5.Algoritmul simplex dual

Există situații în care pentru rezolvarea unui program liniar, dispunem de o soluție de bază care nu este admisibilă. Următoarele considerații au drept scop să pună în evidență o altă clasă de soluții de bază cu care se poate opera într-o manieră asemănătoare celei în care lucrează algoritmul simplex descris în paragraful 4.

5.1 Admisibilitate primală şi duală

Fie (P) un program liniar în formă standard:

$$(P)\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \;\; i=1,\dots,m\\ x_j \ge 0 \;\; j=1,\dots,n\\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}Ax = b\\ x \ge 0\\ (\max) f = cx\end{cases}$$

(vezi notațiile matriciale(3.3.1)) Fie B o bază a programului (P), I mulțimea indicilor coloanelor din B, J mulțimea indicilor coloanelor din A care nu sunt în B. În secțiunea 3.5 am scris (P) în forma:

$$(P_B)\begin{cases}(\max) f = \overline{f} - \sum_{j\in J}\overline{c}_j x_j\\ x_i + \sum_{j\in J}\overline{a}_{ij}x_j = \overline{b}_i\\ x_i \ge 0, i\in I; x_j \ge 0, j\in J\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}(\max) f = \overline{f} - \overline{c}^S x^S\\ x^B + \overline{S}x^S = \overline{b}\\ x^B \ge 0,\, x^S \ge 0\end{cases}$$

(vezi notațiile (3.5.2-3.5.7)), numită *forma explicită* a programului (P) în raport cu baza B.

Să considerăm acum dualul programului (P):

$$(Q)\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \ge c_j \;\; j=1,\dots,n\\ u_i \;\; oarecari \;, i=1,\dots,m\\ (\min) g = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}uA \ge c\\ u \;\; oarecare\\ (\min) g = ub\end{cases}$$

(vezi notațiile din 2.2) Aducem sistemul de inegalități $uA \geq c$ la forma standard introducând variabilele de abatere $v_1, v_2, \ldots, v_n$ reunite în vectorul linie v.

$$(FSQ)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}u_i - v_j = c_j \\ u_i \ oarecari, i = 1,\ldots,m; v_j \geq 0 \ j = 1,\ldots,n \\ (\min) g = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i u_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uA - v = c \\ u \ oarecare, v \geq 0 \\ (\min) g = ub \end{cases}$$

Partiționând:

$$v = \left[v^B, v^S\right] \quad cu \quad v^B = \left[v_i\right]_{i\in I} \quad , \quad v^S = \left[v_j\right]_{j\in J}$$

sistemul liniar din (FSQ) devine succesiv:

$$uA - v = c \Leftrightarrow u\left[B, S\right] - \left[v^B, v^S\right] = \left[c^B, c^S\right] \Leftrightarrow \begin{cases} uB - v^B = c^B & (5.1.1) \\ uS - v^S = c^S & (5.1.2) \end{cases}$$

Deoarece B este nesingulară din (5.1.1) rezultă:

$$u = c^B B^{-1} + v^B B^{-1} \tag{5.1.3}$$

Introducem u în (5.1.2):

$$(c^B B^{-1} + v^B B^{-1})S - v^S = c^S \Leftrightarrow v^S - v^B B^{-1} S = c^B B^{-1} S - c^S \Leftrightarrow v^S - v^B \overline{S} = \overline{c}^S$$

(cu notațiile 3.5.2-3.5.7) Folosind din nou (5.1.3) eliminăm u din funcția obiectiv duală:

$$g(u) = (c^B B^{-1} + v^B B^{-1})b = c^B B^{-1} b + v^B B^{-1} b = \overline{f} + v^B \overline{b}$$

In acest fel, am adus (FSQ) la forma echivalentă:

$$(Q_B)\begin{cases} v^S - v^B \overline{S} = \overline{c}^S \\ v^S \geq 0, v^B \geq 0 \\ (\min) g = \overline{f} + v^B \overline{b} \end{cases}$$

variabilele originale u_i , i=1,...,m fiind legate de variabilele v_j , j=1,...,n prin relația (5.1.3).

Programul (Q_B) se va numi *forma explicită a dualului (Q) în raport cu baza B.*

Pentru a sublinia simetria existentă între problemele (P_B) și (Q_B) le vom scrie alăturat atât scalar cât și matricial:

$$(P_B)\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j\in J}\overline{a}_{ij}x_j = \overline{b}_i \quad i\in I \\ x_i \geq 0, i\in I; x_j \geq 0, j\in J \\ (\max) f = \overline{f} - \sum\limits_{j\in J}\overline{c}_j x_j \end{cases} \qquad (Q_B)\begin{cases} v_j - \sum\limits_{i\in I}\overline{a}_{ij}v_i = \overline{c}_j \quad j\in J \\ v_j \geq 0, j\in J; v_i \geq 0, i\in I \\ (\min) g = \overline{f} + \sum\limits_{i\in I} v_i\overline{b}_i \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^B + \overline{S}x^S = \overline{b} \\ x^B \geq 0, x_S \geq 0 \\ (\max) f = \overline{f} - \overline{c}^S x^S \end{cases} \qquad \begin{cases} v^S - v^B\overline{S} = \overline{c}^S \\ v^S \geq 0, v^B \geq 0 \\ (\min) g = \overline{f} - v^B\overline{b} \end{cases}$$

Observație: Cu ajutorul relației (5.1.3) am rescris dualul (Q) în alte variabile care sunt supuse condiției de nenegativitate ca și variabilele programului primal (P). Putem vorbi acum de soluții și soluții admisibile pentru programul (Q) și când facem acest lucru ne referim la forma echivalentă (Q_B).

Prin analogie cu conceptul de soluție a primalei (P) asociată bazei B introducem termenul de *soluție a dualei (Q) asociată bazei B* anulând în sistemul restricțiilor lui (Q_B) variabilele "secundare" v_i , $i\in$ I :

$$\begin{gathered} v^B \geq 0 \;\Rightarrow\; v^S = \overline{c}^S \\ \Updownarrow \\ v_i = 0 \;,\; i\in I \;\Rightarrow\; v_j = \overline{c}_j \;,\; j\in J \end{gathered} \tag{5.1.4}$$

Rezultă imediat că valoarea funcției obiectiv duale în soluția construită este constanta $\overline{f}$.
Folosind (5.1.3), soluția dualei (Q), corespunzătoare soluției (5.1.4) este:

$$u = c^B B^{-1} \tag{5.1.5}$$

Soluția (5.1.4) va fi o soluție admisibilă pentru duala (Q) dacă:

$$\bar{c}^S \geq 0 \iff \bar{c}_j \geq 0 \;,\; j \in \mathrm{J}$$

Mai departe, exact ca în demonstrația teoremei A a metodei simplex (vezi secțiunea 4.1) soluția (5.1.4), presupusă admisibilă, va fi optimă dacă:

$$\bar{b} \geq 0 \iff \bar{b}_i \geq 0 \;,\; i \in \mathrm{I}$$

Reamintim că soluția primalei (P) asociată bazei B este:

$$\begin{array}{c} x^S = 0 \;\Rightarrow\; x^B = \bar{b} \\ \Updownarrow \\ x_j = 0 \,,\, j \in J \;\Rightarrow\; x_i = \bar{b}_i \,,\, i \in I \end{array} \tag{5.1.6}$$

Această soluție este admisibilă dacă $\bar{b} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_i \geq 0 \,, i \in I$ şi în plus optimă dacă $\bar{c}^S \geq 0 \Leftrightarrow \bar{c}_j \geq 0 \,, j \in J$. Obținem următoarele concluzii remarcabile:

- *Soluția (5.1.6) a primalei (P) asociată bazei B este admisibilă (respectiv satisface criteriul de optimalitate al algoritmului simplex) dacă şi numai dacă soluția (5.1.4) a dualei (Q) asociată aceleiaşi baze satisface criteriul de optimalitate (respectiv este admisibilă).*
- *Valorile funcțiilor obiectiv primală şi duală în cele două soluții evidențiate coincid (cu constanta $\bar{f}$)*
- *Soluția (5.1.6) este o soluție optimă a programului (P_B) ≡ (P) dacă şi numai dacă soluția (5.1.4) este optimă pentru programul (Q_B), ceeace echivalează cu a spune că soluția (5.1.5) este optimă pentru programul dual (Q).*

În rezumat, pornind de la problema originală (P) şi de la o bază B a sa am construit două probleme în dualitate (P_B) şi (Q_B) şi am pus în evidență două soluții ale acestora, pe care le-am numit soluții asociate bazei B. Cuplul de soluții evidențiat are proprietățile:

i)Una din soluții este admisibilă (verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex) dacă şi numai dacă cealaltă verifică criteriul de *optimalitate (respectiv este admisibilă) În particular una este optimă dacă şi numai dacă cealaltă este optimă.*

ii) Valorile funcţiilor obiectiv în cele două soluţii coincid.

Contextul astfel creat sugerează următoarea schimbare de terminologie:

- *O soluţie de bază a programului (P) se va numi primal admisibilă dacă este admisibilă în sensul de până acum adică are toate componentele nenegative.*
- *O soluţie de bază a programului (P) se va zice dual admisibilă dacă verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex. O bază a programului (P) se va numi dual admisibilă dacă soluţia asociată este dual admisibilă.*

În terminologia introdusă, proprietatea i) de mai sus se reformulează astfel:

- *Una din soluţii este primal admisibilă dacă şi numai dacă cealaltă este dual admisibilă. Oricare din ele este optimă dacă şi numai dacă este simultan primal şi dual admisibilă.*

5.2 Algoritmul simplex dual

Consideraţiile precedente sugerează posibilitatea rezolvării programului original (P) utilizând clasa soluţiilor dual admisibile. Următorul algoritm, numit *algoritmul simplex dual,* rezultă nemijlocit din aplicarea teoremelor A, B, C ale metodei simplex la problema (Q_B).

Presupunem cunoscută o soluţie de bază dual admisibilă a programului (P) şi tabelul simplex (uzual) asociat. În notaţiile deja utilizate, o iteraţie a algoritmului simplex dual se compune din următorii paşi:

Pasul 1. *(Test de optimalitate) Dacă toţi* $\bar{b}_i \geq 0$, $i \in I$ *STOP : soluţia de bază dual admisibilă curentă este optimă. În caz contrar:*

Pasul 2. *Se determină indicele bazic* $r \in I$ *cu proprietatea:*

$$\bar{b}_r = \min_{i \in I} \bar{b}_i \qquad (\bar{b}_r < 0)$$

Coloana A^r *părăseşte baza curentă.*

Pasul 3. *Dacă pentru toți $j \in J$ avem $\bar{a}_{rj} \geq 0$ STOP: problema primală nu are soluții admisibile. Altminteri:*

Pasul 4. *Se determină indicele nebazic $k \in J$ cu proprietatea:*

$$\left| \bar{c}_k / \bar{a}_{rk} \right| = \min_{\bar{a}_{rj} < 0} \left| \bar{c}_j / \bar{a}_{rj} \right|$$

Coloana A^k intră în baza curentă.

Pasul 5. *Se pivotează tabelul simplex curent cu pivotul $\bar{a}_{rk}$ <o. În acest fel se obține forma explicită a programului (P) în raport cu baza B' dedusă din B prin înlocuirea coloanei A^r cu coloana A^k. Se revine la pasul 1 în cadrul unei noi iterații.*

Observații: 1) Considerațiile expuse în această secțiune sunt valabile cu mici modificări şi în cazul în care funcția obiectiv din programul original (P) se minimizează. Cititorul va verifica imediat că algoritmul prezentat mai sus rămîne valabil şi pentru asemenea probleme.

2) Concluzia din pasul 3 este consecința teoremei fundamentale a dualității. Într-adevăr, dacă $\bar{a}_{rj} \geq 0$, $j \in$J atunci programul dual (Q) are optim infinit şi în consecință programul (P) este incompatibil.

3) Nu insistăm asupra modalității de determinare a unei soluții de bază dual admisibile de start deoarece algoritmul va fi aplicat numai în situații în care o asemenea soluție este disponibilă.

Exemplu 5.2.1 Considerăm programul:

$$(P)\begin{cases} (\min) f = 12x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + \ x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Introducem variabilele de abatere x_4 şi x_5 după care înmulțim cu -1 egalitățile rezultate:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad = -3$$
$$-4x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_5 = -4$$

Soluția asociată bazei unitare E=[A^4 , A^5] nu este admisibilă:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad x_4 = -3 \ , \ x_5 = -4$$

dar dacă evaluăm costurile reduse $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ constatăm că ele verifică criteriul de optimalitate al algoritmului simplex (bineînțeles pentru probleme de minimizare!).Vezi tabelele 5.2.1-5.2.4.

Se constată că soluția optimă a programului dat are componentele :

$$x_1^* = \tfrac{1}{7} \quad , \quad x_2^* = 0 \quad , \quad x_3^* = \tfrac{24}{7} \quad ; \quad f_{\min} = \tfrac{156}{7}$$

Observație finală. Pentru simetrie, algoritmul descris în secțiunea 4.2 se va numi *algoritmul simplex primal*. Recapitulând teoria se constată fără dificultate că *maximul (minimul) unei funcții obiectiv se atinge prin valori crescătoare (descrescătoare) în simplexul primal şi prin valori descrescătoare (crescătoare) în simplexul dual.*

			12	2	6	0	0
c^B	B	VVB	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5
0	A^4	-3	3	2	-1	1	0
0	A^5	-4	-4	$\boxed{-1}$	-1	0	1
	f	0	-12	-2	-6	*	*
0	A^4	-11	$\boxed{-5}$	0	-3	1	2
2	A^2	4	4	1	1	0	-1
	f	8	-4	*	-4	*	-2
12	A^1	11/5	1	0	3//5	-1//5	-2/5
2	A^2	-24/5	0	1	$\boxed{-7/5}$	4/5	3/5
	f	84/5	*	*	-8/5	-4/5	-18/5
12	A^1	1/7	1	3/7	0	1/7	-1/7
6	A^3	24/7	0	-5/7	1	-4/7	-3/7
	f	156/7	*	-8/7	*	-12/7	-30/7

A^5 iese din baza curentă.
min{| -12/-4| , | -2/-1| , | -6/-1| } =
= 2 $\Rightarrow$ A^2 intră în baza curentă.
***
A^4 iese din baza curentă.
min{| -4/-5| , | -4/-3| } = 4/5 $\Rightarrow$
A^1 intră în baza curentă.
***
A^2 iese din baza curentă.
A^3 intră în baza curentă.
***
Soluția curentă este dual şi primal admisibilă.

Tabelele 5.2.1 - 5.2.4