4. Problema de transfer

În problema clasică de transport, sursele erau în legătură directă cu destinațiile, rutele erau orientate de la surse către destinații şi nu era permis nici un transport între două surse sau între două destinații. Problema de transfer este o generalizare a problemei clasice de transport în următoarele direcții:

- În rețeaua asociată există şi *centre intermediare* sau *de tranzit*; pot exista *legături între surse sau între destinații*; ca urmare, este posibil ca o sursă (o destinație) să "funcționeze" la un moment dat şi ca punct de tranzit pentru unități de flux provenind dela o altă sursă (sau care se deplasează către o altă destinație).
- Pe unele rute transporturile pot fi efectuate *în ambele sensuri*, costul unitar al transportului putând depinde de sensul de parcurgere al rutei.

Diferențele existente între rețelele asociate unei probleme clasice de transport respectiv unei probleme de transfer sunt puse în evidență în figura 1.1.1.

4.1 Modelul matematic al problemei de transfer

Problema de transfer se poate descrie în următorii termeni. Există n localități, notate 1, 2, ...,n şi se pune problema organizării transportului unui anumit progus omogen între aceste localități la un cost total minim. Între unele localități există legături directe numite *rute*. Pe fiecare rută este precizat un cost al transportului unei unități de produs de la o extremitate la cealaltă. Este posibil ca aceste costuri unitare (ce pot fi exprimate în bani, timp sau distanță) să depindă de sensul de parcurgere a rutei respective. Pentru uniformitatea expunerii vom presupune că între oricare două localități i şi j există o legătură directă accesibilă în ambele sensuri, convenind că dacă o asemenea rută sau sens de parcurgere nu există în realitate, costul corespunător să fie luat egal cu $+\infty$.

Ansamblul localităților şi al rutelor de legătură poartă numele de *rețea de transport* şi poate fi vizualizată printr-un *graf finit, neorientat* sau *parțial orientat, simplu* şi *conex.*

Nodurile rețelei sunt diferențiate în:

- *surse*: localitățile în care produsul este disponibil pentru a fi transportat în alte locuri;

- *destinații*: localitățile în care produsul este cerut pentru consum, cererea neputând fi acoperită din producția locală;
- *centre intermediare (de tranzit)*: localitățile în care produsul se găseşte doar în tranzit, eventualul consum fiind asigurat din producția locală.

Pentru fiecare $i = 1,\ldots, n$ vom nota:

- cu a_i cantitatea *disponibilă* în nodul i pentru a fi transportată spre alte localități. Evident $a_i > 0$ dacă i este o *sursă* şi $a_i = 0$ în celelalte cazuri;
- cu b_i cantitatea netă *solicitată pentru consum* în nodul i. Dacă i este o destinație atunci $b_i > 0$; în celelalte noduri $b_i = 0$;
- cu c_{ij} unde $i \neq j$ *costul transportului unei unități de produs de la i la j*. Vom presupune că $c_{ij} \geq 0$ şi că $c_{ij} = +\infty$ în cazul în care deplasarea de la i la j nu este posibilă în realitate.Pentru simplificarea notațiilor vom pune $c_{ii} = 0$;
- cu x_{ij} ($i \neq j$) cantitatea de produs transportată din nodul i în nodul j. Dacă transportul de la i la j nu este permis condiția $c_{ij} = +\infty$ va implica $x_{ij} = 0$ în orice soluție admisibilă a problemei;

- cu $\tilde{x}_{ii}$, $i = 1,\ldots,n$ cantitatea de produs aflată *în tranzit* în nodul i (adică primită din unele localități şi expediată spre altele).

Cu aceste notații putem ataşa fiecărui nod al rețelei de transport următoarele relații:

Totalul cantităților expediate din nodul i	−	*Cantitatea aflată în tranzit în nodul i*	=	*Producția netă în nodul i (disponibilă pentru a fi expediată spre alte noduri)*

sau:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} x_{ik} - \tilde{x}_{ii} = a_i \quad i = 1,\ldots,n \tag{4.1.1}$$

Totalul cantităților ajunse în nodul i	−	*Cantitatea aflată în tranzit în nodul i*	=	*Consum net în nodul i*

sau:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} x_{ki} - \tilde{x}_{ii} = b_i \quad i - 1,\ldots,n \tag{4.1.2}$$

Variabilele x_{ij} , $i \neq j$, şi $\tilde{x}_{ii}$ nu pot lua decât valori nenegative:

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ \tilde{x}_{ii} \geq 0 \tag{4.1.3}$$

Costul transporturilor efectuate între cele n localităţi este reprezentat prin următoarea funcţie ce trebuie minimizată:

$$(min) f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4.1.4}$$

(unde $c_{ii} = 0$, $i = 1,\ldots,n$)

Ansamblul restricţiilor (4.1.1) şi (4.1.2), condiţiile de nenegativitate (4.1.3) şi funcţia obiectiv (4.1.4) constituie modelul matematic al *problemei de transfer*. Este uşor de văzut că *problema astfel definită este compatibilă dacă şi numai dacă totalul L al cantităţilor expediate din surse este egal cu totalul cantităţilor ajunse în destinaţii*, adică:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=i}^{n} b_j = L \tag{4.1.5}$$

Restricţiile (4.1.1), (4.1.2) ca şi modul de formare al funcţiei obiectiv (4.1.4) pot fi citite comod pe liniile şi coloanele tabelului (4.1.1).

$c_{11} = 0$ $-\tilde{x}_{11}$	c_{12} x_{12}	. . . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	$c_{22} = 0$ $-\tilde{x}_{22}$	. . . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
:	:	: : : :	:	:
c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	. . . .	$c_{nn} = 0$ $-\tilde{x}_{nn}$	a_n
b_1	b_2	. . . .	b_n	L

Tabelul 4.1.1

4.2 Reducerea problemei de transfer la o problemă clasică de transport

Să observăm că în nici un nod cantitatea tranzitată nu poate depăşi "plafonul" L definit în (4.1.5). Pe această bază introducem variabilele nenegative:

$$x_{ii} = L - \tilde{x}_{ii} \quad i = 1,\ldots,n$$

Substituind:

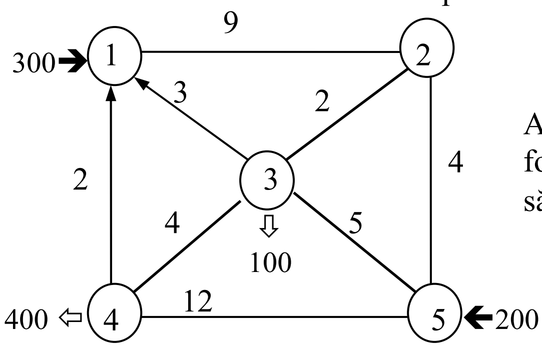
$$\tilde{x}_{ii} = \mathrm{L} - x_{ii} \tag{4.2.1}$$

în ecuațiile (4.1.1) şi (4.1.2) *problema de transfer se reduce la problema de transport echilibrată:*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = L + a_i \quad i = 1,\ldots,n \\ \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = L + b_i \quad i = 1,\ldots,n \\ x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1,\ldots,n \\ (\min) f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

După rezolvarea problemei (4.2.2), relația (4.2.1) ne permite să punem în evidență cantitățile aflate în tranzit în nodurile rețelei.

Exemplul 4.2.1 În rețeaua din figura 4.2.1 nodurile 1 şi 5 sunt surse cu disponibilele a_1 = 300 şi a_5 = 200 iar nodurile 3 şi 4 sunt destinații cu cererile b_3 = 100 respectiv b_4 = 400. Valorile numerice înscrise pe muchii reprezintă costuri unitare de transport valabile, acolo unde este permis, în ambele sensuri de parcurgere. Se pune problema determinării unui program de satisfacere a cererilor la un cost total de transport minim.



Atenție! Rutele {1, 4} şi {1, 3} nu pot fi folosite decât în sensurile indicate de săgeți adică 4→1 şi 3→1.

Figura 4.2.1

Condiția de echilibru şi compatibilitate (4.1.5) este îndeplinită: L = 300 + 200 = 100 + 400. Datele numerice ale problemei de transport echivalente (4.2.2) apar în tabelul 4.2.1. (Urmărind rețeaua din figura 4.2.1 şase rute orientate au fost blocate în tabel prin "costul de penalizare" M » 0.)

Componentele soluției inițiale, determinată prin metoda diferențelor maxime, sunt înscrise în tabelul 4.2.2 (cifrele înscrise în paranteze indică ordinea în care au fost făcute alocările!).

	1	2	3	4	5	Disp. L + a_i
1	0	9	M	M	M	800
2	9	0	2	M	4	500
3	3	2	0	4	5	500
4	2	M	4	0	12	500
5	M	4	5	12	0	700
Nec. L + b_j	500	500	600	900	500	3000

Tabelul 4.2.1

$500^{(1)}$	$300^{(2)}$			
	$200^{(6)}$	$300^{(7)}$		
		$100^{(8)}$	$400^{(4)}$	
			$500^{(3)}$	
		$200^{(9)}$		$500^{(5)}$

	v_1=-11	v_2=-2	v_3=0	v_4=4	v_5=-5
u_1=11	*	*	–	–	–
u_2=2	–	*	*	–	–
u_3=0	–	–	*	*	–
u_4=-4	–	–	–	*	–
u_5=5	–	–	*	–	*

Tabelele 4.2.2 - 4.2.3

În tabelul 4.2.3 mărimile $\Delta_{ij} = u_i + v_j$, calculate cu ajutorul valorilor u_i, v_j înscrise pe margini, sunt trecute doar prin semnul lor; deoarece toate sunt negative, soluția inițială este chiar optimă.

Cantitățile $\tilde{x}_{ii}$ aflate în tranzit, calculate cu formula (4.2.1) şi cantitățile x_{ij}, $i \neq j$, transportate pe rutele permise ale rețelei, sunt indicate în tabelul 4.2.4; în rețeaua din figura 4.2.2 sunt puse în evidență rutele efectiv folosite în programul de transport şi sensurile deplasărilor.

	1	2	3	4	5
1		300			
2		300	300		
3			400	400	
4					
5			200		

Tabelul 4.2.4

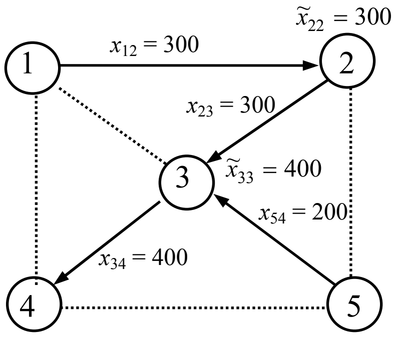


Figura 4.2.2