CAPITOLUL II

PROBLEME DE OPTIMIZARE IN RETELE DE TRANSPORT SI DISTRIBUTIE

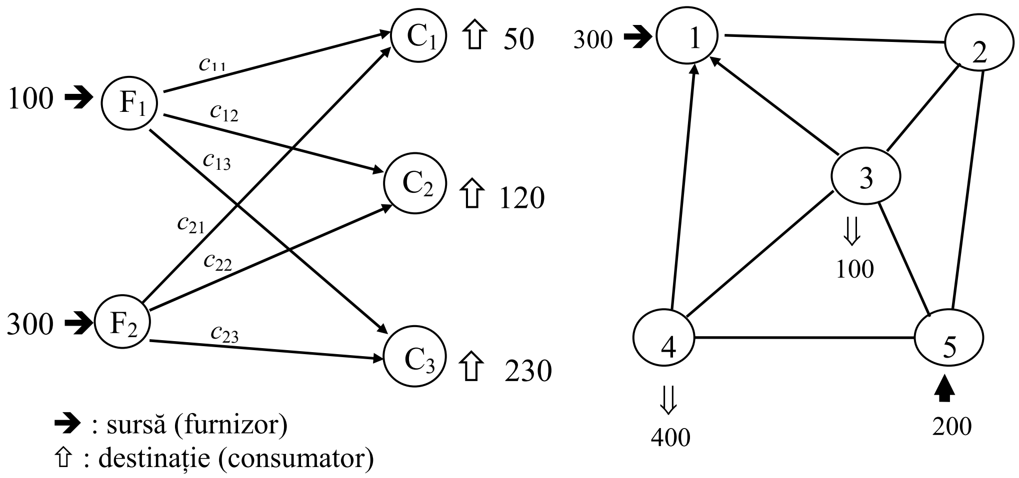
1.Modelarea problemelor de transport şi distribuţie

Într-o mare varietate de contexte se pune problema *deplasării* unei cantităţi Q ce poate fi materie, energie, informaţie, etc. din unele locuri numite *surse* în alte locuri numite *destinaţii,* această deplasare realizându-se pe anumite *rute de legătură.* Unităţile indivizibile ale cantităţii Q care se deplasează de-alungul rutelor se vor numi *unităţi de flux.*

1.1 O clasificare a problemelor de transport şi distribuţie

Pentru Cercetarea Operaţională, problema enunţată va prezenta interes numai dacă respectă următoarele ipoteze:

a) cel puţin o sursă poate aproviziona mai multe destinaţii şi cel puţin o destinaţie poate primi unităţi de flux de la mai multe surse.
Rutele de legătură pot avea şi alte puncte comune în afara surselor şi destinaţiilor, numite *puncte intermediare* sau *de tranzit.* Nu sunt excluse legăturile directe între surse sau între destinaţii. În principiu, orice rută poate fi parcursă în ambele sensuri, dar pot exista şi rute cu sens unic.



a) **b)**

Figura 1.1.1

Ansamblul surselor, destinațiilor, al punctelor intermediare şi al rutelor de legătură se va numi *rețea de transport;* el se identifică cu un *graf neorientat sau parțial orientat* ca în figura 1.1.1.

b) Unele rute de legătură pot avea limitări superioare şi / sau inferioare pentru volumul unităților de flux ce se deplasează într-un sens sau altul. Aceste limitări poartă numele de *capacități* (inferioare, respectiv superioare) În continuare, vom avea în vedere numai cazul în care toate capacitățile inferioare sunt egale cu zero, capacitățile superioare fiind exprimate prin numere pozitive.

*c) Există un cost al deplasării unei unități de flux de la un punct al rețelei la altul,*cost care poate fi exprimat în *bani, timp* sau *distanță.* Sunt situații în care acest cost poate semnifica *profitul* obținut de pe urma deplasării. Pe aceeaşi rută, costurile ce şi capacitățile pot diferi în funcție de sensul de parcurgere.

Ipoteza a) va fi întotdeauna presupusă în timp ce ipotezele b) şi c) pot ființa separat sau simultan.

1) În prezența ipotezei c) şi absența condiției b) se pune problema deplasării cantității de flux Q de la surse la destinații *la un cost total minim.* Dacă sursele sunt în legătură directă cu destinațiile obținem *problema clasică de transport*, care va face obiectul secțiunilor imediat următoare. Cazul general, în care exisă şi puncte intermediare, este cunoscut sub numele de *problema transferului* şi va fi prezentat în secțiunea 4. În cazul particular al unei singure surse *s*, al unei singure destinații *t* şi a unei singure unități de flux se obține *problema drumului de cost minim de la s la t.*

2) În prezența ipotezei b) şi absența ipotezei c) se pune problema dacă rețeaua , ale cărei rute sunt *capacitate*, *este capabilă să permită acoperirea integrală a cererilor în punctele de destinație.* Pentru aceasta, se va rezolva problema determinării volumului *maxim* Q* de unități de flux ce pot fi deplasate de la surse la destinații. Dacă Q* < Q vor exista destinații a căror cerere este acoperită doar în parte şi atunci se ridică problema *măririi capacității de transfer a rețelei.* Am descris succint *problema fluxului maxim.*

3) În prezența simultană a ipotezelor b) şi c) se pune *problema satisfacerii cererilor în punctele de destinație la un cost de transport minim.* Ca şi în cazul precedent vom avea în vedere o problemă modificată: vom determina mai întâi cantitatea maximă de flux ce poate fi deplasată de la surse

la destinaţii şi apoi modul de organizare al deplasării astfel încât costul operaţiei să fie minim. Aceasta este *problema fluxului (maxim) de cost minim.*

În secţiunile următoare ne vom ocupa numai de problema clasică de transport şi de generalizarea ei, problema de transfer; ele vor fi privite ca probleme de programare liniară cu o structură specială şi rezolvate prin metodele programării liniare. Celelalte probleme identificate vor fi tratate în cuprinsul altei lucrări.

1.2 Problema clasică de transport. Problema de transport echilibrată (PTE)

Un produs omogen (de exemplu bere) se află disponibil în localităţile $F_1, F_2, ..., F_m$ în cantităţile $a_1, a_2, ..., a_m$ şi este cerut pentru consum în centrele $C_1, C_2, ..., C_n$ în cantităţile $b_1, b_2, ..., b_n$. Se presupune cunoscut costul c_{ij} al transportului unei unităţi de produs de la F_i la C_j. *Se pune problema satisfacerii cererii în punctele de consum la un cost total de transport minim*.
Centrele furnizoare, centrele consumatoare, legăturile directe între ele şi costurile unitare de transport sunt vizualizate de obicei printr-un *graf orientat* ca în figura 1.1.1 *a*).

Evident, o condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa unei soluţii a problemei formulate este ca totalul cantităţilor disponibile să acopere totalul cererilor:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1.2.1)$$

În continuare, condiţia (1.2.1) va fi presupusă îndeplinită. Vom presupune deasemenea că :

$$a_i > 0,\ i = 1,...,m \text{ şi } b_j > 0,\ j = 1,...,n.$$

Dacă notăm cu x_{ij} cantitatea livrată de furnizorul F_i consumatorului C_j, modelul matematic al problemei (clasice) de transport este:

(PT) *Să se determine* $(x_{ij}^*)\ i = 1,\ldots,m\ ,\ j = 1,\ldots,n$ *care satisfac restricţiile:*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1,\ldots,m \qquad (1.2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1,\ldots,n \tag{1.2.3}$$

condițiile de nenegativitate:

$$x_{ij} \geq 0 \quad 1 = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n$$

şi care minimizează fincția obiectiv:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1.2.4}$$

Inegalitățile (1.2.2) exprimă cerința ca totalul livrărilor fiecărui furnizor să se încadreze în disponibil; inegalitățile (1.2.3) arată că cererea fiecărui consumator trebuie să fie acoperită prin totalul cantităților primite; în fine, (1.2.4) este expresia costului total al transportului.

Vom spune că problema de transport (PT) este *echilibrată* dacă:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1.2.5}$$

Se observă imediat că (1.2.5) atrage după sine satisfacerea cu egalitate a restricțiilor (1.2.2) şi (1.2.5). Prin urmare, modelul matematic al unei probleme de transport echilibrate este:

$$(\mathbf{PTE})\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,\ldots,m & \mathbf{(1.2.6)} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1,\ldots,n & \mathbf{(1.2.7)} \\ x_{ij} \geq 0 & \\ (\min) f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \end{cases}$$

Remarcăm faptul că (PTE) este o problemă de programare liniară în formă standard, cu $m + n$ restricții şi mn variabile.

Se arată uşor că matricea A a coeficienților sistemului de restricții din (PTE), care apare în tabelul 1.1.1, are rangul $m + n$ - 1. Aceasta înseamnă că în sistemul (1.2.6) - (1.2.7) putem elimina o ecuaţie fără ca mulţimea soluţiilor admisibile să se modifice. În consecinţă:

Orice soluţie de bază a problemei (PTE) are cel mult m + n - 1 componente nenule.

O soluţie *de bază* a problemei (PTE) se va numi *nedegenerată* dacă are exact $m + n - 1$ componente *nenule*; altminteri, ea se va zice *degenerată.*

În continuare, vom presupune că orice soluţie a problemei (PTE) este nedegenerată. Cazul în care (PTE) are şi soluţii degenerate va fi analizat în secţiunea 2.5.

	x_{11}	$\ldots x_{1j} \ldots$	x_{1n}	....	x_{i1}	$\ldots x_{ij} \ldots$	x_{in}	....	x_{m1}	$\ldots x_{mj} \ldots$	x_{mn}
1	1	....1...	1		0	....0...	0		0	.....0....	0
⋮											
i	0	....0...	0		1	....1...	1		0	.....0....	0
⋮											
m	0	....0...	0		0	....0...	0		1	.....1....	1
1	1	....0...	0		1	....0...	0		1	.....0....	0
⋮											
j	0	....1...	0		0	....1...	0		0	.....1....	0
⋮											
n	0	....0...	1		0	....0...	1		0	.....0....	1

Tabelul 1.1.1

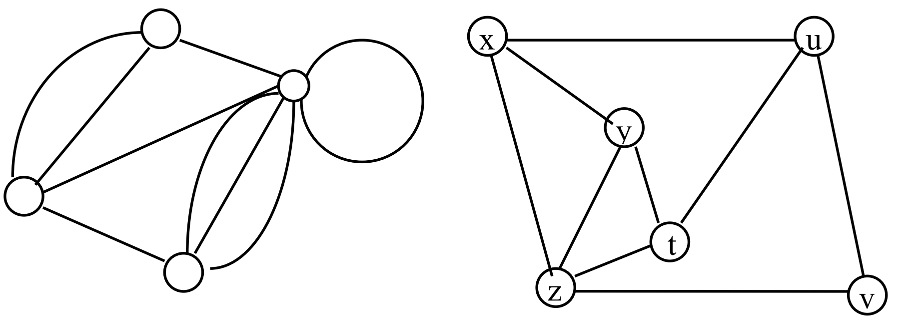
1.3 Câteva elemente de teoria grafurilor

În secţiunea 1.1 am vizualizat elementele unei reţele de transport printr-un desen compus din puncte şi arce care unesc unele din aceste puncte (vezi figura 1.1.1). Un asemenea desen constituie forma uzuală de prezentare a unui concept deosebit de important, atât în sine cât şi pentru studiul unei impresionante varietăţi de probleme din cele mai diverse domenii,domeniul economic fiind prioritar.

Am socotit deci necesar să includem în lucrare câteva elemente privitoare la conceptul de *graf*, căci despre el este vorba. Aceste elemente vor fi foarte utile pentru înţelegerea consideraţiilor teoretice dezvoltate în legătură cu rezolvarea problemei de transport şi deasemenea constituie cadrul natural de abordare şi a celorlalte probleme amintite în clasificarea dată în secţiunea precedentă.

Un *graf* este un cuplu G = (V,E) format dintr-o mulţime *nevidă* V, ale cărei elemente se numesc *vârfuri* sau *noduri* şi o mulţime E de elemente, zise *muchii*, cu proprietatea că fiecărei muchii e ∈ E îi sunt asociate două noduri x, y ∈ V, nu neapărat distincte, numite *extremităţile* muchiei e. Un *subgraf* al grafului G = (V,E) este un graf G' = (V',E') în care V' ⊆ V, E' ⊆ E şi orice muchie e∈ E' are aceleaşi extremităţi atât în G' cât şi în G.

După cum se vede, definiţia generală nu exclude existenţa muchiilor cu o singură extremitate (aceste muchii se numesc *bucle*), nici existenţa mai multor muchii cu aceleaşi extremităţi (figura 1.3.1 *a*)



a) **b)**

Figura 1.3.1

Graful G se va numi *simplu* dacă nu are bucle şi oricare două noduri sunt extremităţi pentru cel mult o muchie. Vom spune că G este *finit* dacă vârfurile şi muchiile sale sunt în număr finit.

În continuare, vom avea în vedere în exclusivitate grafuri finite şi simple aşa cum este cel reprezentat grafic în figura 1.3.1 b).

Fie *e* = {*x*, *y*} o muchie a grafului G = (V,E); extremităţile sale pot fi ordonate în două moduri: (*x*, *y*) şi (*y*, *x*). Cele două perechi se numesc *rute orientate* sau *arce* generate de muchia subiacentă *e*; spunem că arcul (*x*, *y*) are *extremitatea iniţială* x şi *extremitatea finală* y şi că (*y*, *x*) este arcul *opus* lui (*x*, *y*). A *orienta* muchia {*x*, *y*} înseamnă a *alege* unul din arcele (*x*, *y*) sau

(y, x); dacă a fost ales arcul (x, y) vom spune că (x, y) este un arc *permis* şi că arcul (y, x) este *blocat*. Dacă o asemenea alegere nu a fost făcută vom spune că muchia $\{x, y\}$ este *neorientată.* În acest caz, convenim ca ambele arce (x, y) şi (y, x), generate de muchia $\{x, y\}$, să fie considerate permise. În fine, a da o *orientare* în graful G înseamnă a orienta unele din muchiile sale; orientarea poate fi *totală* sau *parţială* după cum toate muchiile grafului au fost orientate sau numai o parte din ele. Este clar că în acelaşi graf G pot fi date mai multe orientări; dacă G are m muchii, atunci există 2^m *orientări totale* diferite ale acestuia!

Un *graf orientat* (*parţial orientat, neorientat*) este un graf în care s-a dat o orientare totală (o orientare parţială, respectiv nu s-a dat nici o orientare); de exemplu, graful din figura 1.1.1 *a*) este (total) orientat iar cel din figura 1.1.1 *b*) numai parţial. Graful din figura 1.3.1 *b*) este neorientat.

În unele situaţii este util să se pună în evidenţă arcele permise ale unui graf (parţial) orientat; realizarea grafică, intuitivă a acestei operaţii este făcută în figura 1.3.2.

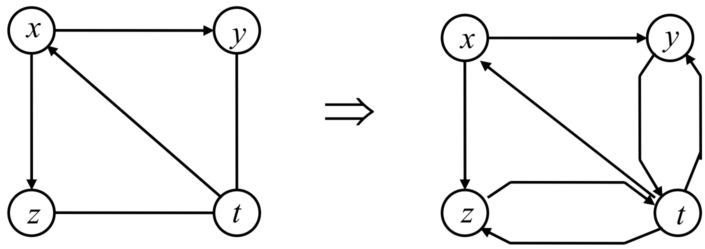


Figura 1.3.2

Se constată uşor că dacă G este (total) neorientat, numărul arcelor permise este de două ori mai mare decât numărul muchiilor din G.

În continuare vom introduce o serie de noţiuni frecvent utilizate în teoria grafurilor. Unele din ele se referă la muchii şi de aceea se numesc "generic" *concepte neorientate* altele se referă la rutele orientate permise, drept care se mai numesc şi *concepte orientate*. Vom considera un graf (*finit, simplu*) G =(V,E), în care (eventual) s-a dat o orientare pe unele din muchii (posibil pe toate).

Un *lanţ* în graful G este o succesiune de noduri $\lambda = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ cu proprietatea că $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{p-1}, x_p\}$ sunt muchii în G. Vom spune că x_0 şi x_p sunt *extremităţile* lanţului λ şi că λ "*trece*" prin nodurile *intermediare* $x_1, \ldots, x_{p-1}$. Lanţul λ se zice *simplu* dacă nu trece de două ori prin acelaşi nod. Prin definiţie *lungimea* lanţului λ este dată de numărul muchiilor componente. Astfel, lanţurile de lungime unu se identifică cu muchiile grafului G; un lanţ de lungime doi este constituit din două muchii *adiacente*.

Un *ciclu* este un lanţ ale cărui extremităţi coincid.

În figura 1.3.1 *b*) succesiunile de noduri $\lambda = (x, y, t, u, v)$ şi $\lambda' = (x, z, y, t, z, v)$ sunt lanţuri: λ este un lanţ simplu de lungime 4 în timp ce λ' are lungimea 5 şi nu este simplu. Succesiunea $\mu = (x, y, t, u, x)$ este un ciclu de lungime 4.

Un *drum* în graful G este o succesiune de noduri $\delta = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ cu proprietatea că (x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{p-1}, x_p) sunt arce permise.Nodul x_0 este *extremitatea iniţială* a drumului δ iar x_p *extremitatea finală.* Un *circuit* este un drum ale cărui extremităţi coincid. Este clar că orice drum este un lanţ, reciproca nefiind adevărată întotdeauna. În figura 1.3.2, $\delta = (z, t, x)$ este un drum de lungime 2 iar $\mu = (x, y, t, x)$ este un circuit de lungime 3; în acelaşi graf, $\lambda = (z, x, y)$ este un lanţ care nu este un drum deoarece arcul (z, x) este blocat.

Graful G = (V,E) se zice *conex* dacă oricare două noduri ale sale sunt extremităţile unui lanţ. Dacă G nu este conex, există *partiţiile* $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_s$ şi $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_s$ astfel încât $G_1 = (V_1,E_1)$, $G_2 = (V_2,E_2)$, ..., $G_s = (V_s,E_s)$ sunt grafuri conexe. Subgrafurile G_1, G_2,...., G_s se numesc *componentele conexe* ale grafului G. Graful din figura 1.3.2 este conex (ca şi cele din figurile anterioare); graful din figura 1.3.3 are trei componente conexe.

Graful G = (V,E) se numeşte *bipartit* dacă mulţimea nodurilor sale poate fi descompusă în două submulţimi nevide şi disjuncte S şi T, astfel încât orice muchie din G are o extremitate în S şi cealaltă în T.

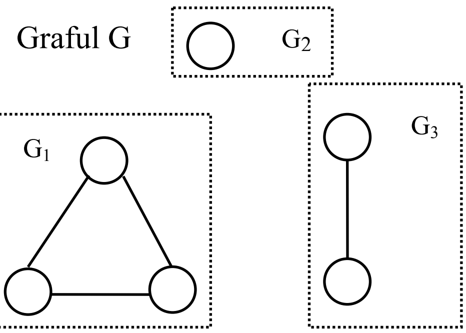


Figura 1.3.3

Este clar că graful asociat unei probleme clasice de transport este bipartit, nodurile care reprezintă furnizorii formând mulţimea S iar nodurile corespunzătoare consumatorilor alcătuind mulţimea T.

Calitatea unui graf de a fi bipartit nu depinde de modul particular de reprezentare aşa cum arată exemplul din figura 1.3.4. O caracterizare completă a grafurilor bipartite este oferită de următoarea teoremă:

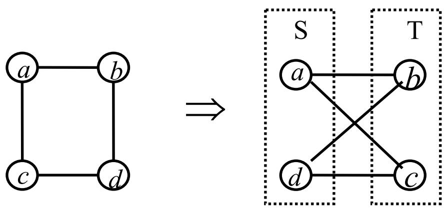


Figura 1.3.4

Un graf este bipartit dacă şi numai dacă nu conţine cicluri de lungime impară (altfel spus, orice ciclu al său are un număr par de muchii).

Un *arbore* este un *graf conex şi fără cicluri* (figura 1.3.5)
Orice arbore este complet caracterizat de oricare din următoarele proprietăţi:

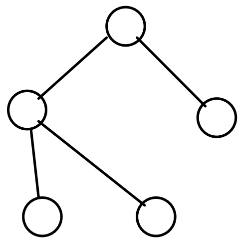


Figura 1.3.5

1) Orice arbore cu p noduri are p - 1 muchii.

2) Între oricare două noduri ale unui arbore există un *unic* lanţ de muchii.

3) Dacă între două noduri ale unui arbore adăugăm o muchie se creează un *unic* ciclu (figura 1.3.6).

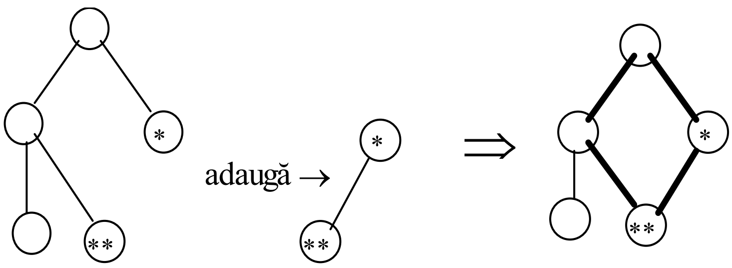


Figura 1.3.6

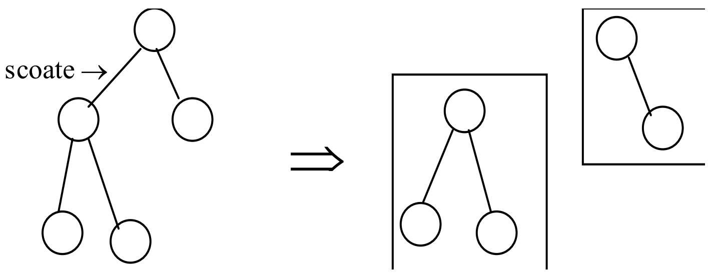


Figura 1.3.7

4) Dacă dintr-un arbore scoatem o muchie, graful *se disconectează* (figura 1.3.7).

Un *arbore* H *într-un graf* G este un subgraf care - de sine stătător - este un arbore. H se zice *maximal* dacă conține toate nodurile grafului G (figura 1.3.8).

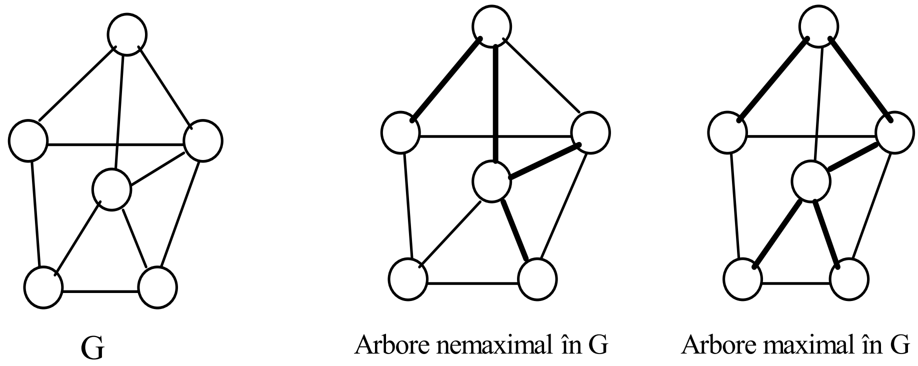


Figura 1.3.8

1.4 O caracterizare în termeni de grafuri a soluțiilor unei PTE

Să considerăm graful G asociat unei probleme de transport echilibrate (PTE). Acesta are $m + n$ vîrfuri şi deci orice arbore maximal în G va avea $m + n - 1$ muchii. Să considerăm o soluție de bază $\overline{x} = (\overline{x}_{ij})$ a problemei; *în secțiunea 1.2 am făcut ipoteza că ea este nedegenerată.*

Se poate demonstra că cele $m + n - 1$ muchii $\{F_i, C_j\}$, corespunzătoare componentelor nenule din $\overline{x}$, formează un arbore maximal în G. Şi reciproca se dovedeşte a fi adevărată. Fie H un arbore maximal în G; în sistemul celor $m + n$ egalități (1.2.) , (1.2.) să punem $x_{ij} = 0$ pentru toate muchiile $\{F_i, C_j\}$ care nu sunt în H. Rămâne un sistem de $m + n$ ecuații cu $m + n - 1$ necunoscute. Eliminând una din ecuații, sistemul rămas are o unică soluție care este o soluție de bază a PTE.

Are loc următoarea teoremă: *Între soluțiile de bază ale PTE - toate presupuse nedegenerate - şi arborii maximali ai grafului G există o corespondență bijectivă.*

Observaţie: Orice soluţie $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$ a PTE va fi înscrisă într-un *tabel* cu *m rânduri*, corepunzătoare furnizorilor şi *n coloane* corespunzătoare consumatorilor. Tabelul va avea *mn celule* sau *rute*; celula din rîndul $\underline{i}$ şi coloana $\underline{j}$, notată (F_i ,C_j) sau simplu (*i, j*), va conţine componenta $\bar{x}_{ij}$ a soluţiei $\bar{x}$.

Exemplul 1.4.1 Să considerăm problema de transport echilibrată definită de următoarele date:

	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
F_1	3	3	1	4	15
F_2	3	4	3	6	17
F_3	4	3	6	2	18
Necesar	10	12	9	19	50

Tabelul 1.4.1

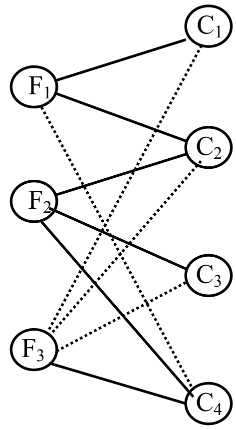
Modelul matematic:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 17 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 18 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 12 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 9 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 19 \\ \\ x_{ij} \geq 0 \\ \\ (\min) f = 3x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + \\ \quad + 3x_{23} + 6x_{24} + 4x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34} \end{cases}$$

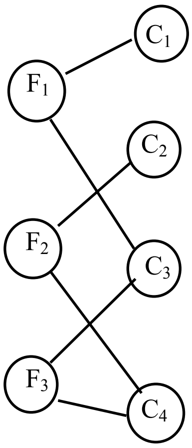
Propunem cititorului să arate că următoarea soluție este bazică:

10	5		
	7	9	1
			18

Arborele maximal, corespunzător acestei soluții este format din muchiile pline.



Reciproc, să considerăm în G următorul arbore maximal:



Anulăm în sistemul restricțiilor toate variabilele x_{ij} cu proprietatea că muchiile corespunzătoare $\{F_i,C_j\}$ nu apar în arbore. Rezultă sistemul şi soluția:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{13}=15 \\ x_{22}+x_{24}=17 \\ x_{33}+x_{34}=18 \\ x_{11}=0 \\ x_{22}=12 \\ x_{13}+x_{33}=9 \\ x_{24}+x_{34}=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{11}=10 \\ x_{13}=5 \\ x_{22}=12 \\ x_{24}=5 \\ x_{33}=4 \\ x_{34}=14 \end{array} \Rightarrow$$

10		5	
	12		
		4	14