8. Programarea scop

În general, într-o problemă de optimizare se urmăreşte maximizarea sau minimizarea unei funcţii numerice în condiţiile satisfacerii unui sistem de restricţii. În aplicaţiile economice restricţiile formalizează o serie de condiţii cum ar fi: încadrarea consumurilor în stocurile disponibile, realizarea profiturilor prognozate, menţinerea costurilor de producţie sub un anumit plafon, utilizarea cât mai deplină a forţei de muncă, asigurarea unei producţii diversificate, menţinerea şi extinderea pieţelor de desfacere etc. Oricare din aceste condiţii este în realitate un "obiectiv" pe care planificatorul doreşte să-l realizeze. Fiecărui obiectiv i se fixează o anumită limită sub care nu trebuie să coboare sau care trebuie depăşită (uneori, chiar două limite - inferioară şi superioară - între care trebuie să se situeze).

De obicei, unul din aceste obiective este lăsat "liber" - adică neplafonat - urmărindu-se determinarea unei "soluţii" care să atingă celelalte obiective şi să asigure celui ales cea mai mare sau, după caz, cea mai mică valoare.Acest punct de vedere nu este întotdeauna realist. Adeseori, problemele curente ale conducerii activităţilor economice reclamă urmărirea "simultană" a mai multor obiective şi în consecinţă determinarea unei soluţii prin care toate acestea să fie realizate. În majoritatea cazurilor însă, este imposibilă obţinerea unei asemenea soluţii.

În acest context, *programarea scop* îşi propune să determine o soluţie care să se apropie "cât mai mult" de obiectivele fixate, în sensul minimizării totalului "abaterilor". Există două modalităţi curente de a realiza acest deziderat.

În *programarea scop nepreemtivă* tuturor obiectivelor li se acordă aceeaşi importanţă. În *programarea scop preemtivă* obiectivele sunt mai întâi clasificate pe nivele de prioritate. Obiectivele de primă importanţă vor fi urmărite cu prioritate şi numai după aceea vor fi avute în vedere obiectivele de importanţă secundară etc.

8.1 Programarea scop nepreemtivă

Să considerăm sistemul restricţiilor unui program liniar oarecare (pentru simplitate în formă standard):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,\dots,m \qquad (8.1.1)$$

unde $x_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n$

Presupunem că (8.1.1) modelează o firmă cu n activități productive, planificatorul urmărind realizarea simultană a m obiective şi mai precis, determinarea unei soluții care să atingă "țelurile" $b_1, b_2,\dots,b_m$ fixate acestora. Deoarece lucrăm în ipotezele uzuale de liniaritate, constantele $a_{i1}, a_{i2},\dots,a_{in}$ reprezintă "contribuțiile" unitare ale celor n activități productive la realizarea obiectivului i. După cum s-a specificat şi în introducere nu întotdeauna se poate găsi o soluție care să atingă toate țelurile propuse, altfel spus, este posibil ca sistemul (8.1.1) să nu aibe soluții nenegative.

Plecând de la caracterul "orientativ" al țelurilor fixate pentru obiective, programarea scop admite *nesatisfacerea* în totalitate a ecuațiilor (8.1.1) introducând pe de altă parte anumite "*penalizări*" în ceeace priveşte abaterea de la egalitate. În noul context, se urmăreşte găsirea unei soluții a sistemului (8.1.1) care să satisfacă "cât mai bine" ecuațiile sale în sensul *minimizării sumei penalizărilor* cauzate de neîndeplinirea unora din ele.

Pentru a formaliza ideile de mai sus introducem în egalitățile (8.1.1) variabilele $y_1, y_2,\dots,y_m$ *fără restricții de semn*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \qquad i = 1,\dots,m \tag{8.1.2}$$

Dacă $\bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ reprezintă un set de nivele posibile ale activităților firmei, diferența:

$$\bar{y}_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j$$

va fi o măsură a "neîndeplinirii țelului" b_i fixat pentru obiectivul i:

- dacă $\bar{y}_i < 0$ atunci $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j > b_i$; spunem în acest caz că $\bar{x}$ "*depăşeşte*" țelul propus;

- dacă $\bar{y}_i > 0$ atunci $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j < b_i$; în acest caz vom zice că $\bar{x}$ "*nu atinge*" țelul fixat;

De multe ori, atât depăşirea unui ţel prestabilit cât şi neatingerea lui pot fi "păgubitoare" dar cu semnificaţii şi consecinţe diferite: ca urmare, penalizarea pentru depăşire poate să difere de cea corespunzătoare neatingerii. Introducerea acestor noi elemente necesită descompunerea:

$$y_i = y_i^+ - y_i^- \tag{8.1.3}$$

în care y_i^+, y_i^- sunt partea pozitivă respectiv partea negativă a variabilei y_i, mărimi definite prin:

$$y_i^+ = \begin{cases} y_i \text{ daca } y_i > 0 \\ 0 \text{ daca } y_i \le 0 \end{cases} \qquad y_i^- = \begin{cases} 0 \text{ daca } y_i \ge 0 \\ -y_i \text{ daca } y_i < 0 \end{cases} \tag{8.1.4}$$

Din (8.1.4) rezultă că $y_i^+ \ge 0$, $y_i^- \ge 0$ şi că y_i^+ , y_i^- nu pot fi simultan nule decât în cazul când $y_i = 0$.

Fie p_i^+ penalizarea pentru depăşirea ţelului b_i fixat pentru obiectivul i şi p_i^- penalizarea pentru neatingerea acestuia.

Cu observaţia finală că obiectivele nu sunt ierarhizate în prealabil pe nivele de prioritate, *programarea scop nepreeemtivă* îşi propune să determine un vector $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ care să minimizeze suma:

$$w = \sum_{i=1}^{m} p_i^+ y_i^+ + \sum_{i=1}^{m} p_i^- y_i^- \tag{8.1.5}$$

cu satisfacerea restricţiilor:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i^+ - y_i^- = b_i \tag{8.1.6}$$

şi a condiţiilor de nenegativitate:

$$x_j \ge 0 \quad j=1,\ldots,n \;;\quad y_i^+ \ge 0 \,,\; y_i^- \ge 0 \quad i=1,\ldots,m \tag{8.1.7}$$

În cele de mai sus restricţiile originale (8.1.1) au fost presupuse egalităţi şi ca urmare a fost penalizată atât "lipsa" cât şi "excesul".

Dacă din anumite motive nu putem accepta depăşirea ţelului b_i (respectiv neatingerea lui) vom pune p_i^- = M (respectiv p_i^+ = M) unde M este o constantă pozitivă foarte mare (aceasta înseamnă practic transformarea variabilei y_i^- respectiv y_i^+ în variabilă “artificială”).

Să presupunem acum că restricția i din (8.1.1) este în fapt o inegalitate de tipul $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, fapt care sugerează că b_i este o "limită superioară" a obiectivului corespunzător.Ținând seama de (8.1.3) şi (8.1.4) nu vom penaliza "neatingerea" țelului b_i, punând în consecință $p_i^+ = 0$. Dacă din contră, b_i ar fi o "limită inferioară" a obiectivului i, deci am avea inegalitatea $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$,nu vom penaliza "depăşirea" lui b_i, punând în consecință $p_i^- = 0$.

Vom observa în final că soluția x* depinde nemijlocit de alegerea penalizărilor p_i^+ şi p_i^- .

Exemplul 8.1.1 Conducerea firmei X are în vedere trei noi produse care vor înlocui modelele curente. Ea a trasat copartimentului de C.O. sarcina de a stabili combinația în care vor fi realizate noile bunuri, urmărind obiectivele:

- realizarea unui profit de cel puțin 125 milioane $;
- menținerea în activitate a celor 4000 de angajați actuali;
- menținerea volumului investițiilor sub plafonul de 55 milioane $;

"Contribuțiile" noilor bunuri la atingerea obiectivelor sus amintite sunt direct proporționale cu "nivelele" la care sunt produse (cu alte cuvinte se va lucra în ipotezele uzuale de liniaritate); ele sunt indicate în tabelul 8.1.1.

Conştient de faptul că este posibil ca toate cele trei obiective să nu poată fi îndeplinite simultan, directorul executiv a examinat cu specialiştii departamentului diferite modalități de obținere a unei soluții "de compromis". Astfel s-a convenit o penalizare de 5 unități valorice pentru nerealizarea profitului scontat (per milion $), 2 unități valorice pentru depăşirea numărului actual de angajați şi 4 unități pentru diminuarea sa (per suta de angajați)

precum şi 3 unități valorice pentru depăşirea plafonului investițional (per milion $).

Notă: valoarea "penalizărilor este mai puțin importantă; ceeace contează sunt raporturile dintre ele. Astfel, conducerea firmei nu agreează o modificare a numărului de angajaţi, dar dacă aceasta nu poate fi evitată, ar prefera să angajeze noi lucrători decât să disponibilizeze o parte a personalului actual. În opinia directorului executiv, cel mai important obiectiv rămâne realizarea profitului scontat. Ar urma grija de a nu recurge la concedieri şi în fine cerinţa de a respecta plafonul de investiţii stabilit.

Obiectiv	Contribuţii unitare Produse 1	2	3	Ţel	Unitate	Penalizări
Profit	12	9	15	≥ 125	mil. $	5 (-)
Forţa de muncă	5	3	4	= 40	sută de angajaţi	2 (+) , 4 (-)
Investiţii	5	7	8	≤ 55	mil. $	3 (+)

Tabelul 8.1.1

În cazul de faţă, programarea scop nepreemtivă propune rezolvarea următorului program liniar:

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 + y_1^+ - y_1^- = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_2^+ - y_2^- = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + y_3^+ - y_3^- = 55 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3\,;\; y_i^+ \geq 0\,,\; y_i^- \geq 0 \quad i = 1,2,3\,; \\ (\min) w = 5y_1^+ + 4y_2^+ + 2y_2^- + 3y_3^- \end{cases}$$

(vezi modelul general (8.1.5) - (8.1.7))

Luând ca variabile bazice iniţiale y_1^+, y_2^+, y_3^+, în trei iteraţii se găseşte următoarea combinaţie în care vor fi produse noile bunuri:

$$x_1^* = 25/3 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 5/3$$

Soluţia găsită asigură realizarea profitului scontat ($y_1^+ = y_1^- = 0$) şi menţine investiţia la nivelul plafonului impus ($y_3^+ = y_3^- = 0$) dar necesită noi angajări de personal (deoarece $y_2^- = \frac{25}{3} \cdot 100 \approx 833$ angajaţi). Penalizarea pentru abaterea de la ţelurile propuse are în acest caz valoarea minimă $w^* = 50/3$.

8.2 Programarea scop preemtivă

În exemplul precedent toate obiectivele au fost presupuse a avea cam aceeaşi importanţă. Există situaţii în care unul sau mai multe obiective se detaşează net în importanţă faţă de celelalte şi în consecinţă realizarea lor va fi urmărită cu prioritate. La rândul lor, obiectivele rămase pot fi şi ele împărţite pe grupe de prioritate: a doua prioritate, a treia ş.a.m.d. Principiul *programării scop preemtive* este următorul:

Din mulţimea soluţiilor care realizează (cel mai bine) obiectivele cu prioritatea unu se selectează soluţiile care se apropie "cel mai mult" de obiectivele cu prioritatea doi ş.a.m.d., obiectivele cu aceeaşi prioritate fiind tratate ca în cazul programării scop nepreemtive. Dacă la o anumită etapă a acestei cercetări secvenţiale rezultă o singură soluţie ea va fi acceptată fără a mai lua în considerare şi eventualele obiective rămase.

Exemplul 8.2.1 După cum am văzut soluţia găsită în exemplul 8.1.1 recomanda creşterea numărului de angajaţi cu mai mult de 20%. Procentul este mult prea mare, crede directorul executiv care consideră că este foarte probabil ca necesitatea creşterii forţei de muncă să aibe un caracter temporar. Astfel, angajarea unui mare număr de persoane pe perioade relativ scurte ar implica cheltuieli de instruire nerecuperabile în bună măsură iar pe de altă parte, prin operarea unor concedieri masive, firma ar putea întâmpina în viitor dificultăţi în angajarea unor specialişti cu înaltă calificare.

Din aceste motive, directorul executiv este de părere că nedepăşirea numărului actual de angajaţi trebuie să devină un obiectiv cu prioritate maximă. Aceeaşi importanţă, spune el, va trebui acordată şi menţinerii investiţiei de capital pentru noile produse în limita plafonului de 55 mil.$.

În acest fel, obiectivele avute în vedere în exemplul 8.1.1 au fost împărţite în două grupe. În grupa obiectivelor cu prioritatea unu au fost incluse: nedepăşirea numărului actual de angajaţi şi menţinerea investiţiei de capital sub plafonul fixat, în grupa obiectivelor cu prioritatea doi rămânând realizarea unui profit de cel puţin 125 mil.$ şi evitarea micşorării numărului actual de angajaţi. (vezi tabelul 8.2.1)

Nivel de prioritate	Obiectiv	Țel	Penalizare (pentru neîndeplinire)
unu	Utilizarea forței de muncă Investiția de capital	$\leq$ 40 $\leq$ 55	2 (+) 3 (+)
doi	Profit Utilizarea forței de muncă	$\geq$ 125 $\geq$ 40	5 (-) 4 (-)

Tabelul 8.2.1

Într-o primă etapă vom considera numai obiectivele cu prioritatea unu; modelul matematic corespunzător va fi:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_2^+ - y_2^- = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + y_3^+ - y_3^- = 55 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3\,;\ y_i^+ \geq 0\,,\ y_i^- \geq 0 \quad i = 1,2\,; \\ \quad (min) w_1 = 2y_2^- + 3y_3^- \end{cases}$$

(pentru a facilita comparația cu modelul "nepreemtiv" au fost folosite notațiile din exemplul 8.1.1).

Se constată imediat că problema are o infinitate de soluții în care $y_2^- = y_3^- = 0$ (implicând min $w_1 = 0$).

În a doua etapă vom avea în vedere obiectivele cu prioritatea doi; pentru aceasta rezolvăm modelul:

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 + y_1^+ - y_1^- = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_2^+ = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + y_3^+ = 55 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3 \,;\; y_i^+ \ge 0 \quad i = 1,2,3 \,;\; y_2^- \ge 0 \\ (\min) w_2 = 5y_1^+ + 4y_2^+ \end{cases}$$

După cum se vede variabilele y_2^- şi y_3^- au fost omise pentru a se asigura îndeplinirea obiectivelor cu prioritatea unu.

Rezultă soluția : $x_1^{**} = 5 \quad x_2^{**} = 0 \quad x_3^{**} = {}^{15}\!/_4$.

Pe lângă obiectivele din prima grupă această soluție realizează şi menținerea numărului de angajați. În schimb, profitul care s-ar obține va fi mai mic cu $y_1^+ = {}^{35}\!/_4 = 8{,}75$ mil.$ decât cifra planificată inițial.