CAPITOLUL I

PROGRAMARE LINIARA

1. Forma generală a unei probleme de programare liniară

Problemele de maxim şi de minim apar frecvent în cele mai diferite domenii ale matematicilor pure sau aplicate.În domeniul economic, asemenea probleme sunt foarte naturale. Astfel, firmele încearcă să maximizeze profiturile sau să minimizeze costurile. Experţii în planificare macroeconomică se preocupă de maximizarea bunăstării unei comunităţi economico-sociale. Consumatorii doresc să cheltuiască venitul lor într-un mod care să le maximizeze satisfacţia (de natură materială dar şi spirituală etc.)

Programarea liniară se ocupă de o clasă specială de probleme de optimizare care apar deseori în aplicaţiile economice. Aceste probleme constau în maximizarea sau minimizarea unei funcţii *liniare*, numită *funcţie obiectiv*, ale cărei variabile trebuie să satisfacă:

- un sistem de relaţii date sub forma unor ecuaţii şi / sau inecuaţii *liniare nestricte*, denumite generic *restricţii*;
- cerinţa de a lua numai valori numerice *nenegative* (≥ 0).

1.1 Exemple

1) ***Problema firmei***. Considerăm un *sistem de producţie*, de exemplu o *firmă*, care produce n bunuri $G_1, G_2, ..., G_n$ utilizând pentru aceasta m categorii de resurse $R_1, R_2, ..., R_m$ (materii prime, forţă de muncă, capacităţi de producţie, combustibili şi energie etc.). Adoptăm ipoteza că tehnologia de transformare a resurselor în bunuri este *liniară* în sensul că:

- Pentru fiecare bun, consumul dintr-o anumită resursă este direct proporţional cu cantitatea produsă.
- Consumurile dintr-o resursă sau alta nu se condiţionează reciproc.

Fie atunci a_{ij} cantitatea din resursa i utilizată pentru producerea unei unităţi din bunul G_j. Fie deasemeni b_i cantitatea disponibilă din resursa R_i şi c_j preţul (sau profitul) unitar al bunului G_j.

- Prețul unui bun nu depinde de cantitatea produsă şi nici de situația vânzărilor celorlalte bunuri.

Problema constă în determinarea unui program de fabricație care să maximizeze venitul (sau profitul) firmei.

Să notăm cu x_j cantitatea din bunul G_j care urmează a fi produsă. Problema enunțată mai înainte devine:

Să se găsească valorile numerice $x_1, x_2, \dots, x_n$ care maximizează funcția:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

cu satisfacerea restricțiilor:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

şi a condițiilor de nenegativitate:

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,,\cdots x_n \ge 0$$

Observație: Ipotezele de liniaritate făcute nu sunt verificate întotdeauna în practică. Rațiunea lor este dublă:

- conduc la modele matematice în general simple;
- pe baza modelelor liniare se pot formula concluzii calitative şi legități economice care îşi mențin valabilitatea - în anumite limite - şi într-un context neliniar.

2) *Problema dietei* a devenit o ilustrare clasică a programării liniare, fiind întâlnită în mai toate textele de specialitate. Ea se ocupă cu hrănirea unei colectivități, să zicem un grup de militari, în cel mai economic mod cu condiția satisfacerii anumitor cerințe de nutriție. Mai concret, este vorba de a prepara un aliment complex pornind de la n sortimente de hrană $F_1, F_2, \dots, F_n$. Un număr de elemente sau principii nutritive $N_1, N_2, \dots, N_m$ - proteine, glucide, grăsimi calciu,etc. sunt avute în vedere în sensul că alimentul combinat trebuie să

conțină cel puțin $b_1, b_2, ..., b_m$ unități specifice din fiecare. Să presupunem cunoscute următoarele:

- cantitatea a_{ij} din principiul nutritiv N_i conținută într-o unitate din tipul de hrană F_j;
- prețul unitar c_j al tipului de hrană F_j.

Notăm cu $x_1, x_2, ..., x_n$ cantitățile din felurile de hrană $F_1, F_2, ..., F_n$ care trebuie cumpărate în vederea elaborării dietei. Formal, $x_1, x_2, ..., x_n$ vor trebui determinate astfel încât:

- costul $f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ al alimentelor cumpărate să fie minim.
- amestecul să conțină principiile nutritive $N_1, N_2, ..., N_m$ în cantități cel puțin egale cu $b_1, b_2, ..., b_m$, adică:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Din nou au fost tacit utilizate ipotezele de liniaritate întâlnite şi în modelul precedent.

1.2 Soluții admisibile ale unei probleme de programare liniară

Considerăm o problemă de programare liniară (P) cu m restricții egalități şi/sau inegalități nestricte , n variabile şi cu funcția obiectiv f. Un ansamblu de n valori numerice care satisfac restricțiile se va numi *soluție* a programului (P). Dacă în plus sunt verificate şi condițiile de nenegativitate, ansamblul se numeşte *soluție admisibilă.* O soluție admisibilă care maximizează sau minimizează - după caz - funcția obiectiv se va numi *soluție optimă.* Notând cu $\mathcal{A}$ mulțimea soluțiilor admisibile , problema (P) se scrie:

Să se determine $x^* \in \mathcal{A}$ *cu proprietatea*: $f(x^*) = \max_{x \in \mathcal{A}}$ *sau* $\min f(x)$

Este posibil ca (P) să aibe soluții dar nici una din ele să fie admisibilă: $\mathcal{A} = \emptyset$. Spunem în acest caz că problema (P) este *incompatibilă* .Chiar dacă $\mathcal{A} \neq \emptyset$, este posibil ca funcția obiectiv să fie nemărginită pe $\mathcal{A}$, adică să existe
un şir de soluții admisibile dealungul căruia funcția obiectiv să tindă spre $+\infty$ sau $-\infty$, după caz. În această situație vom spune că (P) are *optim infinit.*Dacă (P) are (cel puțin) o soluție optimă, zicem că (P) are *optim finit*.

Deoarece eventualele restricții inegalități sunt *nestricte* mulțimea $\mathcal{A}$ este *inchisă* (în topologia uzuală a spațiului R^n), adică *o dată cu un şir convergent de puncte conține şi limita acestuia*. Această proprietate este esențială pentru existența unei soluții optime a problemei (P)! Conform unui rezultat clasic al analizei matematice, dacă $\mathcal{A}$ este *mărginită,* atunci f îşi atinge efectiv extremele pe $\mathcal{A}$, şi deci (P) are *optim finit*. În consecință, dacă (P) are *optim infinit*, cu siguranță $\mathcal{A}$ este *nemărginită.* Reciproca nu este în general adevărată: este posibil ca $\mathcal{A}$ să fie nemărginită şi totuşi (P) să aibe optim finit.

1.3 Forma canonică a unei probleme de programare liniară

O restricție a unei probleme (P) de programare liniară se zice *concordantă* dacă este o *inegalitate* de tipul "≤" când funcția obiectiv se maximizează şi de tipul "≥" când funcția obiectiv se minimizează.O restricție *inegalitate* care nu este concordantă se va numi *neconcordantă.* Restricțiile egalități nu fac obiectul acestei clasificări.

Spunem că o problemă de programare liniară este în *formă canonică* dacă toate restricțiile ei sunt *inegalități concordante*.
În consecință, o problemă în formă canonică de maximizare arată astfel:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0 & j = 1,\dots,n \\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \quad \text{sau matricial} \quad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \quad \text{unde:}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

O problemă în formă canonică de minimizare se va scrie:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \\ x_j \geq 0 \\ (\min) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ (\min) f = cx \end{cases}$$

De exemplu, problema firmei (1.1, exemplul 1)) este o formă canonică de maximizare în timp ce problema dietei (1.1, exemplul 2)) este o formă canonică de minimizare.

Orice problemă de programare liniară se poate pune sub o formă canonică de maximizare sau minimizare, fără modificarea mulțimii soluțiilor admisibile, observând că:

- *o egalitate se poate înlocui cu două inegalități de sens contrar;*
- *o restricție neconcordantă devine concordantă prin înmulțire cu -1;*
- *putem schimba sensul optimizării funcției obiectiv, grație formulei generale:*

$$\min_{x \in \mathcal{A}} f(x) = -\max_{x \in \mathcal{A}} \left[-f(x) \right] \qquad (1.3.1)$$

În consecință, putem face anumite raționamente teoretice pe o formă canonică, ca de exemplu în teoria dualității liniare, fără ca prin aceasta să restrângem generalitatea.

Exemplul 1.3.1

$$\begin{cases} (\max) f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\min)(-f) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ -2x_1 - x_3 \geq -10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Programul (P) *Forma canonică de minimizare a programului (P)*

1.4 Forma standard a unei probleme de programare liniară

Spunem că o problemă de programare liniară este în *formă standard* dacă toate restricțiile ei sunt *egalități*. Importanța acestei forme particulare rezultă din faptul că metoda de rezolvare a problemelor de programare liniară care va fi expusă mai departe cere ca problema să fie în această prezentare.

În consecință, o problemă (P) care are şi restricții inegalități va fi înlocuită - în vederea rezolvării ei - cu o alta în care toate restricțiile sunt egalități. Noua problemă, numită *forma standard a problemei* (P) şi notată (FSP), se construieşte astfel:

- *O restricție inegalitate din problema originală (P) de tipul "≤" (respectiv de tipul "≥") se transformă în egalitate prin adăugarea (respectiv prin scăderea) unei variabile nenegative din membrul său stâng.*
- *Restricțiile inegalități nu se modifică.*
- *Noile variabile introduse nu apar în funcția obiectiv a problemei originale (alternativ, spunem că ele apar cu coeficienți nuli)*

Exemplul 1.4.1

$$(P)\begin{cases} (\max) f = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (FSP)\begin{cases} (\max) f = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9 \\ x_j \geq 0, j = 1,\ldots,5 \end{cases}$$

Problema care apare în acest context este aceea de a explica modul în care se obține soluția optimă a problemei (P) dacă se cunoaşte soluția optimă a formei sale standard (FSP).
Se poate arăta uşor că între mulțimile de soluții admisibile $\mathcal{A}_P$,ale problemei (P) şi $\mathcal{A}_{FSP}$, ale problemei (FSP), există o *corespondență bijectivă care conservă soluțiile optime.* Vom arăta cum funcționează această corespondență pe exemplul precedent.

Notând-o cu Φ, aceasta va asocia unei soluții admisibile $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ a problemei (P) vectorul:

$$\Phi(\bar{x}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, 5\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3 - 4, 9 - \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 - 3\bar{x}_3)$$

care prin construcție se dovedeşte a fi o soluție admisibilă a problemei (FSP). Reciproc, unei soluții admisibile $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5)$ a problemei (FSP) corespondența inversă Φ^{-1} îi asociază vectorul $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ care satisface în mod clar restricțiile problemei originale (P). Dacă $\bar{x}$ este soluția optimă a problemei (P) atunci $\Phi(\bar{x})$ este soluția optimă a problemei (FSP) şi reciproc, dacă cunoaştem soluția optimă $\tilde{x}$ a problemei (FSP) , $\Phi^{-1}(\tilde{x})$ reprezintă soluția optimă a problemei (P).

În problemele concrete, variabilele de abatere au interpretări economice precise aşa că în analiza soluției optime valorile lor vor fi luate în considerare laolaltă cu valorile variabilelor originale. Astfel, în problema firmei (1.1, exemplul1)) variabilele de abatere $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ definite prin:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1,\ldots,m$$

reprezintă *cantități de resurse neconsumate* şi prin urmare cunoaşterea valorilor lor în soluția optimă oferă indicații utile în analiza modului în care sunt utilizate resursele firmei: materii prime, capacități de producție, forță de muncă, etc.

În problema dietei (1.1,exemplul 2)) variabilele de abatere:

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \quad i = 1,\ldots,m$$

reprezintă *cantitățile de principii nutritive cu care sunt depăşite* nivelele minimale specificate în rețetă.

1.5 Rezolvarea grafică a problemelor de programare liniară

Să considerăm problema:

$$\begin{cases} (\max) f = 3x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ \quad x_1 + \quad x_2 \le \ 6 \\ -2x_1 + \quad x_2 \le \ 2 \\ x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Identificăm x_1 , x_2 cu abscisa, respectiv ordonata unui punct din planul raportat la un sistem ortogonal de axe. Este cunoscut faptul că mulţimea punctelor din plan ale căror coordonate satisfac prima restricţie coincide cu unul din semiplanele determinate de dreapta d_1 de ecuaţie $-3x_1+4x_2=12$. Mai precis,este vorba de semiplanul care conţine originea (0,0) , deoarece coordonatele acesteia satisfac evident prima restricţie. În mod analog, următoarele restricţii sunt verificate în semiplanele determinate de dreapta d_2 de ecuaţie $x_1+x_2=6$ şi respectiv d_3 de ecuaţie $-2x_1+x_2=2$ şi care conţin originea. În fine, condiţia $x_1 \ge 0$ are loc în semiplanul “din dreapta” axei verticale, în timp ce condiţia $x_2 \ge 0$ are loc “deasupra” axei orizontale.

Soluţiile admisibile ale problemei se identifică cu punctele comune celor cinci semiplane. Acestea formează interiorul şi frontiera poligonului OABCD din figura 1.5.1.

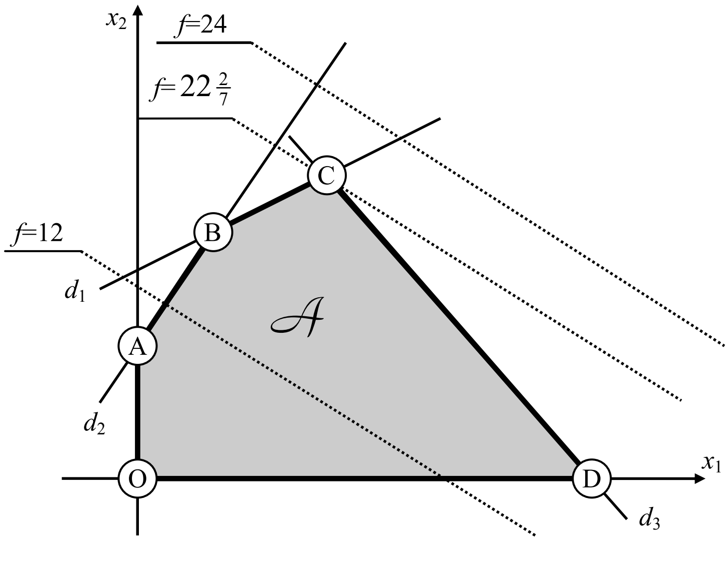

Figura 1.5.1

Funcția obiectiv determină - pentru f variabil - o mulțime de drepte paralele care intersectează sau nu mulțimea $\mathscr{A}$. Astfel punctele situate pe dreapta $3x_1+4x_2=12$ reprezintă diferite combinații ale mărimilor x_1, x_2 care dau funcției obiectiv f aceeaşi valoare 12. Întrucât această dreaptă taie $\mathscr{A}$, rezultă că problema are soluții admisibile - chiar o infinitate - care oferă funcției obiectiv valoarea 12. Dreapta $3x_1+4x_2=24$ nu mai taie $\mathscr{A}$ şi deci nici o soluție admisibilă a problemei nu este capabilă să asigure funcției obiectiv valoarea 24. Conchidem că maximul funcției f este "undeva" între 12 şi 24. Se observă uşor că acest maxim se atinge în vârful C al frontierei lui $\mathscr{A}$. Punctul C este

intersecția dreptelor d_1 şi d_2 şi deci coordonatele sale, care reprezintă soluția optimă a problemei, se determină rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte. Se găseşte $x_1^* = \frac{12}{7}$, $x_2^* = \frac{30}{7}$ maximul lui f fiind $22\frac{2}{7}$. Soluția optimă satisface cu egalitate primele două restricții şi cu inegalitate strictă pe ceea de a treia.

În mod asemănător se arată că dacă funcția de maximizat ar fi fost $f = - x_1+x_2$ atunci optimul ar fi fost atins în vârful B de coordonate $x_1=4/5$, $x_2=18/5$.

Examinând acest exemplu putem trage următoarele concluzii:

1. Mulțimea $\mathscr{A}$ este convexă, adică o dată cu două puncte conține şi segmentul care le uneşte. O consecință intuitivă a acestei proprietăți este că soluția optimă, dacă există, se găseşte "undeva" pe frontiera lui $\mathscr{A}$.

2. Frontiera lui $\mathscr{A}$ este un contur poligonal cu un număr finit de vârfuri şi o soluție optimă se găseşte neapărat într-unul din ele.

Aceste concluzii, care se confirmă pe orice altă problemă în două sau trei variabile (mulțimea soluțiilor admisibile putând fi "vizualizată" în planul R^2 sau spațiul R^3) au constituit sursa întregii teorii a programării liniare.