sau specifice situației), păstrând de fiecare dată cea mai bună soluție obținută.

Pentru o populație de pornire suficient de mare și după un număr suficient de mare de generații vom obține o soluție suficient de apropiată de cea optimă.

Rezolvarea prin acest procedeu va fi făcută pe un caz particular în paginile următoare.

## d) cazul discret în condiții de concurență imperfectă

Valorile variabilelor de stare și de comanda vor fi considerate ca în figura de mai jos:




Modelul matematic este în acest caz:

$$\max_{I_F, F, D} \sum_{t=1}^{T} \frac{D^t}{(1+i)^t} + \frac{K_F^T + K_C^T}{(1+i)^T}$$

$K_F^t - K_F^{t-1} + K_C^t - K_C^{t-1} = (1-f)\cdot[p(K_F^{t-1}, K_C^{t-1})\cdot(a\cdot K_F^{t-1} + \beta\cdot K_C^{t-1}) - a\cdot K_F^{t-1}$ - $K_C^{t-1} - r\cdot Y^{t-1}]$ - $D^t$

$K_F^t - K_F^{t-1} = I_F^t - a\cdot K_F^{t-1}$

$Y^t - Y^{t-1} = F^t - b\cdot Y^{t-1}$

$I_{min} \leq I_F^t \leq I_{max}$; $I_{min} < 0 < I_{max}$.

$0 \leq Y^t \leq k\cdot(K_F^t + K_C^t)$

$0 \leq D^t \leq D_{max}$

$0 \leq F^t \leq \gamma\cdot I_F^t$

$f, i, a, r, b, k, \gamma \in (0, 1)$

$a, \beta, p > 0$

Deoarece din $\gamma \cdot I_F^t \geq F^t \geq 0$ rezultă evident $I_{min} \leq I_F^t$ această condiție nu mai este efectivă și va fi eliminată din sistem, prima și a patra condiție putând fi scrise împreună prin:

$$0 \leq F^t \leq \gamma \cdot I_F^t \leq \gamma \cdot I_{max}$$

Prin înlocuirea variației capitalului fix în prima ecuație de stare a sistemului obținem:

$$I_F^t - a \cdot K_F^{t-1} + K_C^t - K_C^{t-1} = (1-f) \cdot [p(K_F^{t-1}, K_C^{t-1}) \cdot (a \cdot K_F^{t-1} + \beta \cdot K_C^{t-1}) - a \cdot K_F^{t-1} - K_C^{t-1} - r \cdot Y^{t-1}] - D^t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$K_C^t - K_C^{t-1} = (1-f) \cdot [p(K_F^{t-1}, K_C^{t-1}) \cdot (a \cdot K_F^{t-1} + \beta \cdot K_C^{t-1}) - a \cdot K_F^{t-1} - K_C^{t-1} - r \cdot Y^{t-1}] + a \cdot K_F^{t-1} - I_F^t - D^t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$K_C^t = (1-f) \cdot [p(K_F^{t-1}, K_C^{t-1}) \cdot (a \cdot K_F^{t-1} + \beta \cdot K_C^{t-1}) - a \cdot K_F^{t-1} - K_C^{t-1} - r \cdot Y^{t-1}] + K_C^{t-1} + a \cdot K_F^{t-1} - I_F^t - D^t$$

Sistemul de ecuații de stare ale sistemului devine:

$$\begin{aligned} K_C^t &= U(K_C^{t-1}, K_F^{t-1}) - (1-f) \cdot r \cdot Y^{t-1} - I_F^t - D^t \\ K_F^t &= I_F^t + (1-a) \cdot K_F^{t-1} \\ Y^t &= F^t + (1-b) \cdot Y^{t-1} \end{aligned}$$

fiind un sistem de ecuații cu diferențe finite de trei ecuații și trei necunoscute, comenzile fiind $I_F^t$, $F^t$ și $D^t$.

Pentru rezolvare, se poate folosi principiul lui Pantreaghin pentru cazul discret, principiul lui Bellman (deoarece modelul se poate reduce la o problemă de programare dinamică) sau cu metode de aproximare a soluției optime (de exemplu algoritmii genetici).

Ultima metodă oferă avantajul aplicabilității la o clasă foarte largă de cazuri concrete, oferă posibilitatea utilizării unui număr mare de variabile și restricții (necesare pentru a face modelul cât mai apropiat de realitatea economică existentă la momentul analizei).

În cazul nostru, putem foarte ușor construi un algoritm genetic de rezolvare plecând de la următoarele observații:

a) Valorile variabilelor de stare se pot exprima foarte ușor în funcție de starea inițială a sistemului și de comenzile aplicate pe perioada de timp analizată, deoarece avem de calculat aceste valori dintr–o recurență simplă de ordinul întâi, dată de sistemul de ecuații de stare.

b) condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească variabilele de comandă şi cele de stare sunt uşor de verificat, fiind inegalităţi de ordinul întâi fără întârzieri.

c) un algoritm genetic destinat rezolvării problemei constă în generarea unui număr mare de vectori ($I_F$, $F$, $D$) $\in \Re_+^{3T}$ ce verifică setul de condiţii:

$0 \le F \le \gamma \cdot I_F \le \gamma \cdot I_{max}$
$0 \le D \le D_{max}$
$0 \le F^t + (1 - b) \cdot Y^{t-1} \le k(I_F^t + (1 - a) \cdot K_F^{t-1} + U(K_C^{t-1}, K_F^{t-1}) - (1 - f) \cdot r\, Y^{t-1} - I_F^t - D^t)$

Acest set de vectori se poate obţine foarte uşor astfel:

1. pentru fiecare moment $t = 1,...,T$ se generează aleator un set de comenzi până se obţine o comandă care verifică:

$0 \le F \le \gamma \cdot I_F \le \gamma \cdot I_{max}$
$0 \le D \le D_{max}$
$0 \le F^t + (1 - b) \cdot Y^{t-1} \le k(I_F^t + (1 - a) \cdot K_F^{t-1} + U(K_C^{t-1}, K_F^{t-1}) - (1 - f) \cdot r\, Y^{t-1} - I_F^t - D^t)$

unde $K_F^{t-1}$, $K_C^{t-1}$ şi $Y^{t-1}$ sunt deja cunoscute de la pasul anterior ($t - 1$).

2. Pe baza acestor comenzi se calculează valorile variabilelor de stare de la momentul $t$: $K_F^t, K_C^t, Y^t$

3. Odată obţinută populaţia iniţială prin aplicarea procedeului de la paşii 1 şi 2 pentru toţi $t = 1,...,T$ se construiesc generaţiile următoare de populaţii utilizând regulile de încrucişare şi mutaţiile clasice (sau specifice situaţiei), păstrând de fiecare dată doar vectorii care îndeplinesc setul de condiţii şi completând vectorii eliminaţi (ca neîndeplinind setul de condiţii) prin procedeul de la paşii 1 şi 2.

4. se păstrează de fiecare dată cea mai bună soluţie obţinută până la momentul respectiv.

Pentru o populaţie de pornire suficient de mare şi după un număr suficient de mare de generaţii vom obţine o soluţie suficient de apropiată de cea optimă.

Rezolvarea prin acest procedeu va fi făcută pe un caz particular în paginile următoare.