2. Dualitatea în programarea liniară

În principiu, oricărei probleme de programare liniară i se asociază o alta, numită *duala* sa şi în esenţă *teoria dualităţii* constă în studiul relaţiilor dintre cele două probleme. Fireşte, construcţia problemei duale depinde nemijlocit de structura problemei iniţiale denumită şi problema *primală*. Întotdeauna sensul optimizării în cele două probleme este diferit: dacă în primală funcţia obiectiv se maximizează (se minimizează) în duală funcţia obiectiv se minimizează (se maximizează). Studiul şi interpretarea economică a problemei duale aduc informaţii suplimentare în analiza proceselor economice şi în fundamentarea deciziilor.

2.1 Reguli de construire a problemei duale

Pentru a conferi construcţiei problemei duale maxima generalitate vom slăbi condiţia de nenegativitate impusă tuturor variabilelor, admiţând că unele din ele nu pot lua decât valori nepozitive (≤ 0) în timp ce altele pot lua orice valoare reală.

Cu această observaţie duala unei probleme de programare liniară cu *m* restricţii şi *n* variabile se construieşte după următoarele reguli:

1) Dacă în primală funcţia obiectiv se maximizează (respectiv se minimizează) în problema duală funcţia obiectiv se minimizează (respectiv se maximizează).

2) Restricţiei de rang i , i=1,...,m din primală îi corespunde în duală o variabilă u_i; dacă restricţia primală este o inegalitate concordantă (respectiv neconcordantă, respectiv o egalitate) variabila duală asociată este nenegativă (≥0), (respectiv nepozitivă (≤0), respectiv fără restricţie de semn).

3) Variabilei x_j , j=1,...,n din problema primală îi corespunde în duală restricţia de rang j. Membrul stâng al acestei restricţii este o combinaţie liniară a variabilelor duale u_i realizată cu coeficienţii variabilei x_j din toate restricţiile primalei (aceştia sunt a_{ij}, i=1,...,m). Termenul său liber este coeficientul c_j al lui x_j din funcţia obiectiv primală. În fine, dacă variabila primală x_j este nenegativă (respectiv nepozitivă, respectiv fără restricţie de semn) restricţia duală asociată va fi o inegalitate concordantă (respectiv neconcordantă, respectiv o egalitate).

4) Coeficienţii funcţiei obiectiv ai problemei duale sunt termenii liberi b_i ai restricţiilor problemei primale.

Exemplul 2.1.1

Problema primală *Problema duală*

$$\left\{\begin{array}{lcl}
3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 \le 6 & \longleftrightarrow & u_1 \ge 0 \\
2x_1 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 9 & \longleftrightarrow & u_2\, f.r.s. \\
x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 3 & \longleftrightarrow & u_3 \le 0 \\
x_1 \ge 0 & \longleftrightarrow & 3u_1 + 2u_2 + u_3 \ge 8 \\
x_2 \ge 0 & \longleftrightarrow & -2u_1 + 6u_3 \ge 3 \\
x_3\, f.r.s. & \longleftrightarrow & u_1 + 2u_2 + u_3 = 1 \\
x_4\, f.r.s. & \longleftrightarrow & 4u_1 + 5u_2 + 2u_3 = 5 \\
x_5 \le 0 & \longleftrightarrow & -u_1 + u_2 \le 7 \\
\max f = 8x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 & & \min g(u) = 6u_1 + 9u_2 + 3u_3
\end{array}\right\}$$

Observații: 1) Problema duală are atâtea variabile (respectiv restricții) câte restricții (respectiv variabile) are problema primală.

2) Regulile 1) - 4) pun în evidență următoarele corespondențe de termeni prin trecere la duală:

min	$\leftrightarrow$	max
(restricție) concordantă	$\leftrightarrow$	(variabilă) nenegativă
(restricție) neconcordantă	$\leftrightarrow$	(variabilă) nepozitivă
(restricție) egalitate	$\leftrightarrow$	(variabilă) fără restricție de semn
termen liber al unei restricții	$\leftrightarrow$	coeficient al funcției obiectiv

3) Din construcția de mai sus rezultă următoarea concluzie:

Duala dualei este problema primală.

Spunem că dualitatea în programarea liniară are un caracter *involutiv*.

În consecință, fiind dată o problemă de programare liniară (P) şi duala sa (Q), vom vorbi despre *cuplul de probleme în dualitate* (P,Q), fără a mai specifica în mod expres care din probleme este primala şi care duala.

2.2 Dualele unor forme particulare de probleme de programare liniară

1) *Duala unei forme canonice de maximizare este o formă canonică de minimizare şi reciproc.*

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 & u_1 \ge 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 & u_2 \ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m & u_m \ge 0 \\ x_1 \ge 0 & a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1 \\ x_2 \ge 0 & a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2 \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \ge 0 & a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n \\ \max f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \min g = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \end{array}\right\}$$

Cu notațiile matriciale introduse în (1.3) la care se adaugă: $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]$

cuplul format din cele două probleme de mai sus devine:

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ \max f(x) = cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ \min g(u) = ub \end{cases}$$

2) Conservarea formei de prezentare se pierde atunci când se consideră duala unei probleme în formă standard.

$$\left\{\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,\ldots,m & \leftrightarrow & u_i \ f.r.s. \quad i = 1,\ldots,m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,n & \leftrightarrow & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \ge c_j \quad j = 1,..,n \\ \max f = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j & & \min g = \sum_{i=1}^{m} b_iu_i \end{array}\right\}$$

sau matricial:

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \max f(x) = cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA \geq c \\ u \in R^m \, (f.r.s.) \\ \min g(u) = ub \end{cases}$$

(f.r.s.≡ fără restricţie de semn!)

În mod analog se construieşte duala formei standard în care funcţia obiectiv se minimizează:

$$(P)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min f(x) = cx \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} uA \leq c \\ u \quad f.r.s. \\ \max g(u) = ub \end{cases}$$

Observaţie: De reţinut este faptul că *dualele a două probleme de programare liniară echivalente sunt ele însele echivalente* adică au aceeaşi mulţime de soluţii admisibile şi aceleaşi soluţii optime.

2.3 Teoreme de dualitate

Cu notaţiile matriciale din (2.2) să considerăm cuplul de probleme în dualitate în formă canonică:

$$(P)\begin{cases} (\max) f(x) = cx \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad (Q)\begin{cases} (\min) g(u) = ub \\ \quad uA \geq c \\ \quad u \geq 0 \end{cases}$$

Teorema 2.3.1 *Fie* $\overline{x} = \left[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\right]^T$ *o soluţie admisibilă a problemei* (P) *şi* $\overline{u} = \left[\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m\right]$ *o soluţie admisibilă a problemei* (Q). *Atunci:*

1) $f(\overline{x}) \leq g(\overline{u})$

2) *Dacă* $f(\overline{x}) = g(\overline{u})$ *atunci* $\overline{x}$ *este o soluţie optimă a problemei* (P) *iar* $\overline{u}$ *este o soluţie optimă a problemei* (Q).

Demonstrație: 1)Prin ipoteză $A\overline{x} \le b$, $\overline{x} \ge 0$ şi $\overline{u}A \ge c$, $\overline{u} \ge 0$ .Deducem că $\overline{u}A\overline{x} \le \overline{u}b$ şi $\overline{u}A\overline{x} \ge c\overline{x}$ (nenegativitatea vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{u}$ este esențială!) de unde:

$$f(\overline{x}) = c\overline{x} \le \overline{u}A\overline{x} \le \overline{u}b = g(\overline{u})$$

2) Dacă $f(\overline{x}) = g(\overline{u})$ şi dacă $\overline{x}$ nu ar fi soluție optimă a problemei (P) ar exista o soluție admisibilă $\overline{x}'$ mai bună, adică $f(\overline{x}') > f(\overline{x})$ .Rezultă inegalitatea $f(\overline{x}') > g(\overline{u})$ contrară celor demonstrate la punctul precedent. ■

Clasificarea cuplurilor de probleme de programare liniară în dualitate este făcută de următoarea teoremă:

Teorema 2.3.2 (**Teorema fundamentală a dualității**) *Pentru un cuplu de probleme în dualitate una şi numai una din următoarele situații este posibilă:*

1) Ambele probleme au soluții admisibile; atunci ambele au soluții optime şi valorile optime ale funcțiilor obiectiv coincid.

2) Numai una din probleme are soluții admisibile, iar cealaltă nu are; atunci problema compatibilă are optim infinit.

3) Nici una din probleme nu are soluții admisibile.

Simetria teoremei 2.3.2 nu constituie totuşi un răspuns pentru reciproca teoremei 2.3.1 Specificăm acest lucru în mod expres pentru că în programarea neliniară el nu are loc.

Teorema 2.3.3 *Dacă una din problemele unui cuplu de probleme în dualitate au soluție optimă atunci şi cealaltă are şi valorile optime ale funcțiilor obiectiv coincid.*

Nu dăm demonstrația teoremei 2.3.2 deoarece pregătirile necesare depăşesc cadrul impus acestei lucrări. Vom demonstra însă teorema 2.3.3 după ce vom prezenta metoda generală de rezolvare a problemelor de programare liniară.

Teorema 2.3.4 (Teorema ecarturilor complementare) *Fie (P,Q) un cuplu de probleme canonice în dualitate:*

$$(P)\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ \min f(x) = cx \end{cases} \qquad Q\begin{cases} uA \ge c \\ u \ge 0 \\ \min g(u) = ub \end{cases}$$

Un cuplu de soluții admisibile ($\overline{x}$, $\overline{u}$) este un cuplu de soluții optime dacă şi numai dacă:

$$\begin{cases} (\overline{u}A - c)\overline{x} = 0 \\ \overline{u}(b - A\overline{x}) = 0 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Demonstrație: Să presupunem relațiile (2.3.1) verificate de cuplul ($\overline{x}$, $\overline{u}$):

$$\left.\begin{matrix} \overline{u}A\overline{x} - c\overline{x} = 0 \\ \overline{u}b - \overline{u}A\overline{x} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow c\overline{x} = \overline{u}b \Rightarrow (\overline{x}, \overline{u})$$ este un cuplu de soluții optime în virtutea

teoremei 2.3.1.Reciproc, să presupunem că ($\overline{x}$, $\overline{u}$) constituie un cuplu de soluții optime. Atunci $c\overline{x} = \overline{u}b$,în virtutea teoremei fundamentale a dualității şi prin urmare:

$$(\overline{u}A - c)\overline{x} + \overline{u}(b - A\overline{x}) = 0$$

Deoarece $\overline{x}$, $\overline{u}$ sunt soluții admisibile avem: $(\overline{u}A - c)\overline{x} \ge 0, \quad \overline{u}(b - A\overline{x}) \ge 0$ şi deci $(\overline{u}A - c)\overline{x} = 0, \quad \overline{u}(b - A\overline{x}) = 0$ relații care arată că $\overline{x}$, $\overline{u}$ verifică (2.3.1).■

În notațiile secțiunii (2.2) relațiile matriciale (2.3.1) se pot scrie:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i - c_j \right) x_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0$$

Aceste relații - modulo admisibilitatea soluțiilor celor două probleme - sunt echivalente cu:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i - c_j\right) x_j = 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

$$u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = 0 \qquad i = 1,\dots,m$$

Verificarea acestor egalități de către un cuplu de soluții admisibile $\bar{x} = \left[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right]^T$ şi $\bar{u} = \left[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\right]$ reprezintă deci o condiție necesară şi suficientă de optimalitate.

Pe lîngă formularea precedentă, teorema 2.3.4. mai are următoarea interpretare:

Cuplul ($\bar{x}$, $\bar{u}$) de soluții admisibile este un cuplu de soluții optime dacă şi numai dacă verifică seturile de implicații:

$$\begin{cases} \bar{x}_j > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{u}_i = c_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{u}_i < b_i \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{u}_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j = b_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{u}_i > c_j \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_j = 0 \end{cases}$$

Observație. Deşi prezentată pe un cuplu de probleme canonice, teorema 2.3.4. este valabilă pentru orice cuplu de probleme în dualitate. Astfel pentru cuplul:

$$\begin{cases} \max f = cx \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min g = ub \\ uA \ge c \\ u\ f.r.s. \end{cases}$$

ele se reduc la: $(uA - c)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i - c_j\right) u_j = 0 \quad j = 1,\dots,n.$

Şi mai concret, considerăm cuplul din:

Exemplul 2.3.1

$$(P)\begin{cases}\min f = 5x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases} \qquad (Q)\begin{cases}\max g = 6u_1 + 12u_2 + 4u_3 \\ 6u_1 + u_2 + 2u_3 \le 5 \\ 2u_1 + 3u_2 - u_3 \le -2 \\ -3u_1 + 2u_2 + 4u_3 \le -1 \\ u_1 \le 0, u_2\ f.r.s., u_3 \ge 0\end{cases}$$

Conform teoremei ecarturilor complementare, condiția necesară şi suficientă pentru ca două *soluții admisibile* ale celor două probleme:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)^T \text{ şi } \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$$

să fie optime este satisfacerea relațiilor:

$$(5 - 6u_1 - u_2 - 2u_3)x_1 = 0 \qquad (1)$$
$$(-2 - 2u_1 - 3u_2 + u_3)x_2 = 0 \qquad (2)$$
$$(-1 + 3u_1 - 2u_2 - 4u_3)x_3 = 0 \qquad (3)$$
$$(6 - 6x_1 - 2x_2 + 3x_3)u_1 = 0 \qquad (4)$$
$$(2x_1 - x_2 + 4x_3 - 4)u_3 = 0 \qquad (5)$$

O consecință importantă a teoremei ecarturilor complementare este faptul că rezolvarea unei probleme de programare liniară este echivalentă cu rezolvarea dualei sale în sensul că dacă se cunoaşte soluția optimă a uneia din ele putem deduce relativ simplu soluția optimă a celeilalte.Pentru ilustrare vom

determina soluția optimă a problemei (P) din exemplul precedent ştiind că duala (Q) are soluția optimă u^* de componente: $u_1^* = 0$, $u_2^* = -\frac{9}{14}$, $u_3^* = \frac{1}{14}$.
Înlocuind u^* în (1) - (5) se constată că relațiile (2),(3),(4) sunt satisfăcute de orice valori numerice acordate variabilelor x_1 , x_2 , x_3. În schimb din (1) şi (5) obținem relațiile: x_1=0 şi $2x_1$ - x_2 + $4x_3$ - 4 = 0 care împreună cu restricția egalitate din (P) constituie un sistem liniar:

$$\begin{cases}x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12\end{cases}$$

Rezolvând sistemul, obținem soluția optimă a problemei (P):

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = \tfrac{20}{7} \quad , \quad x_3^* = \tfrac{12}{7} \qquad\qquad f_{\max} = f(x^*) = -\tfrac{52}{7} = g(u^*) = g_{\min}$$

Echivalența amintită mai înainte este folositoare în rezolvarea efectivă a problemelor de programare liniară ştiut fiind că efortul de calcul este relativ mai mic dacă numărul restricțiilor este mai mic. În consecință, pentru o problemă cu multe restricții şi un număr restrâns de variabile, va fi mai comod să rezolvăm duala sa.

2.4 Interpretarea economică a dualității

Reluăm problema firmei din secțiunea 1.1 exemplul 1).Considerăm o întreprindere care produce bunurile $G_1, G_2, \ldots, G_m$ la prețurile $c_1, c_2, \ldots, c_n$ folosind pentru aceasta mai multe resurse $R_1, R_2, \ldots, R_m$ disponibile în cantitățile limitate $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Consumurile specifice de resurse pentru unul sau altul din bunurile realizabile de către firmă sunt specificate în matricea:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Obiectivul firmei este maximizarea veniturilor rezultate din vânzarea bunurilor produse. În ipotezele de liniaritate uzuale, programul liniar pentru determinarea combinației optime de bunuri este:

$$(\mathrm{P})\begin{cases} (\max) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ \quad a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \quad a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ \qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

Să notăm cu $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ combinația de bunuri care aduce firmei venitul maxim:

$$V^* = \max f = f(x^*) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \ldots + c_n x_n^*$$

Dacă admitem că singura posibilitate a firmei de a obține venitul V* constă în transformarea resurselor disponibile în bunuri conform programului x^* şi vânzarea acestora este natural să ne întrebăm *care este contribuția fiecărei resurse în parte la formarea acestui venit.*

La baza discuției vom pune aceleaşi ipoteze de liniaritate care ne-au condus la modelul matematic (P) şi anume:

- contribuția unei resurse la venitul maxim al firmei este - *pînă la o anumită limită* - direct proporțională cu cantitatea disponibilă;
- nivelul contribuției unei resurse nu este condiționat de celelalte resurse , ci numai de cantitatea în care ea se află disponibilă.

Să notăm atunci cu $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ *aportul* unei unități din resursa R_1, din resursa R_2, ş.a.m.d. la formarea venitului maxim V*.În virtutea ipotezelor de liniaritate amintite putem scrie:

$$V^* = b_1 u_1^* + b_2 u_2^* + \ldots + b_m u_m^* \qquad (2.4.1)$$

Producerea unei unități din bunul G_j necesită a_{1j} unități din resursa R_1, a_{2j} unități din resursa R_2 ,....., a_{mj} unități din resursa R_m.
Partea din venitul maxim V* corespunzătoare acestor cantități este:

$$a_{1j} u_1^* + a_{2j} u_2^* + \ldots + a_{mj} u_m^*$$

Această mărime trebuie să acopere prețul pe care firma îl încasează prin vânzare de vreme ce ea nu are alte resurse de formare a venitului în afara transformării resurselor în bunuri. Se conchide că sistemul $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ trebuie să satisfacă relațiile:

$$\begin{cases} a_{11} u_1^* + a_{21} u_2^* + \ldots + a_{m1} u_m^* \geq c_1 \\ a_{12} u_1^* + a_{22} u_2^* + \ldots + a_{m2} u_m^* \geq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} u_1^* + a_{2n} u_2^* + \ldots + a_{mn} u_m^* \geq c_n \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

şi deasemeni condițiile de nenegativitate:

$$u_1^* \geq 0, u_2^* \geq 0, \ldots, u_m^* \geq 0 \qquad (2.4.3)$$

Sunt suficiente relațiile (2.4.1) - (2.4.3) pentru determinarea efectivă a valorilor $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$? Teoria dualității dă un răspuns afirmativ pe baza următoarelor observații:

1) Relațiile (2.4.2) și (2.4.3) arată că $u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ constituie o soluție admisibilă a dualei (Q) asociată problemei (P):

$$(Q)\begin{cases} (\min) g(x) = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_m u_m \\ a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \ldots + a_{m1} u_m \geq c_1 \\ a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \ldots + a_{m2} u_m \geq c_2 \\ . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} u_1 + a_{2n} u_n + \ldots + a_{mn} u_m \geq c_n \\ \quad u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \ldots, u_m \geq 0 \end{cases}$$

2) Relația (2.4.1) rescrisă în forma $f(x^*) = g(u^*)$, coroborată cu teorema de dualitate 2.3.1, ne arată că u^* este chiar soluția optimă a problemei duale Q.

Astfel, am găsit un conținut economic coerent variabilelor duale u_1, u_2,..., u_m din problema duală (Q). Ele reprezintă niște valori bănești asociate la câte o unitate din fiecare resursă disponibilă a firmei și exprimă *aportul unitar* al fiecărei resurse la formarea venitului *maxim*. Strict dimensional, variabilele u_1, u_2,..., u_m au semnificația unor *prețuri* atașate resurselor. Totuși aceste prețuri nu au nimic comun cu valoarea intrinsecă a resurselor ci - așa cum a rezultat din interpretarea dată - reflectă numai măsura participării lor la formarea venitului maxim. Tocmai pentru a preveni identificarea lor cu prețurile reale ale resurselor, în literatura de specialitate, aceste entități au fost denumite *prețuri umbră* (shadow prices). A rezultat deasemeni și o modalitate de calcul a acestor mărimi : *se rezolvă problema duală (Q).*

Teoria dualității arată că venitul maxim V* al firmei - privit ca funcție de cantitățile disponibile de resurse - depinde liniar de aceste disponibile prin intermediul prețurilor duale optime - vezi relația (2.4.1)

În consecință:

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = u_i^* \qquad i = 1,\ldots,m$$

(2.4.4)

Prin urmare prețurile duale optime ne arată cu cât se modifică venitul maxim V al firmei la o variație cu o unitate a disponibilului unei resurse.*

Este important de reținut faptul că aceste concluzii rămîn valabile numai în situația în care componentele vectorului b variază între anumite limite! În cazul general, atunci când se iau în considerare toate valorile posibile ale lui b, adică $b \in R_+^m$, funcția $V^*(b)$ este *subaditivă* şi *pozitiv omogenă.* Aceasta înseamnă:

$$V^*(b+b') \le V^*(b) + V^*(b') \qquad (\forall)\ b, b' \in R_+^m$$
$$V^*(tb) = tV^*(b) \qquad (\forall)\ t \ge 0, b \in R_+^m$$

Reamintim că în baza teoremei ecarturilor complementare soluțiile optime x^*, u^* al problemelor (P) şi (Q) satisfac relațiile:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow a_{1j}u_1^* + a_{2j}u_2^* + \ldots + a_{mj}u_m^* = c_j \tag{2.4.5}$$
$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* < b_i \Rightarrow u_i^* = 0 \tag{2.4.5'}$$
$$u_i^* > 0 \Rightarrow a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i \tag{2.4.6}$$
$$a_{1j}u_1^* + a_{2j}u_2^* + \ldots + a_{mj}u_m^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \tag{2.4.6'}$$

(2.4.5) arată că dacă bunul G_j intră în combinația optimă atunci prețul său este egal cu partea din venitul maxim al firmei corespunzătoare resurselor încorporate într-o unitate din el.

(2.4.5') arată că dacă o resursă nu este prevăzută a se consuma în întregime - spunem că este *excedentară* - prețul său dual este 0. Această concluzie reprezintă versiunea liniară a legii cererii şi ofertei - prețul unei mărfi pentru care oferta este mai mare decât cererea trebuie să scadă.

(2.4.6) arată că o resursă cu preț dual semnificativ trebuie consumată în întregime; creşterea cu o unitate a disponibilului aducând o creştere a venitului maxim conform (2.4.4).

(2.4.6') arată că dacă pentru un bun valoarea resurselor încorporate într-o unitate - valoare măsurată în prețurile duale optime - depăşeşte prețul său atunci acesta nu intră în combinația optimală. Diferența $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_j^* - c_j$ reprezintă *pierderea potențială* de venit pe care firma o va înregistra dacă totuşi decide realizarea unei unități din bunul j.

Condițiile (2.4.5),(2.4.5'),(2.4.6),(2.4.6') date de teorema ecarturilor complementare se mai numesc şi *condiții de echilibru* de unde şi numele de *prețuri de echilibru* dat uneori prețurilor duale optime.