ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE DIN BUCUREŞTI

Vasile Teodor NICA

CERCETĂRI OPERAȚIONALE I

Introducere în Cercetarea Operațională
Elemente de Programare Liniară
Analiza Drumului Critic
Introducere în Programarea Neliniară

Note de curs pentru învățământul la distanță

Editura ASE
București
2011

Editura ASE
Piața Romană nr. 6, sector 1, București, România
cod 010374
www.ase.ro
www.editura.ase.ro
editura@ase.ro

Referenți:

Prof. univ. dr. Virginia MĂRĂCINE
Prof. univ. dr. Dobre ION

ISBN 978-606-505-500-1
978-606-505-502-5 Vol. I

Cuprins

INTRODUCERE ÎN CERCETAREA OPERAȚIONALĂ

Unitatea de învățare 1

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

Unitatea de învățare 2
Proprietăți ale programelor liniare

Unitatea de învățare 3
Teoria metodei simplex

Unitatea de învăţare 4
Algoritmul simplex

Unitatea de învăţare 5
Dualitatea în programarea liniară

Unitatea de învăţare 6
Reoptimizare. Analiza sensitivităţii. Parametrizare

Unitatea de învăţare 7
Problema de transport. Formulare şi rezolvare

Unitatea de învățare 8
Problema de transport. Aplicații variate

ANALIZA DRUMULUI CRITIC

Unitatea de învățare 9
Proiect: concept şi structură. Rețeaua coordonatoare AoA a unui proiect

Unitatea de învățare 10
Actualizarea rețelelor coordonatoare

Unitatea de învățare 11
Rețeaua coordonatoare AoN a unui proiect. Dependențe multiple

Unitatea de învățare 12
Optimizări cost – durată. Alocarea resurselor

INTRODUCERE ÎN PROGRAMAREA NELINIARĂ

Unitatea de învățare 13
Neliniar vs. Liniar

Unitatea de învățare 14
Elemente de programare convexă

Unitatea de învățare 1

INTRODUCERE ÎN CERCETAREA OPERAȚIONALĂ

Cuprins

1.1 Ce este Cercetarea Operațională?

Dacă la începutul deceniului patru al secolului trecut, termenul „**Cercetare Operațională**”(abreviat **CO**) era necunoscut,astăzi el desemnează un domeniu activ de cercetare ştiinţifică – atât teoretică cât şi aplicativă – dar şi o disciplină universitară importantă.

Pentru necesitățile acestui curs, putem spune că **CO are ca obiect de studiu problemele de optimizare rezultate din modelarea matematică a unor fenomene şi procese din domeniul economic, ştiinţific, tehnic sau militar**.Este o definiție simplă, fără pretenția de exhaustivitate, dar mai uşor de acceptat de către începători cu condiția explicării unor termeni ca **problemă de optimizare** sau **modelare matematică**. Într-adevăr, este nevoie de multă muncă de documentare, cercetare şi practică pentru a înțelege şi a accepta următoarea definiție, corectă şi cuprinzătoare în opinia noastră:

CO reprezintă:

1. aplicarea metodelor ştiinţifice
2. de către o echipă multidisciplinară
3. la studiul problemelor legate de conducerea sistemelor organizate cu scopul obținerii unor rezultate care să servească cât mai bine interesele organizației în ansamblu.

(vezi R. Ackoff, M. Sasieni, Fundamentals of Operations Research,1968. traducere în lb. română: Fundamentele Cercetării Operaționale, 1975, cap I, Introducere. Natura Cercetării Operaționale.)

În esență, o **problemă de optimizare este o problemă de alegere**. Ea presupune dată o colecție de entități denumite generic **soluții admisibile** (sau variante, scenarii) Soluțiile pot fi comparate între ele şi clasificate prin intermediul unui **criteriu de apreciere**(de **performanță**) În acest context se pune problema de a găsi soluția cea mai bine apreciată, numită şi **soluția optimă** a problemei.

Exemplul 1.1 Printre dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, să se determine acela care are cea mai mare arie.

Evident, soluțiile acestei probleme sunt dreptunghiurile al căror perimetru este egal cu o valoare dată. Aceste dreptunghiuri sunt comparate între ele prin intermediul ariei care joacă rolul de criteriu de performanță.

Exemplul 1.2 Compania X importă componente electronice şi asamblează două tipuri de computere PC_1 şi PC_2. Vânzarea unui PC_1 (respectiv PC_2) aduce un profit de \$50 (respectiv \$40). Un PC_1 are nevoie de 3 ore pentru asamblare iar un PC_2 necesită 5 ore. Pentru următoarea săptămână sunt disponibile 150 ore pentru asamblare. Compania are în stoc numai 20 monitoare PC_2; altfel spus, în următoarea săptămână ea nu poate produce mai mult de 20 unități PC_2. Pentru depozitare un PC_1 are nevoie de 8u.a. (unități de arie) iar un PC_2 de 5u.a. Spațiul disponibil pentru depozitarea producției din următoarea săptămână însumează 300u.a. Cererea este suficient de mare pentru ca întreaga producție să fie vândută. Conducerea companiei este interesată în elaborarea unui program de producție pentru următoarea săptămână care să-i aducă un profit maxim.

Aici avem de a face cu o situație frecvent întâlnită în domeniul economic: **elaborarea unui program de producție pe o anumită perioadă în condițiile existenței unui disponibil limitat de resurse**. Soluțiile problemei sunt diversele programe de producție realizabile din resursele limitate specificate:

timpul disponibil pentru asamblare, monitoarele PC_2 şi spaţiul de depozitare (un program de producţie este definit prin două valori numerice: numărul de unităţi PC_1, respectiv numărul de unităţi PC_2 ce vor fi produse în următoarea săptămână). Programele admisibile sunt comparate între ele prin intermediul profitului pe care l-ar aduce în caz de realizare.
Pentru determinarea soluţiilor optime ale problemelor enunţate avem nevoie de un instrument special, numit **model matematic**. Ne vom convinge de utilitatea acestui instrument rezolvând prima problemă.

Exemplul 1.1 Reluare. Să notăm cu p perimetrul dreptunghiurilor dintre care urmează să alegem pe cel cu aria maximă. Un asemenea dreptunghi este perfect caracterizat de dimensiunile sale: lungimea L şi lăţimea l. Denumirile celor două dimensiuni sunt irelevante, deoarece atât perimetrul $2L+2l$ cât şi aria $L \cdot l$ nu depind de alegerea lor. Prin ipoteză:

$$2L+2l = p \quad \text{cu} \quad L \geq 0\,, l \geq 0$$

din care putem extrage, de exemplu: $L = \frac{1}{2}p - l$. Ca urmare, orice dreptunghi din mulţimea considerată poate fi caracterizat numai prin "lăţimea" l cu condiţia ca:

$$L = \tfrac{1}{2}p - l \geq 0 \Rightarrow l \leq \tfrac{1}{2}p$$

În concluzie, dreptunghiurile din mulţimea cărora trebuie să facem alegerea pot fi identificate cu acele "lăţimi" l care satisfac condiţia:

$$0 \leq l \leq \tfrac{1}{2}p \tag{1.1}$$

Aria unui asemenea dreptunghi este dată de relaţia:

$$L \cdot l = (\tfrac{1}{2}p - l) \cdot l = -l^2 + \tfrac{1}{2}pl \underset{def}{=} A(l) \tag{1.2}$$

Astfel, problema determinării dreptunghiului cu perimetrul p a cărui arie să fie maximă este echivalentă cu problema găsirii acelei valori numerice l^* care satisface condiţia (1.1) şi care dă funcţiei A(l) din (1.2) cea mai mare valoare. Sintetizăm această "traducere" a problemei originale prin notaţia:

$$\begin{aligned} &\max \quad A(l) = -l^2 + \tfrac{1}{2}pl \\ &(\text{cu conditia}) \quad 0 \leq l \leq \tfrac{1}{2}p \end{aligned} \tag{1.3}$$

şi vom spune că **(1.3) este modelul matematic al problemei din exemplul 1.1**
Pentru rezolvarea problemei, observăm că funcţia de gradul doi A(l) are un maxim în $l^* = \frac{1}{4}p \in [0, \frac{1}{2}p]$ cu valoarea $A(l^*) = \frac{1}{16}p^2$. Deoarece $L^* = \frac{1}{2}p - l^* = \frac{1}{4}p = l^*$ conchidem că dreptunghiul de arie maximă şi cu perimetrul dat este un **patrat**.

Recapitulând, soluţiile modelului (1.3) sunt numerele l care satisfac condiţia (1.1). Aceste valori sunt comparate şi clasificate prin intermediul funcţiei A(l) din (1.2). Soluţia optimă $l^* = \frac{1}{4}p$ este soluţia care oferă funcţiei A(l) – numită şi **funcţia obiectiv** – cea mai mare valoare posibilă.

Elaborarea unui model matematic pentru problema de optimizare din exemplul 1.2 este asemănătoare.

Exemplul 1.2 Reluare. Ştim că soluţiile problemei sunt diferitele programe de producţie realizabile din resursele date. În primul rând vom avea nevoie de o reprezentare matematică a unui program de producţie. Dacă notăm:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \equiv \text{numarul de unitati } PC_1 \\ x_2 \equiv \text{numarul de unitati } PC_2 \end{array}\right. \text{ ce vor fi realizate în următoarea săptămână,}$$

atunci cuplul (x_1, x_2) va fi reprezentarea dorită.

Orice cuplu de numere (x_1, x_2) reprezintă un program posibil de producţie ? Evident că nu; o primă cerinţă naturală este:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \tag{2.1}$$

$x_1 = 0$ sau $x_2 = 0$ semnificând opţiunea firmei de a nu produce PC_1 sau PC_2.

Pentru asamblarea a x_1 unităţi PC_1 sunt necesare $3x_1$ ore; cele x_2 unităţi PC_2 au nevoie de $5x_2$ ore. Realizarea programului (x_1, x_2) ar necesita, pentru asamblare, un total de $3x_1 + 5x_2$ ore. Deoarece fondul disponibil de timp de asamblare este limitat la 150 ore, urmează că o condiţie de realizabilitate a programului (x_1, x_2) este:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 150 \tag{2.2}$$

Stocul limitat de monitoare PC_2 impune condiţia:

$$x_2 \leq 20 \tag{2.3}$$

Pentru depozitarea produselor finite este necesară o suprafaţă măsurând $8x_1 + 5x_2$ u.a. Limitarea spaţiului de depozitare inplică cerinţa:

$$8x_1 + 5x_2 \leq 300 \tag{2.4}$$

Recapitulând, condiţiile (2.1) – (2.4) sunt necesare şi suficiente – în situaţia dată – pentru ca un cuplu de valori numerice (x_1, x_2) să reprezinte un program de producţie realizabil. Cu alte cuvinte, soluţiile admisibile ale problemei "firmei de calculatoare" se identifică cu acele cupluri (x_1, x_2) care satisfac condiţiile (2.1) – (2.4).

Profitul rezultat din vânzarea unităţilor produse prin programul (x_1, x_2) este exprimat prin funcţia obiectiv:

$$f = 50x_1 + 40x_2 \tag{2.5}$$

Diferitele programe posibile vor fi apreciate prin valoarea pe care o dau acestei funcţii.

Şi astfel, problema din exemplul 1.2 are următoarea „traducere":

În mulţimea cuplurilor de valori numerice care satisfac condiţiile (2.1) – (2.4) să se determine cuplul (x_1^*, x_2^*) care dă funcţiei obiectiv (2.5) cea mai mare valoare posibilă.

Sintetizăm această traducere prin notația:

$$
\begin{aligned}
\max\ f &= 50x_1 + 40x_2 \\
3x_1 + 5x_2 &\leq 150 \\
x_2 &\leq\ 20 \\
8x_1 + 5x_2 &\leq 300 \\
x_1 \geq 0\ ,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

şi vom spune că ansamblul **(2.6) este modelul matematic al problemei „firmei de calculatoare”.** Găsirea efectivă a soluției optime (x_1^*, x_2^*) va fi dată într-o secțiune viitoare.

Revenim la cadrul general impus de titlul secțiunii.

Sfera termenului „**model**” este extrem de largă. Pentru necesitățile noastre ,un model va fi o modalitate de reprezentare a unui segment din realitatea înconjurătoare (o „fotografie”...) Modelele pot fi de diferite tipuri: verbal descriptive, analogice (des folosite în tehnică) sau matematice. **În cadrul acestei lucrări vom avea în vedere în exclusivitate modelele matematice ale unor procese economice.** Aceste modele surprind principalele trăsături ale procesului reprezentat prin intermediul unor relații matematice.

Studiul problemelor de optimizare practice înseamnă, pe lângă formularea unor modele matematice adecvate, şi elaborarea unor metode de rezolvare a acestora adică elaborarea de proceduri de găsire a soluțiilor optime.

O dată obținută soluția optimă este necesar ca aceasta să fie interpretată şi comparată cu realitatea modelată. Într-adevăr, un model este în general o reprezentare aproximativă a realității şi analiza poate să pună în vidență necesitatea introducerii unor noi elemente în modelul inițial, pentru a-l apropia şi mai mult de procesul modelat.Însă, modificarea modelului poate implica schimbări în soluția optimă, schimbări care necesită o reinterpretare a rezultatelor. Acest proces de ameliorare continuă până când se obține o soluție satisfăcătoare ce poate fi implementată în cadrul procesului care a generat problema de optimizare. În rezumat, **metoda generală de studiu a CO** poate fi schematizată astfel:

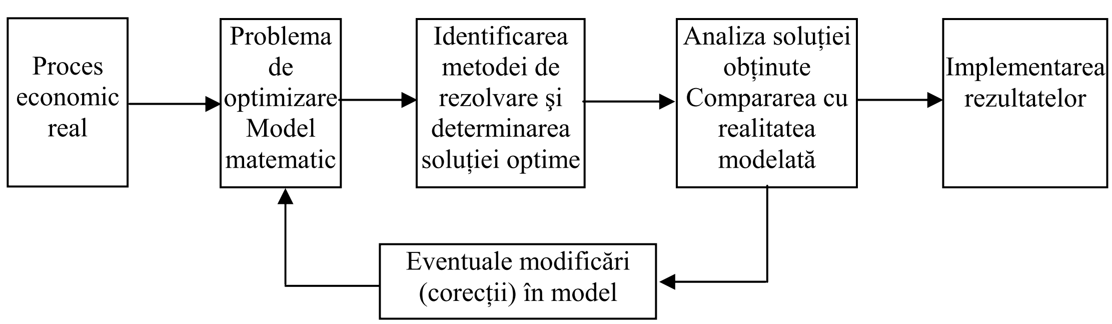


Figura 1.1

În cadrul acestei lucrări vom aborda cu precădere următoarele chestiuni:

- modelarea unor procese economice reprezentative;
- descrierea unor metode de rezolvare a unor probleme de optimizare;
- interpretarea economică a soluțiilor optime obținute.

Trebuie subliniat faptul că formalizarea unor procese reale conduce de regulă la modele matematice de dimensiuni suficient de mari pentru a face imposibilă rezolvarea lor manuală, oricât de puternice ar fi metodele de soluționare.Acesta este şi motivul pentru care metodele CO au apărut , s-au perfecționat şi s-au diversificat în strânsă legătură cu dezvoltarea şi perfecționarea mijloacelor automate de calcul.

1.2 Scurt istoric

Termenul **Cercetare Operațională** este traducerea originalului englez **Operational Research**. Multe țări europene au preluat acelaşi original: Recherche Operationelle în Franța, Ricerca Operativa în Italia. America a optat pentru varianta **Operations Research** (≡ Cercetarea Operațiilor) preluată în Rusia (Иследование Операций) şi – fără traducere! - în Germania.

Studiul unor probleme de optimizare şi încercări de modelare matematică pot fi identificate din cele mai vechi timpuri. Totuşi, începutul activității denumite astăzi CO, a fost atribuit serviciilor militare engleze în preajma declanşării celui de al doilea război mondial. Efortul de război a necesitat alocarea urgentă a unor resurse limitate în diferite operații militare într-un mod cât mai profitabil. De aceea conducerea militară engleză şi apoi cea americană au mobilizat un mare număr de oameni de ştiință (matematicieni şi fizicieni în special) care să se ocupe de rezolvarea acestor probleme. În esență acestora li s-a cerut să facă **cercetare** asupra **operațiilor** militare(termenul Operational Research apare pentru prima dată în 1938 şi este datorat unui înalt oficial englez). Aceste grupuri mixte de militari şi civili au fost primele echipe de CO, eforturile lor fiind decisive în câştigarea bătăliei aerului în Anglia (este vorba de amplasarea eficientă a stațiilor radar pentru descoperirea din timp a atacurilor avioanelor inamice), în bătălia Atlanticului de Nord (organizarea şi apărarea convoaielor de aprovizionare care traversau oceanul, contra submarinelor germane) sau în campania americană din Pacific contra Japoniei.

Dezvoltarea economică explozivă de după război a făcut ca problemele de conducere cauzate de creşterea complexității activității economice să nu mai poată fi rezolvate cu mijloacele tradiționale bazate pe experiență şi fler. Pentru mulți specialişti care lucraseră în echipele CO din timpul războiului a devenit foarte repede evident faptul că noile probleme „din viața civilă” semănau până la identitate cu cele cu care se confruntaseră în război.

Acesta a fost momentul în care CO şi-a făcut intrarea în industrie,comerț, administrație, afaceri etc. Deja în anii ’50, CO avea statut şi dezvoltare de sine stătătoare în Anglia şi America.

Încheiem această secțiune prin a aminti că facultatea noastră **CSIE a fost prima facultate din țară care a introdus în programa de învățământ disciplina CO în 1969**. Unele elemente erau predate chiar mai înainte de această dată în cadrul unui curs intitulat **calcul economic**.

1.3 O schemă generală de construire a unui model matematic pentru o problemă de optimizare din domeniul economic

În orice problemă de optimizare rezultată din modelarea unui proces economic întâlnim două categorii de mărimi (exemplificările sunt luate din problemele de planificare a activității de producție; altele vor fi date în secțiunile următoare):

- **Mărimi constante**: prețuri, profituri, costuri, cantități disponibile de resurse etc. Bineînțeles că şi aceste mărimi se pot schimba de la o perioadă la alta; important este faptul că pe un interval de timp convenabil ales ele pot fi considerate invariabile!

- **Mărimi variabile** ca de exemplu: cantităţi de bunuri ce urmează a fi produse într-o anumită perioadă.

În principiu, mărimile variabile urmează a fi astfel determinate încât să satisfacă un anumit **criteriu de performanţă** cum ar fi: maximizarea venitului (a profitului) sau minimizarea costurilor de producţie. Orice proces economic se desfăşoară în anumite **condiţii limitative** ca de exemplu: încadrarea consumurilor de resurse în disponibilele date sau realizarea unui anumit nivel minimal al profitului. Identificarea corectă a acestor condiţii determină nemijlocit calitatea modelului şi de aici şi calitatea soluţiei optime.
În elaborarea modelului matematic pentru o problemă de optimizare practică se recomandă parcurgerea următoarelor etape:

1. **Identificarea mărimilor variabile**:acestea vor deveni **variabilele de decizie** ale modelului;
2. **Identificarea condiţiilor limitative** ce caracterizează procesul modelat şi formalizarea lor în relaţii matematice – inegalităţi şi / sau egalităţi – denumite **restricţii**;
3. **Precizarea criteriului de performanţă** şi formalizarea lui într-o funcţie de variabilele de decizie, numită **funcţia obiectiv**;
4. **Precizarea condiţiilor explicite impuse mărimilor variabile**, ca de exemplu: să ia numai valori **reale nenegative** sau numai valori **întregi** etc.

Odată modelul construit, problema de optimizare originală capătă urmatoarea „traducere”:

Să se determine valorile variabilelor de decizie care satisfac restricţiile şi condiţiile explicite impuse variabilelor şi care oferă funcţiei obiectiv valoarea maximă sau minimă, după caz.

În acest context, soluţiile admisibile ale problemei originale se identifică cu acele seturi de valori numerice acordate variabilelor de decizie care satisfac restricţiile şi condiţiile explicite. Soluţia optimă va fi acea soluţie admisibilă care oferă funcţiei obiectiv cea mai mare sau cea mai mică valoare, după caz.

1.4 Programare matematică. Programare liniară

Ansamblul de relaţii matematice rezultate din aplicarea schemei prezentate şi care constă în maximizarea sau minimizarea unei funcţii ale cărei variabile trebuie să satisfacă un set de restricţii şi condiţii explicite poartă numele de **problemă de programare matematică**.

Dacă funcţia obiectiv şi restricţiile sunt **liniare** în variabilele de decizie vom avea de a face cu o **problemă de programare liniară** sau mai scurt **program liniar**. Neliniaritatea funcţiei obiectiv sau a unora dintre restricţii plasează problema de programare în clasa celor **neliniare**.

Modelele matematice construite în secţiunea 1.1 sunt exemple de probleme de programare matematică. Funcţia obiectiv din (1.3) este neliniară şi ca urmare (1.3) este un program neliniar. În schimb, modelul (2.6) este un program liniar în două variabile.

În principiu, oricărei probleme de optimizare i se poate asocia o problema de programare matematică dar nu întotdeauna acest lucru este şi profitabil pentru rezolvare. Există şi alte modalităţi de reprezentare matematică a unor situaţii practice care vor fi descrise în alte capitole ale lucrării.

1.5 Exemple de modelare economico matematică

În această secțiune se dau câteva exemple de elaborare a modelelor matematice pentru o serie de situații din practica economică. Din motive evidente, situațiile analizate au fost mult simplificate rămânând totuşi plauzibile. S-a urmărit îndeaproape schema generală de construire a unui model matematic descrisă în secțiunea 1.3, punând în evidență:

- **identificarea corectă a mărimilor variabile, a criteriului de performanță şi a condițiilor limitative din situația modelată;**
- **formalizarea corectă a acestor elemente în relații matematice**.

În completare, pentru modelele construite s-au indicat şi soluțiile optime, interpretate în contextul situațiilor originale modelate.
Cititorul este invitat să rezolve singur (fie manual fie cu ajutorul unui utilitar) modelele prezentate ca şi problemele propuse, bineînțeles atunci când va avea la dispoziție şi metoda de soluționare. Succes!

1.Pentru asigurarea activității curente de producție, o firmă are nevoie de anumite cantități din trei repere. În principiu, firma are posibilitatea de a fabrica aceste repere cu mijloace proprii dar conducerea este de părere că resursele disponibile nu sunt suficiente pentru producerea cantităților necesare astfel că se pune problema achiziționării unora de pe piață, cel puțin în parte. În procesul de fabricație al reperelor la firmă sunt implicate două utilaje, fiecare cu un număr limitat de ore disponibile de funcționare. Datele concrete ale situației sunt indicate în tabelul 1.1:

Repere	Consumuri unitare de timp de prelucrare (u.t./reper)		Cost intern de producție (u.m./reper)	Cost de achiziție de pe piață (u.m./reper)	Cantitatea necesară de repere (bucăți)
	M_1	M_2			
R_1	2	5	25	31	200
R_2	3	4	44	47	100
R_3	6	1	19	23	150
Timp disponibil (u.t.)	1200	1000			

Tabelul 1.1

Conducerea firmei este interesată în a stabili cât să producă şi cât să cumpere de pe piață astfel încât totalul cheltuielilor să fie minim. Scrieți un program liniar care să răspundă acestui obiectiv.

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Vom nota:

$x_i \equiv$ cantitarea (în bucăți) din reperul R_i produsă în cadrul firmei, $i = 1,2,3$

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții.

- încadrarea necesarului de timp de prelucrare în fondurile de timp disponibil ale utilajelor M_1 şi M_2:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 1200 \qquad (1)$$
$$5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 1000 \qquad (2)$$

- cantităţile produse nu trebuie să depăşească comenzile:

$$x_1 \le 200 \qquad (3)$$
$$x_2 \le 100 \qquad (4)$$
$$x_3 \le 150 \qquad (5)$$

Observaţie: un calcul simplu arată că fondurile de timp disponibil ale celor două utilaje nu sunt suficiente pentru producerea reperelor cerute:

$$2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 150 = 1600 > 1200$$
$$5 \cdot 200 + 4 \cdot 100 + 1 \cdot 150 = 1550 > 1000$$

astfel că unele repere vor fi cumpărate de pe piaţă la un preţ mai mare.

III) Identificarea criteriului de performanţă şi formalizarea lui în funcţia obiectiv

Costul total = Costul producerii unor repere în cadrul firmei + Costul achiziţionării restului de repere de pe piaţă =

$$= 25x_1 + 44x_2 + 19x_3 + 31(200 - x_1) + 47(100 - x_2) + 23(150 - x_3) =$$
$$= 14350 - 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 \quad \to \quad \min$$

Însă, minimizarea expresiei $14350 - 6x_1 - 3x_2 - 4x_3$ este echivalentă cu maximizarea “scăzătorului” $6x_1 + 3x_2 + 4x_3$ pentru că “descăzutul” este o constantă. În consecinţă vom lua ca funcţie obiectiv:

$$f = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \to \quad \max \qquad (6)$$

IV) Condiţii explicite impuse variabilelor:

$$x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0\,,\ x_3 \ge 0 \qquad (7)$$

Observaţie: normal ar fi să impunem şi condiţia “x_1, x_2, x_3 întregi” (cum de altfel ar fi trebuit şi în cazul problemei firmei de calculatoare din exemplul 1.2!) dar nu o facem deoarece s-ar complica rezolvarea. Este posibil ca în soluţia optimă x_1, x_2, x_3 să aibe valori întregi şi dacă nu se întâmplă acest lucru putem recurge la rotunjiri. Soluţia rezultată din rotunjire poate să nu mai fie optimă dar abaterea de la optim este economic neglijabilă…

Reunind (1) – (7) obținem programul liniar:

$$(P)\quad \begin{cases} (\max) f = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 1200 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 1000 \\ x_1 \le 200 \\ x_2 \le 100 \\ x_3 \le 150 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Rezolvarea acestuia a condus la soluția optimă:

$$x_1^* = 171 \,,\; x_2^* = 0 \,,\; x_3^* = 143 \qquad (\max) f = 1598$$

Interpretarea soluției:

-Din reperul R_1, 171 bucăți se produc în cadrul firmei, restul de 29 bucăți se cumpără.
Cost: 25·171 + 31·29 = 4275 + 899 = 5174u.m.
- Reperul R_2 se cumpără în totalitate de pe piață.
Cost: 47·100 = 4700u.m.
- Din reperul R_3, 143 bucăți se produc în firmă şi celelalte 7 bucăți se cumpără:
Cost: 19·143 + 23·7 = 2717 + 161 = 2878u.m.

Costul total 5174 + 4700 + 2878 = 12752 = 14350- 1598

2. O bancă asigură clienților săi patru tipuri de credit cu următoarele dobânzi anuale:

Tip credit	Dobânda anuală
1	12%
2	20%
3	20%
4	10%

Tabel 1.2

Banca dispune de 250 milioane euro şi în stabilirea cotelor pe care le va repartiza fiecărui tip de credit ea va trebui să țină seama de următoarele condiții:

a) Tipul 1 trebuie să reprezinte cel puțin 55% din totalul creditelor de tipurile 1 şi 2 şi cel puțin 25% din totalul creditelor acordate (în milioane euro);
b) Tipul 2 nu trebuie să depăşească 25% din totalul creditelor acordate;
c) Dobânda medie a tuturor creditelor acordate nu trebuie să depăşească 15%.

Cum va trebui să procedeze banca pentru a-şi maximiza venitul din dobânzile la creditele acordate?

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Vom nota

$x_i \equiv$ volumul creditelor de tipul i acordate, i =1,2,3,4 (în milioane euro)

II) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Venitul băncii, din dobânzile la creditele acordate are expresia

$$f = 0{,}14x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}20x_3 + 0{,}10x_4 \quad \rightarrow \quad \max \tag{1}$$

III) Formalizarea condițiilor limitative în restricții

- totalul creditelor este plafonat la 250 milioane euro:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 250 \tag{2}$$

- formalizarea condiției a):

$$x_1 \geq 0{,}55(x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}45x_1 + 0{,}55x_2 \leq 0 \tag{3}$$

$$x_1 \geq 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}75x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}25x_4 \leq 0 \tag{4}$$

- formalizarea condiției b):

$$x_2 \leq 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}25x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}25x_3 - 0{,}25x_4 \leq 0 \tag{5}$$

- formalizarea condiției c):

$$\frac{0{,}14x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}20x_3 + 0{,}10x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \leq 0{,}15 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}01x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}05x_3 - 0{,}05x_4 \leq 0 \tag{6}$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,..,4 \quad \text{(eventual întregi dacă nu se admit fracțiuni de milion!)} \tag{7}$$

Reunind (1) – (7) şi operând simplificări evidente se obține modelul liniar:

$$
\begin{aligned}
(\max) f &= 7x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 5x_4 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 250 \\
-9x_1 + 11x_2 &\le 0 \\
-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 0 \\
-x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 &\le 0 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Pentru rezolvare s-a folosit un utilitar care a produs următoarea soluție „întreagă”:

Tip credit	Volum (milioane euro)
1	65
2	51
3	48
4	86
Total	250

Tabelul 1.3

Tipul 1 reprezintă 56% din totalul creditelor de tipurile 1 şi 2 şi 26% din totalul tuturor creditelor. Tipul 2 reprezintă numai 20,4% din total credite. În fine, dobânda medie la creditele acordate este de 15%. Venitul din dobânzi al băncii se ridică la 37,5 milioane euro.

3. GODAC este o mică firmă specializată în comercializarea cărnii şi a produselor din carne. Printre alte produse se oferă clienților carne tocată în amestec din carne slabă de vită şi carne de porc. Un kg de carne de vită pentru tocat conține 80% carne şi 20% grăsime şi se vinde cu 24lei/kg. Kilogramul de carne de porc conține 68% carne şi 32% grăsime şi se vinde cu 18 lei. În ce proporție vor fi amestecate carnea de vită şi carnea de porc astfel încât:

- procentul de grăsime în amestec să nu depăşească 25%;
- prețul unui kg de carne tocată în amestec să fie cât mai mic.

Se va presupune că toate costurile legate de tocare şi amestecare (omogenizare) sunt neglijabile sau au fost deja incluse în prețurile constituenților.

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Întrebarea din enunț „**în ce proporție** vor fi amestecate cele două sortimente de carne astfel încât..” conduce la notațiile:

$x_1 \equiv$ **fracția** dintr-un kilogram de amestec reprezentată de carnea de vită;
$x_2 \equiv$ **fracția** dintr-un kilogram de amestec reprezentată de carnea de porc;

II) Formalizarea condițiilor limitative în restricții. Din definiția variabilelor modelului rezultă egalitatea:

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (1)$$

Limitarea procentului de grăsime din amestec conduce la inegalitatea:

$$0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 \le 0{,}25 \qquad (2)$$

III) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Prețul unui kg de amestec are expresia:

$$f = 24x_1 + 18x_2 \quad \rightarrow \quad \min \qquad (3)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor.

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0 \qquad (4)$$

(desigur, x_1 şi x_2 trebuie să fie subunitare dar această limitare este asigurată prin (1) şi (4))

Eliminăm variabila x_2 : $x_2 = 1 - x_1$.

$$(2) \Rightarrow 0{,}20x_1 + 0{,}32(1 - x_1) \le 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad 0{,}12x_1 \ge 0{,}07 \Rightarrow x_1 \ge {}^{0{,}07}\!\big/_{0{,}12} = 0{,}583$$

$$(3) \Rightarrow f = 24x_1 + 18(1 - x_1) = 18 + 6x_1$$

$$(4) \Rightarrow x_1 \ge 0\ , 1 - x_1 \ge 0 \Rightarrow 0 \le x_1 \le 1$$

Programul (1) – (4) se reduce la programul într-o singură variabilă:

$$(\min) f = 18 + 6x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \min\ 6x_1$$
$$0{,}583 \le x_1 \le 1$$

cu soluția $x_1^* = 0{,}583 \quad (\min) f = 21{,}50$. Prin urmare amestecul cel mai iefin ar costa 21,50 lei/kg şi ar contine 58,3% carne de vită şi restul carne de porc.

4. O mică firmă produce bunurile alimentare G_1, G_2, G_3 folosind trei materii prime agricole de bază R_1, R_2, R_3. Necesarul de resurse, în kg, pentru realizarea unui kilogram din fiecare din bunurile G_1, G_2, G_3 sunt indicate în tabelul 1.4.

Bunuri / Resurse	G_1	G_2	G_3
R_1	2	4	5
R_2	1	3	2
R_3	2	1	1

Tabelul 1.4

Pentru ziua următoare există în stoc 45 kg din R_1, 30 kg din R_2 şi 20 kg din R_3.Profiturile sunt de 7, 9, 12 unități monetare pe kilogramul din G_1, G_2, respectiv G_3. Firma livrează bunul G_1 în cutii de ½ kg, bunul G_2 în cutii de 1 kg şi bunul G_3 în cutii de 2 kg iar desfacerea este asigurată pentru tot ceeace se produce.

1) Scrieți un program liniar pentru determinarea programului de activitate al firmei în ziua următoare având ca obiectiv maximizarea profitului.
2) Cum se modifică programul inițial dacă din bunul G_1 nu trebuie să se facă mai mult de zece cutii?
3) Cum se modifică programul inițial dacă din bunul G_1 se pot face cel mult zece cutii iar din G_2 cel puțin trei?
4) Deoarece resursele R_1, R_2, R_3 sunt foarte perisabile firma este interesată în a le valorifica cât mai bine. Cum se poate modela acest deziderat?

1) Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Fără îndoială, mărimile variabile ale acestei situații sunt "ce se va produce" în ziua următoare din G_1,G_2,G_3 cu resursele existente în stoc. Consumurile de resurse sunt calculate la kg de produs finit însă forma finală de prezentare a bunurilor este "în cutii", astfel că în evaluarea producției ce urmeză a fi realizate bunurile vor fi măsurate în cutii. În consecință, variabilele modelului vor fi:

x_i = numărul de cutii conținând bunul G_i ce urmează a fi produse din resursele existente.

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții. Având în vedere notațiile introduse, bunurile G_1,G_2,G_3 vor fi produse atunci în cantitățile (în kg) $\frac{1}{2}x_1, x_2$ respectiv $2x_3$ kg. Încadrarea consumurilor de resurse în stocurile disponibile conduce la restricțiile:

$$2 \cdot \frac{1}{2}x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot 2x_3 \leq 45 \qquad (1)$$

$$1 \cdot \frac{1}{2}x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot 2x_3 \leq 30 \qquad (2)$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot 2x_3 \leq 20 \qquad (3)$$

III) Identificarea criteriului de performanță şi formalizarea lui în funcția obiectiv. Se urmăreşte maximizarea profitului a cărui expresie este $7 \cdot \frac{1}{2}x_1 + 9 \cdot x_2 + 12 \cdot 2x_3$ u.m.

IV) Condiții explicite impuse variabilelor modelului. Condițiile de nenegativitate sunt evidente:

$$x_1 \geq 0 \,,\; x_2 \geq 0 \,,\; x_3 \geq 0$$

la care se adaugă condiția

$$x_1, x_2, x_3 \text{ întregi}$$

deoarece produsele finale sunt măsurate în unități **indivizibile** (nu se poate produce o "fracție" dintr-o cutie…) În final se obține programul liniar:

$$(P_1)\quad \begin{array}{l} (\max) f = 3{,}5x_1 + 9x_2 + 24x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 45 \\ 0{,}5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 30 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ \text{(intregi)} \end{array}$$

2) La modelul (P_1) se adaugă restricția $x_1 \leq 10$ obținându-se programul (P_2)
3) La modelul (P_1) se adaugă restricțiile $x_1 \leq 10, x_2 \geq 3$ obținându-se programul (P_3)
4) În notațiile modelului (P_1) cantitățile de resurse neconsumate au expresiile:

resursa R_1: $45-(x_1+4x_2+10x_3) \geq 0$
resursa R_2: $30-(0{,}5x_1+3x_2+4x_3) \geq 0$
resursa R_3: $20-(x_1+x_2+2x_3) \geq 0$

Valorificarea celor trei resurse este cu atât mai bună cu cât diferențele de mai sus sunt mai mici. Vom realiza acest lucru minimizând cea mai mare dintre diferențe:

$$(\min) y$$

unde

$$y = \max\{45-(x_1+4x_2+10x_3), 30-(0{,}5x_1+3x_2+4x_3), 20-(x_1+x_2+2x_3)\}$$

si x_1, x_2, x_3 satisfac toate relatiile modelului (P)

Pentru a transforma noul model într-un program liniar uzual înlocuim relația de definiție a variabilei *y* cu inegalitățile:

$$\begin{aligned} &45-(x_1+4x_2+10x_3) \leq y \\ &30-(0{,}5x_1+3x_2+4x_3) \leq y \\ &20-(x_1+x_2+2x_3) \leq y \end{aligned}$$

Tot din relația de definiție a lui *y* rezultă că dacă x_1, x_2, x_3 sunt întregi atunci *y* este sau un număr întreg sau un număr cu partea fracționară 0,5; în consecință, numărul $z = 2y$ va fi cu siguranță întreg. Înlocuind mai sus $y = z/2$ obținem programul liniar:

$$(P_4) \quad \begin{aligned} &(\min) 0{,}5z \\ &x_1+4x_2+10x_3 \leq 45 \\ &0{,}5x_1+3x_2+4x_3 \leq 30 \\ &x_1+x_2+2x_3 \leq 20 \\ &x_1+4x_2+10x_3+0{,}5z \geq 45 \\ &0{,}5x_1+3x_2+4x_3+0{,}5z \geq 30 \\ &x_1+x_2+2x_3+0{,}5z \geq 20 \\ &x_1, x_2, x_3, z \geq 0 \text{ (intregi)} \end{aligned}$$

Analiza comparativă a soluțiilor optime. În tabelul 1.5 sunt prezentate soluțiile optime întregi ale modeleor $P_1 – P_4$.

Cel mai mare profit care s-ar obține din resursele date este de 121 u.m.; această valoare poate fi luată ca punct de referință. Soluția corespunzătoare are unele inconveniente: nu produce bunul G_2 şi aproape o treime din resursa R_2 nu se consumă. Încercarea de diversificare a producției – vezi soluțiile modelelor (P_2) şi (P_3) - reduce profitul cu câteva procente şi duce la creşterea cantităților de resurse neutilizate. Ultima “propunere” de plan de activitate asigură o utilizare aproape totală a resurselor disponibile iar profitul aferent este foarte aproape de nivelul maxim posibil. Totuşi ea nu prevede producerea bunului G_3 şi acest lucru s-ar putea să conteze în decizia finală, decizie care va trebui să țină seama şi de cererea pentru acest bun.

Model	Programul optim de activitate Cantitatea de produs – în cutii şi kg – din:						Resurse consumate (în kg şi % din stocurile disponibile)						Profit	
	G_1		G_2		G_3		R_1		R_2		R_3			
	Cutii	kg	Cutii	kg	Cutii	kg	kg	%	kg	%	kg	%	u.m.	%
P_1	**14**	7	**-**	-	**3**	6	44	97,8	19	63,3	20	100	121	100
P_2	**10**	5	**1**	1	**3**	6	44	97,8	20	66,7	17	85	116	95,9
P_3	**9**	4,5	**4**	4	**2**	4	45	100	24,5	81,7	17	80	115,5	85
P_4	**12**	6	**8**	8	**-**	-	44	97,8	30	100	20	100	114	94,2

Tabelul 1.5

5. Gheorghe este un tânăr fermier (româno – european) specializat în cultura grâului, a porumbului şi a sfeclei de zahăr. El are 500 ha de pământ arabil şi în această iarnă trebuie să decidă ce suprafață de teren va aloca fiecărei culturi.

Pentru necesitățile fermei (casă, animale, păsări) Gheorghe are nevoie de 200t de grâu şi 240t de porumb pe care le asigură din recoltă sau cumpărând de pe piață. Tot ce depăşeşte nevoile fermei se vinde la prețul pieței. Tona de grâu se vinde cu 170€ iar tona de porumb cu 150€ numai că la cumpărare Gheorghe trebuie să plătească cu 40% mai mult pe tonă pentru transport.

O cultură profitabilă este sfecla de zahăr care se vinde cu 36€ pe tonă. Însă în UE există o reglementare pentru prevenirea producerii unei cantități prea mari de sfeclă de zahăr: în cazul lui Gheorghe, orice cantitate ce depăşeşte limita de 6000t va putea fi vândută cu numai 10€ pe tonă.

Muncind vârtos şi cu ajutorul lui D-zeu, Gheorghe crede şi ia în calcul o recoltă medie de 2,5t grâu, 3t de porumb şi 20t de sfeclă de zahăr la hectar.

Costurile legate de însămânțare, întreținere şi recoltare a celor trei culturi sunt de 150€ la grâu, 250€ la porumb şi 260€ la sfecla de zahăr la hectar.

Cum ar trebui să-şi împartă Gheorghe pământul pentru ca la finele toamnei următoare câştigul său să fie maxim?

Datele problemei sunt sistematizate în următorul tabel:

	Grâu	Porumb	Sfeclă de zahăr
Recoltă medie (t/ha)	2,5	3	20
Cost de producție (€/ha)	150	250	260
Prețul pieței (€/t)	170	150	36 sub 6000t 10 peste 6000t
Preț de achiziție(€/t) (Se adaugă 40% pt transport)	170+68=238	150+60=210	-
Necesar pt. nevoile fermei (t)	200	240	-

Tabelul 1.6

Modelul matematic.

I) Identificarea mărimilor variabile.

$x_1 \equiv$ suprafața de teren alocată cultivării grâului (ha);
$x_2 \equiv$ suprafața de teren alocată cultivării porumbului (ha);
$x_3 \equiv$ suprafața de teren alocată cultivării sfeclei de zahăr(ha);
$y_1 \equiv$ cantitatea de grâu vândută (t);
$y_2 \equiv$ cantitatea de porumb vândută (t);
$y_3 \equiv$ cantitatea de sfeclă de zahăr vândută la prețul maxim (t);
$y_4 \equiv$ cantitatea de sfeclă de zahăr vândută la prețul minim (t);
$z_1 \equiv$ cantitatea de grâu cumpărată (t);
$z_2 \equiv$ cantitatea de porumb cumpărată (t);

II) Identificarea criteriului de performanță şi formalizarea lui în funcția obiectiv

Avem următoarea ecuație de balanță:

Profit $\equiv$ Venitul rezultat din vânzarea unor cantități din producția realizată - Costul total de producție - Costul cantităților de cereale cumpărate de pe piață

în care:

Venitul rezultat din vânzarea unor cantități din producția realizată $= 170y_1 + 150y_2 + 36y_3 + 10y_4$

Costul total de producție $= 150x_1 + 250x_2 + 260x_3$

Costul cantităților de cereale cumpărate de pe piață $= 238z_1 + 210z_2$

În consecință, funcția obiectiv va avea expresia:

$$f = 170y_1 + 150y_2 + 36y_3 + 10y_4 - 150x_1 - 250x_2 - 260x_3 - 238z_1 - 210z_2 \quad \to \quad \max \qquad (1)$$

III) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții.

- **suprafața totală a terenului agricol este limitată** la 500ha:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \qquad (2)$$

- **asigurarea necesarului de grâu** pentru nevoile fermei:

cantitatea de grâu recoltată + cantitatea de grâu cumpărată - cantitatea de grâu vândută ≥ 200

sau

$$2{,}5x_1 + z_1 - y_1 \geq 200 \qquad (3)$$

- **asigurarea necesarului de porumb** pentru nevoile fermei. Raționând analog obținem restricția:

$$3x_2 + z_2 - y_2 \geq 240 \qquad (4)$$

- **producția de sfeclă de zahăr se vinde în întregime**:

$$20x_3 = y_3 + y_4 \qquad (5)$$

- **cantitatea de sfeclă de zahăr vândută la prețul maxim nu trebuie să depăşească limita** de 6000t:

$$y_3 \leq 6000 \qquad (6)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0\,;\; y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0\,;\; z_1, z_2 \geq 0 \qquad (7)$$

Reunind relațiile (1) – (7) obținem modelul matematic cerut care este un program liniar cu 9 variabile şi 6 restricții.
Folosind un utilitar a rezultat soluția optimă:

$$x_1^* = 120\,,\; x_2^* = 80\,,\; x_3^* = 300\,,\; y_1^* = 100\,,\; y_2^* = 0\,,\; y_3^* = 6000\,,\; y_4^* = 0\,,\; z_1^* = 0\,,\; z_2^* = 0$$
$$\max f = 117000$$

cu următoarea interpretare:

- întregul teren agricol este folosit: 120ha pentru grâu, 80ha pentru porumb şi restul de 300ha pentru sfecla de zahăr.
- în caz că producțiile la hectar sunt cele scontate s-ar obține 300t de grâu din care 100t se valorifică pe piață, 240t de porumb, cât este necesar pentru nevoile fermei şi 6000t de sfeclă vândute la prețul maxim.
- din vânzarea grâului şi a sfeclei s-ar câştiga 233000€; cheltuielile însumează 116000€, astfel că profitul fermierului ar fi de 117000€.

6. Steven este proprietarul unei ferme moştenite de la părinți. În următorul an agricol, Steven şi ai lui şi-au propus să cultive soia, porumb şi ovăz şi să crească vaci de lapte şi găini ouătoare.Ferma are 100 acri de teren, cotețele pot adăposti până la 3000 păsări iar în grajduri pot fi adăpostite cel mult 32 de animale. Pentru cheltuieli, Steven a prevăzut un buget de $40000. Forța de muncă, asigurată de membrii familiei, însumează 3600 om·ore în aşa numita perioadă de iarnă (15 Sept. – 15 mai) şi 4100 om·ore în perioada de vară. Fiecare om·oră neutilizată în fermă este valorificată de către tineretul familiei într-o fermă vecină cu $5 iarna şi $6 vara.
Costul anual al întreținerii unei vaci este de $1200 iar al unei găini de $9. În plus fiecare vacă are nevoie de 1,5 acri de păşune, 100 om·ore de muncă iarna şi 50 om·ore de muncă vara.Pentru o pasăre sunt necesare în medie 0,6 om·ore iarna şi 0,3 om·ore vara. Fiecare vacă aduce un venit anual net de $1000 iar o găină de numai $5. Terenul fermei trebuie folosit în întregime atât pentru culturi cât şi pentru păşune.
Pentru cele trei culturi, necesarul de forță de muncă (în om·ore) şi venitul net (în $) pe acru sunt date în următorul tabel:

	Soia	Porumb	Ovăz
Necesar forță de muncă iarna	20	35	10
Necesar forță de muncă vara	50	75	40
Venit net	600	900	450

Tabelul 1.7

Steven doreşte să ştie ce suprafețe din terenul fermei va aloca celor trei culturi şi câte vaci şi păsări va creşte pentru ca venitul net al familiei sale să fie maxim.

Modelul matematic.

I) Identificarea mărimilor variabile ale modelului. Acestea rezultă uşor din finalul enunțului:

$x_1 \equiv$ suprafața de teren cultivată cu soia (acri);
$x_2 \equiv$ suprafața de teren cultivată cu porumb (acri);
$x_3 \equiv$ suprafața de teren cultivată cu ovăz (acri);
$y \equiv$ numărul vacilor de lapte;
$z \equiv$ numărul de găini ouătoare.

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea acestora în restricții

- repartizarea suprafeței de teren disponibile. Pe lângă suprafețele alocate celor trei culturi, este necesar şi un teren pentru păşunat în suprafață de 1,5y acri. Rezultă restricția:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 1{,}5y = 100 \qquad (1)$$

- **repartizarea bugetului de cheltuieli**.Acesta este folosit pentru întreținerea animalelor şi a păsărilor:

$$1200y + 9z \leq 40000 \qquad (2)$$

- **repartizarea forței de muncă**. Aceasta este folosită la întreținerea culturilor dar şi la îngrijirea animalelor şi păsărilor în cele două perioade, de iarnă şi de vară.

Iarna: $$20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100y + 0,6z \leq 3600 \qquad (3)$$

Vara: $$50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 50y + 0,3z \leq 4100 \qquad (4)$$

- **utilizarea spațiilor de adăpostire a animalelor şi a păsărilor**.

$$y \leq 32 \qquad (5)$$

$$z \leq 3000 \qquad (6)$$

III) Identificarea criteriului de performanță şi formalizarea lui în funcția obiectiv

Venitul net total are trei componente:

- venitul rezultat din cele trei culturi: $600x_1 + 900x_2 + 450x_3$;
- venitul rezultat din creşterea animalelor şi a păsărilor: $1000y + 5z$
- venitul rezultat din valorificarea forței de muncă neutilizată în fermă (iarna şi vara):

$$5(3500 - 20x_1 - 35x_2 - 10x_3 - 100y - 0,6z) + 6(4000 - 50x_1 - 75x_2 - 40x_3 - 50y - 0,3z) =$$
$$= 41500 - 400x_1 - 625x_2 - 290x_3 - 800y - 4,8z$$

Urmează că venitul net total are expresia:

$$41500 + 200x_1 + 275x_2 + 160x_3 + 200y + 0,2z$$

Ignorând constanta 41500 rezultă următoarea funcție obiectiv:

$$f = 200x_1 + 275x_2 + 160x_3 + 200y + 0,2z \to \max \qquad (7)$$

IV) Condiții explicite impuse mărimilor variabile:

$$x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0 \text{ ; } y \geq 0 \text{ ; } z \geq 0 \qquad (8)$$

Modelul matematic al problemei date se compune din relațiile (1) – (8).
Folosind un utilitar, s-a găsit soluția optimă:

$$x_1^* = 26,316 \text{ , } x_2^* = 0 \text{ , } x_3^* = 24,211 \text{ , } y^* = 26316 \text{ , } z^* = 0 \qquad (\max) f = 16400$$

Din motive evidente, variabilele ar trebui să aibe valori întregi – mai cu seamă y şi z ! Rotunjind atent, s-a obținut soluția:

$$x_1^0 = 36 \,,\, x_2^0 = 0 \,,\, x_3^0 = 25 \,,\, y^0 = 26 \,,\, z^0 = 0$$

cu aceeaşi valoare pentru funcția obiectiv. Lăsăm în seama cititorului interpretarea soluției.

7. Un avion de transport are trei compartimente pentru aşezarea mărfurilor: față, centru şi spate. Compartimentele au următoarele limitări în ceeace priveşte greutatea şi volumul mărfurilor încărcate:

	Compartiment	Greutate (t)	Volum (m^3)
1.	Față	10	6800
2.	Centru	16	8700
3.	Spate	8	5300

Tabelul 1.8

Pentru asigurarea stabilității avionului în zbor, greutățile mărfurilor încărcate în cele trei compartimente trebuie să fie proporționale cu greutățile maxim admise.

Pentru următorul zbor sunt disponibile patru categorii de mărfuri. În tabelul 1.9 sunt date greutățile mărfurilor (în tone), volumul specific al acestora (în m^3/t) şi profitul transportatorului (în \$/t). Se acceptă transportarea oricărei cantități din aceste mărfuri. Se admite că volumul este proporțional cu greutatea acceptată.

Marfa	Greutate (t)	Volum specific (m^3/t)	Profit (\$/t)
1	18	480	310
2	15	650	380
3	23	580	350
4	12	390	285

Tabelul 1.9

Ce cantități din cele patru mărfuri vor fi transportate şi cum vor fi distribuite acestea distribuite în cele trei compartimente ale avionului astfel încât profitul transportatorului să fie maxim?

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Iată un caz în care utilizarea variabilelor dublu indexate se impune. Vom nota:

$x_{ij} \equiv$ cantitatea (în tone) din marfa i = 1,2,3,4 încărcată în compartimentul j , j = 1 (față) , j = 2 (centru) , j = 3 (spate).

II) Identificarea condițiilor limitative şi formalizarea lor în restricții.

- pentru fiecare marfă, cantitatea încărcată în cele trei compartimente nu depăşeşte cantitățile disponibile pentru transport:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 18 \quad (1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15 \quad (2)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 23 \quad (3)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 12 \quad (4)$$

- în fiecare compartiment, greutatea totală a mărfurilor de diferite tipuri încărcate nu trebuie să depăşească greutatea maxim admisă:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 10 \quad (5)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 16 \quad (6)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 8 \quad (7)$$

- în fiecare compartiment, volumul total al mărfurilor încărcate, de diferite tipuri nu trebuie să depăşească volumul maxim admis:

$$480x_{11} + 650x_{21} + 580x_{31} + 390x_{41} \leq 6800 \quad (8)$$

$$480x_{12} + 650x_{22} + 580x_{32} + 390x_{42} \leq 8700 \quad (9)$$

$$480x_{13} + 650x_{23} + 580x_{33} + 390x_{43} \leq 5300 \quad (10)$$

- greutățile mărfurilor încărcate în cele trei compartimente trebuie să fie proporționale cu greutățile maxim admise:

$$\frac{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}}{10} = \frac{x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}}{16} = \frac{x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}}{8}$$

Punem aceste relații în forma echivalentă:

$$16x_{11} + 16x_{21} + 16x_{31} + 16x_{41} - 10x_{12} - 10x_{22} - 10x_{32} - 10x_{42} = 0 \quad (11)$$

$$8x_{11} + 8x_{21} + 8x_{31} + 8x_{41} - 10x_{13} - 10x_{23} - 10x_{33} - 10x_{43} = 0 \quad (12)$$

III) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Maximizarea profitului transportatorului conduce la funcția:

$$\begin{aligned}(\max) f = 310(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 380(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + \\ + 350(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 285(x_{41} + x_{42} + x_{43})\end{aligned} \quad (13)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor.

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3,4\,;\ j = 1,2,3 \quad (14)$$

Modelul (1) – (14) are 12 variabile şi 12 restricţii. Rezolvarea sa (cu un utilitar) a condus la soluția optimă din tabelul 1.10

Marfa / Compartiment	1	2	3	4	Greutatea mărfurilor încărcate în compartiment	Volumul mărfurilor încărcate în compartiment
Față	-	7	3	-	10	6300
Centru	-	-	13	3	16	8700
Spate	-	8	-	-	8	5200
Greutatea totală încărcată	-	15	16	3		

Tabelul 1.10

Avionul este încărcat la greutatea maximă de 34t. Profitul aferent este de $ 12155.

8. Din bare cu lungimea 100 dm trebuie tăiate bare mai mici cu lungimile 47,31 şi 19 dm în cantitățile 15, 21 respectiv 40 bucăți. Scrieți un program liniar pentru realizarea comenzilor specificate cu un consum minim de bare cu lungimea 100 dm.

Modelul matematic

I) Identificarea mărimilor variabile. Dacă în problemele precedente mărimile variabile erau efectiv prezente în enunț ,aşteptând doar să fie recunoscute şi notate, în cazul de față lucrurile sunt mai complicate: din enunț lipsesc informațiile privind modalitățile de tăiere a barelor lungi în bare mai scurte. Aceste modalități de tăiere se numesc **rețete de croire** şi multiplicitățile de folosire a lor vor fi variabilele modelului!

O rețetă de croire se va zice **maximală** dacă din restul ei nu se mai poate croi nici una din barele (mai mici) cerute. Lista rețetelor maximale este dată în tabelul 1.11

Rețeta	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
47 dm	2	1	1	-	-	-	-
31 dm	-	1	-	3	2	1	-
19 dm	-	1	2	-	2	3	5
Rest (dm)	6	3	15	7	0	12	5

Tabelul 1.11

Notăm

$$x_j \equiv \text{numărul barelor lungi de 100 dm tăiate după rețeta } R_j,\ j = 1,...,7$$

II) Formalizarea condițiilor limitative în restricții Barele cu lungimea de 47 dm se obțin numai din aplicarea rețetelor R_1 , R_2 , R_3. Din tăierea a x_1 bare de 100 dm după rețeta R_1 se obțin $2x_1$ bare de 47 dm. Aplicând şi rețetele R_2 şi R_3 de x_2 respectiv x_3 ori se mai obțin- separat - cantitățile x_2 şi x_3 de bare de 47 dm. În consecință, din procesul de tăiere rezultă un total de $2x_1 + x_2 + x_3$ bare de 47 dm care trebuie să acopere cele 15 bucăți cerute:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 15 \qquad (1)$$

Realizarea cantităților de bare de 31 dm şi de 19 dm conduce la inegalitățile:

$$x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 21 \qquad (2)$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 3x_6 + 5x_7 \geq 40 \qquad (3)$$

III) Formalizarea criteriului de performanță în funcția obiectiv. Se urmăreşte minimizarea numărului de bare de 100 dm tăiate:

$$(\min) f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \qquad (4)$$

IV) Condiții explicite impuse variabilelor:

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 7 \quad \text{şi întregi} \qquad (5)$$

Reunind (1) – (5) se obține un program liniar cu trei restricții şi şapte variabile.

Observație: O soluție acceptabilă pentru problema dată se obține astfel.

Calculăm lungimea totală a barelor cerute: 15·47 + 21·31 + 40·19 = 2116 dm. Rezultă imediat că pentru satisfacerea comenzilor trebuie tăiate cel puțin $\frac{2116}{100} = 22$ bare de 100 dm. Am putea folosi rețeta R_2 de 15 ori apoi rețeta R_6 de 6 ori şi la urmă rețeta R_7 de două ori obținând cantitățile cerute şi un surplus de 3 bare de 19 dm.Se folosesc 15 + 6 + 2 = 23 bare lungi. Resturile procesului de tăiere însumează 23·100 – 2116 = 184 dm reprezentând 8% din lungimea barelor tăiate. Deşi poate fi apreciată ca foarte bună, această soluție nu este optimă; se poate arăta că sunt suficiente 22 de bare de 100 dm pentru a croi toate barele mai mici, resturile reprezentând numai 3,82% din ce s-a tăiat.. Invităm cititorul să găsească soluția optimă.

Probleme propuse

Atenție: Pentru problemele de optimizare care urmează se cere deocamdată numai modelul matematic. Determinarea soluțiilor optime se va face după însuşirea metodei de rezolvare a programelor liniare.

1. O firmă de construcții a câştigat un contract cu primăria pentru realizarea unui complex de locuințe însumând cel puțin 900 G (≡garsoniere), 2000 A_2 (≡ apartamente cu 2 camere) şi 1400 A_3 (≡ apartamente cu 3 camere). Se preconizează construirea a două tipuri de blocuri. Primul tip cuprinde 40 A_3 , 30 A_2 şi 10 G având un cost de 60 milioane euro. Al doilea tip costă 75 milioane euro şi cuprinde 20 A_3 , 50 A_2 şi 30 G. Câte blocuri din fiecare tip ar trebui construite pentru ca prevederile contractuale să fie realizate cu costuri minime?

2. Firma X, producătoare de echipamente sportive şi accesorii intenționează să lanseze pe piață un nou model de sac de golf în două variante: varianta standard (S) şi varianta de lux (L).Distribuitorul firmei a apreciat în mod deosebit noile produse şi a declarat că preia, în vederea desfacerii, întreaga producție a firmei pe următoarele trei luni.Serviciul producție a stabilit principalele operații necesare fabricării sacilor de golf precum şi timpul necesar efectuării fiecărei operații- vezi tabelul 1.12

Operații / Produs	Timpi de execuție (min/sac)			
	Croire. Vopsire	Cusături	Finisaje	Control de calitate Ambalare
Varianta standard S	42	30	60	6
Varianta de lux L	60	50	40	15

Tabelul 1.12

Analizând situația încărcării utilajelor şi a forței de muncă în următoarele trei luni acelaşi serviciu a stabilit că sunt disponibile:

630 ore pentru croire şi vopsire;
600 ore pentru cusături;
708 ore pentru finisaje;
135 ore pentru controlul de calitate şi ambalare.

Serviciul contabilitate a stabilit un profit de $10 pentru un sac în varianta S şi de $9 pentru un sac în varianta L.
Problema conducerii firmei este de a stabili câți saci de golf vor fi realizați în varianta standard şi câți în cea de lux pentru ca profitul să fie maxim.

3. Compania de aviație "Strutul zburător" doreşte să achiziționeze noi avioane de transport călători pe distanțe mici, medii şi lungi (cele trei tipuri de avioane sunt codificate MIC, MED şi LUN). Prețurile actuale sunt de 33,5; 25 şi 17.5 milioane euro pentru un avion de tipul LUN, MED şi respectiv MIC. Conducerea a autorizat folosirea a cel mult 500 milioane euro pentru cumpărarea noilor aparate. Experții firmei sunt de părere că indiferent de tipul şi numărul avioanelor achiziționate acestea vor fi folosite la capacitatea maximă şi în consecință profiturile anuale ale companiei ar putea fi de 2,1; 1,5 şi 1,15 milioane euro pe fiecare avion nou de tipul LUN, MED respectiv MIC. S-a estimat că numărul piloților angajați şi instruiți de către companie va fi suficient pentru cumpărarea a cel mult 16 avioane. Întreținerea unui avion de tipul LUN respectiv MED costă de $5/3$ respectiv $4/3$ ori mai mult decât întreținerea unui avion MIC iar serviciile de specialitate ale companiei pot întreține un număr de avioane noi echivalent cu întreținerea a 40 avioane de tipul MIC. Conducerea companiei doreşte să ştie câte avioane din fiecare tip ar trebui să cumpere în vederea maximizării profitului.

4. Vlad P. este un binecunoscut atlet din spațiul exsovietic care vizitează des Occidentul unde participă la diferite concursuri. De fiecare dată la întoarcere, Vlad cumpără o serie de obiecte ce nu se găsesc în țară pentru a le revinde cu un oarece profit.Cumpărăturile, de regulă blugi, cămăşi de mătase, CD playere şi CD-uri cu muzică heavy metal, sunt transportate cu un rucsac şi nu trebuie să depăşească 25 kg. Pentru a merge treaba bine, Vlad trebuie să țină seama de următoarele condiții:

- la fiecare CD player achiziționat el trebuie să cumpere cel puțin două CD-uri cu muzică;
- (cam) jumătate din amatorii de cămăşi de mătase vor, pe lângă cămaşă şi o pereche de blugi;
- din motive de control vamal, Vlad nu poate aduce mai mult de trei CD playere şi mai mult de zece CD-uri cu muzică.

Greutățile obiectelor şi profitul aşteptat sunt date în următorul tabel:

Obiect	Greutate (kg)	Profit (u.m.)
Blugi	1,500	200
Cămaşă de mătase	0,500	125
CD player	0,900	250
CD cu muzică	0,250	75

Tabel 13

Dați-i o mână de ajutor lui Vlad şi determinați combinația de obiecte care i-ar aduce profitul maxim. Se cere modelul matematic cu justificările de rigoare.

Bibliografie

Nica,V. T., Mustață, Fl., Mărăcine, V., Ciobanu, Gh., Cercetări Operaționale, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1998

Hillier,F. S., Lieberman, G. J., Introduction to Operations Research, Mc Graw Hill Publishing Company, New York, ...,2001

Taha, A. H., Operations research. An Introduction, eight edition, Pearson Prentice Hall, 2007

Bronson, R., Naadimuthu, G., Theory and Problems of Operations Research, Tata Mc Graw Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 2008

Unitatea de învățare 2

ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ
Proprietăți ale programelor liniare

Cuprins

2.1 Forma generală a unui program liniar

Reamintim că o problemă de programare matematică constă în maximizarea sau minimizarea unei funcții ale cărei variabile trebuie să satisfacă un set de egalități şi/sau inegalități. Inegalitățile trebuie să fie nestricte dintr-un motiv care va fi explicat mai târziu. Mai cu seamă în aplicațiile practice,variabilele nu pot lua decât anumite valori reale ca de exemplu numai valori nenegative.
Funcția de optimizat se numeşte **funcție obiectiv** iar relațiile necesar a fi îndeplinite de către variabile se numesc **restricții**.
O problemă de programare liniară sau pe scurt program liniar este o problemă de programare matematică în care funcția obiectiv şi restricțiile sunt liniare în variabilele problemei.

Exemplul 2.1 Exemple de programe liniare:

$$(P_1)\quad \begin{array}{r} (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{array} \quad \text{(dat în introducere)}$$

$$(P_2)\quad \begin{array}{l} (\min) f = 30x_1 + 50x_2 + 100x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \\ 5x_1 + x_3 \ge 4 \\ x_1 \text{ frs };\ x_2 \le 0\,;\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

frs ≡fără restricție de semn(≡ orice valoare reală)

Putem presupune că toate variabilele unui program liniar satisfac condiția de nenegativitate:

$$x_j \ge 0$$

înlocuind la nevoie:

- o variabilă **nepozitivă** $x_j \le 0$ cu opusa ei $x'_j = -x_j \ge 0$
- o variabilă **fără restricție de semn** cu diferența a două variabile **nenegative**:

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{cu} \quad x'_j \ge 0\,,\ x''_j \ge 0$$

Exemplul 2.2 Transformăm programul (P_2) din exemplul 2.1 într-un program echivalent în care toate variabilele satisfac condiția de nenegativitate. Pentru aceasta facem substituțiile:

$$x_1 = x'_1 - x''_1 \ \text{ cu } \ x'_1 \ge 0, x''_1 \ge 0 \ \text{ şi } \ x_2 = -x'_2 \ \text{ cu } \ x'_2 \ge 0$$

Obținem programul:

$$
\begin{aligned}
&(\min) f = 30x_1' - 30x_1'' - 50x_2' + 100x_3 \\
&x_1' - x_1'' - 3x_2' + 2x_3 \geq 2 \\
&3x_1' - 3x_1'' + x_2' \leq 3 \\
&5x_1' - 5x_1'' + x_3 \geq 4 \\
&x_1' \geq 0, x_1'' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

În forma sa generală, un program liniar (P) constă din:

- ***n* variabile** reunite în vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- ***m* restricții** liniare în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care pot fi egalități sau inegalități **nestricte**:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

(în (1) *i* este indicele restricției; pentru fiecare $i = 1, \ldots, m$ este precizat unul din semnele ≤ , = sau ≥)

- **funcție obiectiv**, liniară în variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2}$$

- **condiții de nenegativitate impuse tuturor variabilelor:**

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; \ldots, \; x_n \geq 0 \tag{3}$$

Un ansamblu de valori numerice $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ care satisfac restricțiile (1) se numeşte **soluție** a programului (P). Dacă în plus sunt verificate şi condițiile de nenegativitate (3) adică $\bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0$, ..., $\bar{x}_n \geq 0$,vom spune că $\bar{x}$ este o **soluție admisibilă** a lui (P)
Vom nota cu $\mathcal{A}$ (sau cu $\mathcal{A}_P$ dacă este necesar) mulțimea soluțiilor admisibile ale programului (P). $\mathcal{A}$ este o submulțime a spațiului numeric R^n.
O soluție admisibilă $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ cu proprietatea:

$$f(x^*) = \max\{f(x), x \in \mathcal{A}\} \text{ sau, după caz } f(x^*) = \min\{f(x), x \in \mathcal{A}\}$$

se numeşte **soluție optimă** a programului (P).
În baza relației:

$$\min\{f(x), x \in \mathcal{A}\} = - \max\{-f(x), x \in \mathcal{A}\}$$

în considerațiile teoretice dezvoltate în continuare vom presupune că funcția obiectiv din (P) se **maximizează**.

Exemplul 2.3 Pentru programul liniar

$$(P)\quad \begin{aligned} &(\max) f = 8x_1 - 6x_2 + 7x_3 \\ &3x_1 - x_2 + 2x_3 = 30 \\ &2x_1 + x_2 \geq 35 \\ &x_1 + 3x_3 \leq 20 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- ansamblul de valori numerice (vectorul) $\overline{x} = (15,5,-5) \Leftrightarrow \overline{x}_1 = 15$, $\overline{x}_2 = 5$, $\overline{x}_3 = -5$ este o soluție neadmisibilă;
- vectorul $\widetilde{x} = (14,16,2)$ este o soluție admisibilă care dă funcției obiectiv valoarea $f(\widetilde{x}) = 30$;
- vectorul $x^* = (13,9,0) \Leftrightarrow x_1^* = 13$, $x_2^* = 9$, $x_3^* = 0$ este unica soluție optimă a programului (P), oferind funcției obiectiv valoarea maximă $f(x^*) = 50$.

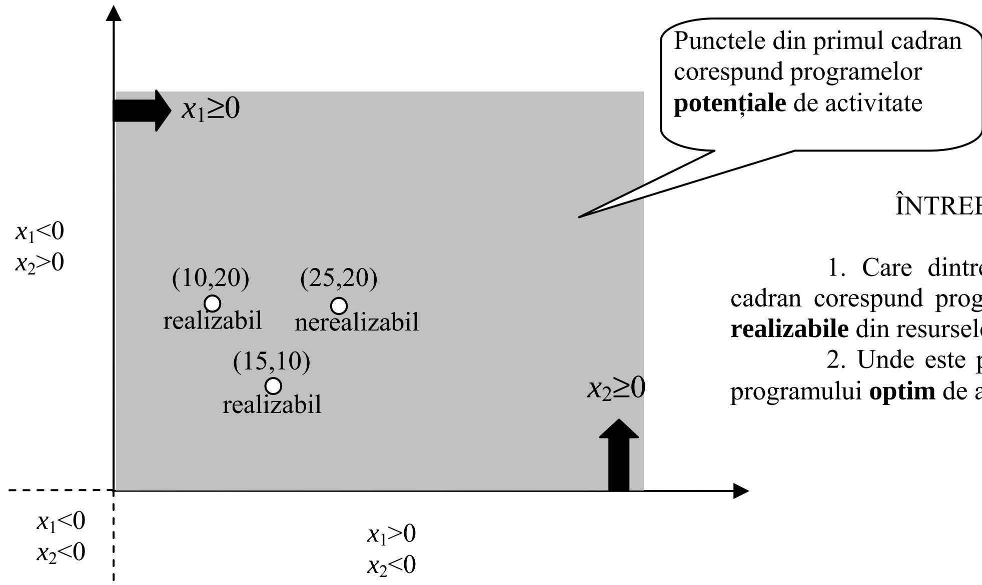
2.2 Studiul unui program liniar în două variabile

Ca şi în alte domenii ale matematicii, reprezentările şi interpretările geometrice au jucat un rol decisiv în stabilirea tuturor rezultatelor fundamentale ale programării matematice în general şi ale programării liniare în special.

Considerăm un program liniar în două variabile x_1, x_2: luăm ca exemplu modelul matematic al problemei firmei de calculatoare din unitatea de învățare 1 (exemplul 1.2):

$$(P_1)\quad \begin{aligned} &(\max) f = 50x_1 + 40x_2 \\ &3x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ &x_2 \leq 20 \\ &8x_1 + 5x_2 \leq 300 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pentru un asemenea program avem posibilitatea vizualizării mulțimii soluțiilor sale admisibile identificând x_1 şi x_2 cu **abscisa** respectiv **ordonata** unui punct dintr-un plan raportat la un sistem de axe.Sunt necesare câteva rudimente de geometrie analitică.



ÎNTREBĂRI

1. Care dintre punctele primului cadran corespund programelor **admisibile**, **realizabile** din resursele date?
2. Unde este puctul corespunzător programului **optim** de activitate?

Figura 2.1

Având în vedere semnificația variabilelor x_1, x_2 punctele (x_1, x_2) în care $x_1<0$ sau $x_2<0$ nu au nici o interpretare economică logică. În schimb, punctele (x_1, x_2) cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ se pot identifica, firesc, cu programele **potențiale** de activitate pentru următoarea săptămână. Astfel:

- Punctul (15,10) corespunde „intenției” firmei de a produce 15 unități PC_1 şi 10 unități PC_2. Intenția este chiar **realizabilă**, cele trei resurse avute în vedere – timp pentru asamblare, monitoare PC_2 şi spațiul de depozitare – fiind mai mult decât suficiente:
  - **- necesar** de timp pt. asamblare $\equiv 3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 85 < 150 \equiv$ timp **disponibil** pt. asamblare;
  - **- necesar** monitoare $PC_2 \equiv 10 < 20 \equiv$ **disponibil** monitoare PC_2;
  - **- necesar** spațiu de depozitare $\equiv 8 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 170 < 300 \equiv$ spațiu **disponibil** pentru depozitare.

  În caz de adoptare, acest plan ar aduce firmei un profit de $50 \cdot 15 + 40 \cdot 10 = \$1150$.

- Punctul (10,20) corespunde unei alte propuneri realizabile de program de activitate chiar mai bună decât precedenta deoarece ar aduce un profit superior: $50 \cdot 10 + 40 \cdot 20 = \$1300$. Acest plan ar utiliza integral resursa “monitoare PC_2”.

- În schimb, punctul (25,20) reprezintă o propunere de plan potențială dar nerealizabilă deoarece timpul necesar pentru asamblare ar depăşi timpul disponibil: $3 \cdot 25 + 5 \cdot 20 = 175 > 150$ (celelalte două resurse ar fi utilizate integral)

Se ridică firesc întrebările:

- **I) Care sunt punctele corespunzătoare „intențiilor” de plan realizabile? Cum arată mulțimea lor?**
- **II) Unde se găseşte punctul corespunzător programului realizabil cu cel mai mare profit (programul optim) şi cum se găseşte el?**
- **III) Ce învățăminte s-ar putea trage pentru cazul general (mai mult de două variabile)?**

I) Răspundem la prima întrebare.

Determinăm punctele (x_1, x_2) cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ care satisfac prima restricție din (P_1): $3x_1 + 5x_2 \leq 150$. Pentru aceasta reprezentăm în plan dreapta de ecuație $3x_1 + 5x_2 = 150$ - vezi figura 2.2. Punctele acestei drepte in care $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ corespund „intențiilor de plan” care utilizează integral timpul disponibil pentru asamblare. Din acest motiv, dreapta de ecuație $3x_1 + 5x_2 = 150$ se va numi în continuare dreapta „asamblare”.

Punctele (x_1, x_2) care satisfac inegalitatea $3x_1 + 5x_2 \leq 150$ constituie unul din cele două semiplane determinate de dreapta „asamblare”! Pentru identificarea lui va fi suficient să luăm un punct nesituat pe dreaptă – de exemplu origina (0,0) – şi să testăm satisfacerea restricției de către coordonatele punctului ales.În caz afirmativ, reținem semiplanul care conține punctul, altminteri reținem celălalt semiplan. Programele potențiale care satisfac prima restricție sunt vizualizate în figura 2.3.

.

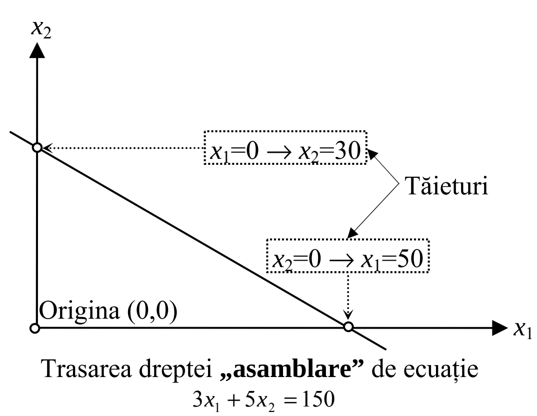


Figura 2.2

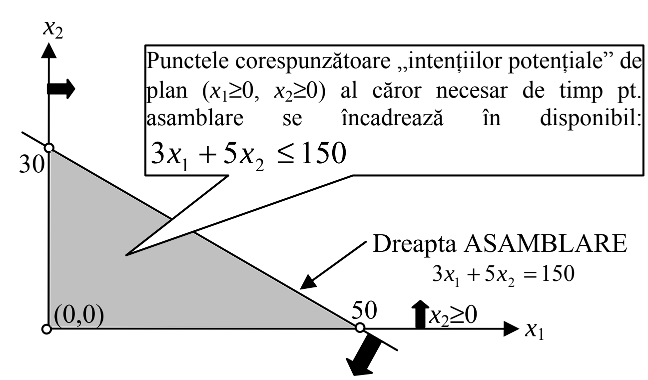


Figura 2.3

Procedăm analog şi cu celelalte două restricții – vezi figurile 2.4 şi 2.5

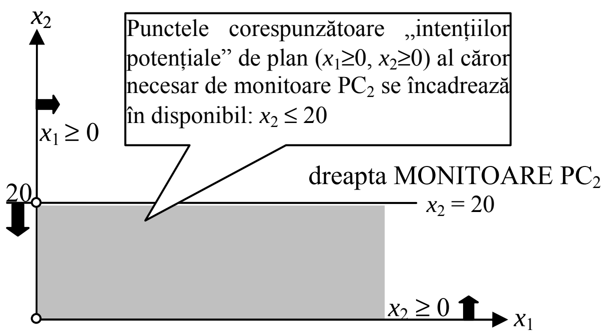


Figura 2.4

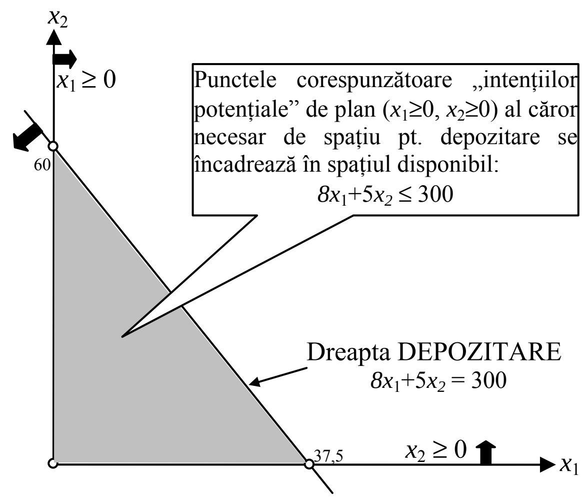


Figura 2.5

Recapitulând, în figurile 2.1, 2.3, 2.4 şi 2.5 apar mulțimile de puncte (x_1, x_2) ale căror coordonate satisfac – separat! – condițiile de nenegativitate şi restricțiile programului (P_1). Partea lor comună, adică **intersecția**, este formată din punctele care satisfac **simultan** toate aceste condiții.

În figura 2.6 este vizualizată această intersecție; ea este mulțimea hasurată OABCD. Punctele ei sunt exact soluțiile admisibile ale programului (P_1) şi corespund propunerilor de plan, realizabile din resursele date.

II) În continuare răspundem la a doua întrebare.

Dând funcției obiectiv f o valoare oarecare, de exemplu 1300, ne putem întreba ce semnificație au punctele (x_1, x_2) - fireşte cu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ - situate pe dreapta:

$$f = 1300 \quad \Leftrightarrow \quad 50x_1 + 40x_2 = 1300$$

Natural, aceste puncte corespund „intențiilor de plan” care ar aduce firmei un profit de \$1300 – fireşte în cazul în care această intenție ar fi şi realizabilă.
Pentru a vedea dacă firma poate realiza un profit de \$1300 din resursele date, cercetăm dacă dreapta “f = 1300” intersectează mulțimea $\mathcal{A}$ a programelor de producție realizabile. Din figura 2.7 rezultă că există chiar o infinitate de programe realizabile care ar conduce la acest profit. Se poate obține un profit dublu? Din aceeaşi figură rezultă că dreapta $f = 2600 = 50x_1 + 40x_2$ nu mai intersectează $\mathcal{A}$ şi în consecință \$2600 nu pot fi câştigați din resursele date!
Pentru a vedea cât de mare este profitul ce poate fi realizat, translatăm dreapta f = 1300 către dreapta f = 2600 oprindu-ne în momentul în care “se pierde” intersecția cu mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$.

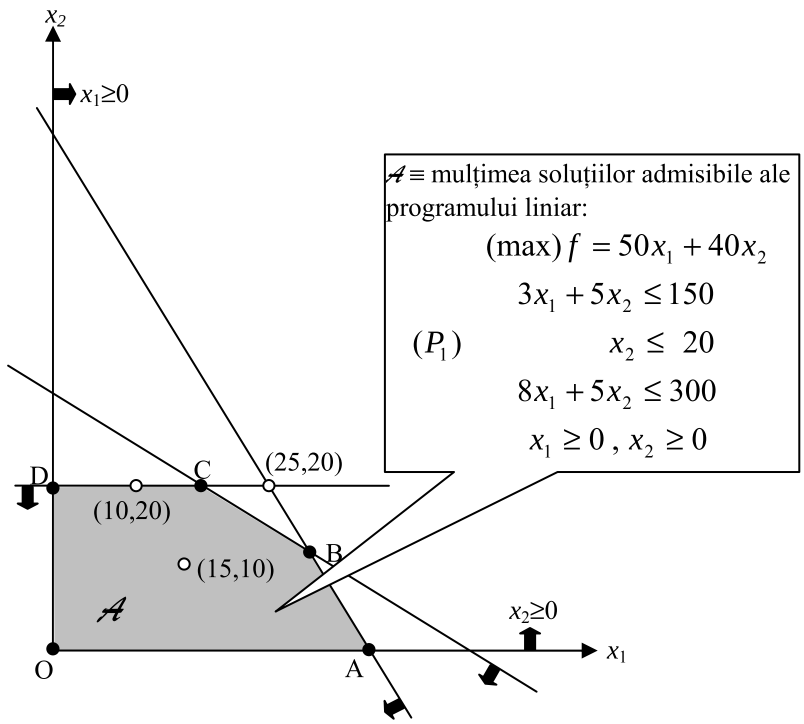


Figura 2.6

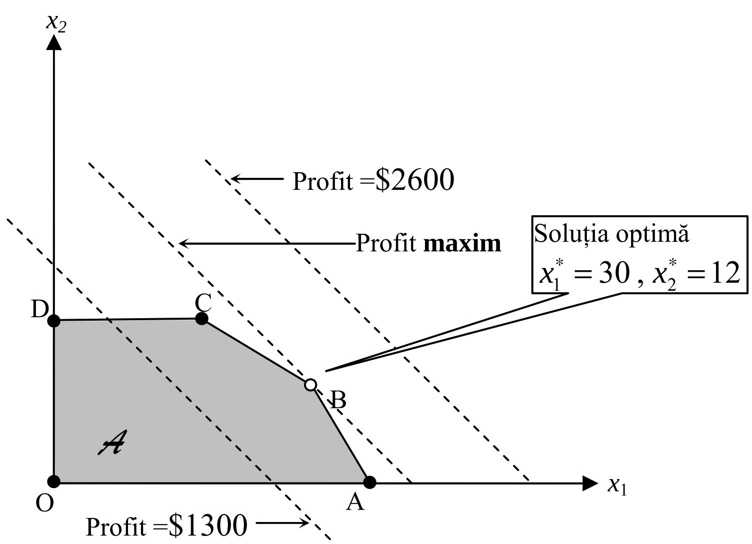


Figura 2.7

Din figura 2.7 rezultă că dreapta "profit maxim" trece prin punctual B, punct ce reprezintă soluția optimă a problemei.
Programul realizabil reprezentat de punctual B, program care ar aduce firmei cel mai mare profit posibil, se află la intersecția dreptelor "asamblare" şi "spațiu de depozitare"; prin urmare acest plan necesită consumarea integrală a resurselor sus amintite.
Componentele programului optim ≡ coordonatele punctului B se obțin rezolvând sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{matrix} 3x_1 + 5x_2 = 150 \\ 8x_1 + 5x_2 = 300 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^* = 30 \text{ unitati } PC_1 \\ x_2^* = 12 \text{ unitati } PC_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{profitul maxim } f^* = \$1980$$

2.3 Concluzii generale rezultate din rezolvarea grafică a programelor liniare în două variabile

În rezolvarea modelului firmei de calculatoare am insistat mai mult asupra semnificațiilor economice ale reprezentărilor geometrice utilizate. Vom încerca acum să punem în evidență o serie de proprietăți, valabile pentru orice program liniar; aceste proprietăți vor juca un rol decisiv în elaborarea unor metode de rezolvare a programelor liniare. Astfel, vom răspunde şi la întrebarea III) formulată în secțiunea 2.2.
Pentru variație, să considerăm un alt program liniar în două variabile:

$$(P_2) \quad \begin{aligned} &(\max) f = 3x_1 - x_2 \\ &3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ &5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ &2x_1 + x_2 \le 5 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

În figura 2.8 este vizualizată mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$: este mulțimea haşurată ABCD. Ecuația de definiție a funcției obiectiv:

$$3x_1 - x_2 = f$$

poate fi interpretată ca ecuația unei mulțimi de drepte paralele, (denumirea consacrată: fascicul de drepte paralele) numite **drepte de nivel** ale funcției *f*. Dacă o dreaptă particulară

$$3x_1 - x_2 = \bar{f} \qquad \text{(în figură } \bar{f} = 1\text{)}$$

intersectează $\mathcal{A}$ aceasta va însemna că programul (P_2) are soluții admisibile care oferă funcției obiectiv valoarea prestabilită $\bar{f}$. Pentru valori numerice superioare lui $\bar{f}$ dreptele de nivel corespunzătoare sunt **translații** ale dreptei originale în sensul indicat de săgeată. Rezultă uşor că maximul funcției *f* se atinge în „vârful" (colțul) A al frontierei mulțimii $\mathcal{A}$. A este intersecția dreptelor de ecuații $3x_1 - 2x_2 = 3$

şi $2x_1 + x_2 = 5$. Rezolvând sistemul acestor ecuații se găseşte soluția optimă $x^* = \frac{13}{7}, \frac{9}{7}$ cu $\max f = f(x^*) = \frac{30}{7}$, care satisface cu egalitate prima şi a treia restricție şi cu inegalitate strictă pe cea de a doua.

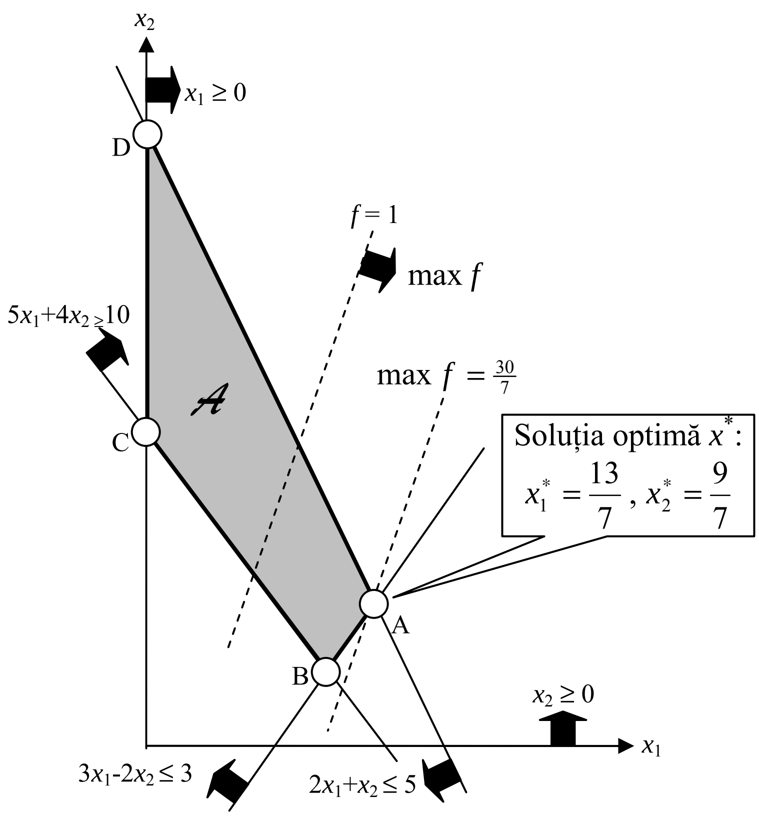


Figura 2.8

Dacă în (P_2) schimbăm funcția obiectiv $f = 3x_1 - x_2$ cu funcția $g = x_1 - x_2$ obținem un nou program liniar, (P_3) a cărui soluție optimă se găseşte în alt vârf al mulțimii $\mathcal{A}$ şi anume în B de coordonatele $x_1 = \frac{16}{11}$, $x_2 = \frac{15}{22}$ - vezi figura 2.9.

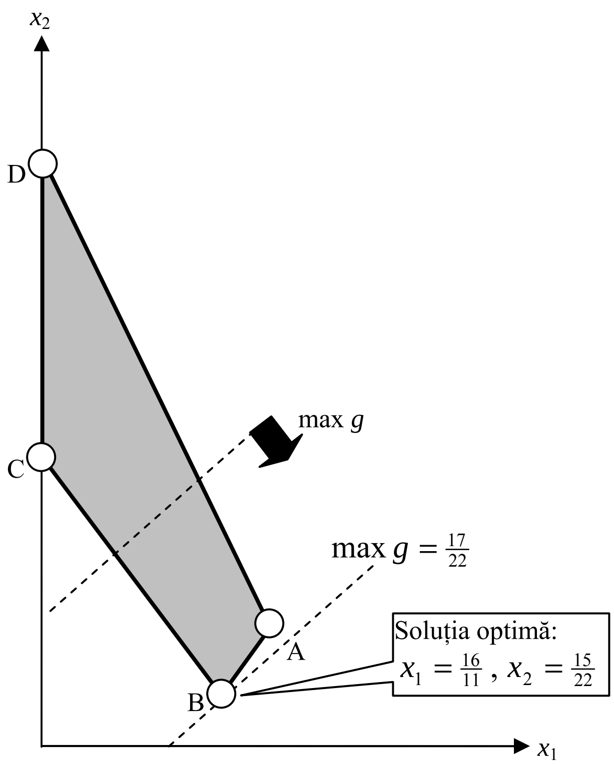


Figura 2.9

În fiecare din cele trei „rezolvări grafice” de programe liniare în două variabile de până acum, optimul funcțiilor obiectiv a fost realizat de către o singură soluție admisibilă. Nu întotdeauna este aşa; să considerăm programul liniar (P_4) derivat din (P_2) prin înlocuirea funcției obiectiv f cu funcția $h = 10x_1 + 5x_2$.Din figura 2.10 rezultă că nu numai vârfurile $A\left(\frac{13}{7},\frac{9}{7}\right)$ şi $D(0,5)$ sunt soluții optime dar şi toate celelalte puncte ale segmentului AD au această calitate! Prin urmare programul (P_4) are o infinitate de soluții optime!

Vom analiza acum programul liniar:

$$(P_5)\quad \begin{aligned} (\max) f &= 3x_1 - x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 &\ge 10 \\ x_1 \ge 0&, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

derivat din (P_2) prin eliminarea celei de a treia restricții. Mulțimea soluțiilor admisibile ale noului program este **nemărginită** – vezi figura 2.11 – şi orice dreaptă de nivel a funcției obiectiv $3x_1 - x_2 = \bar{f}$

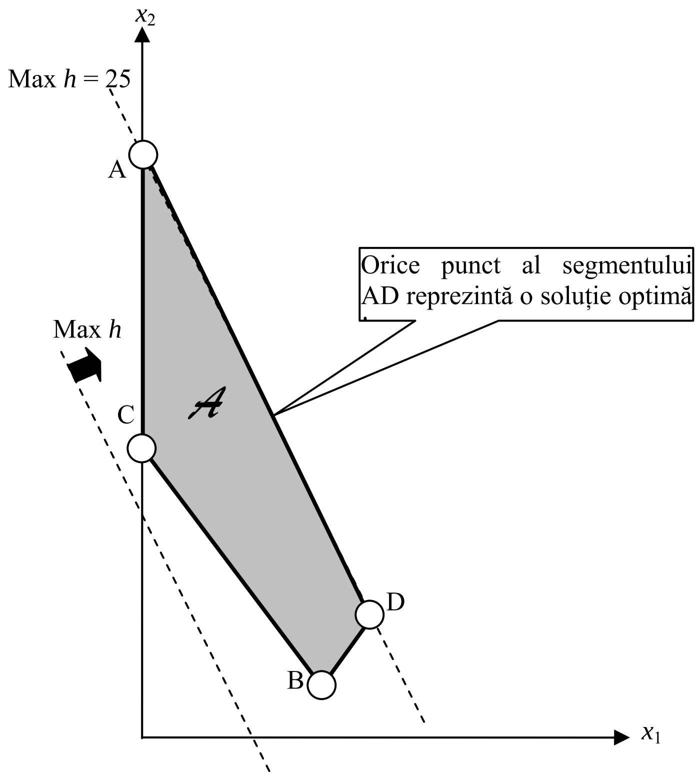


Figura 2.10

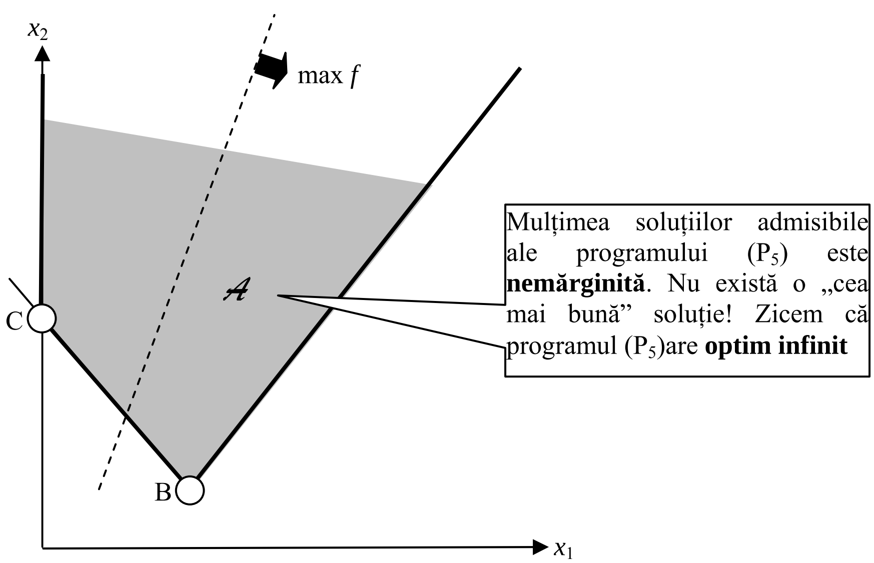


Figura 2.11

o va intersecta, oricât de mare ar fi constanta $\bar{f}$ .Conchidem că deşi (P_5) are soluții admisibile, nu există una care să ofere funcției obiectiv cea mai mare valoare. Vom spune că funcția obiectiv a programului (P_5) este **nemărginită superior** pe mulțimea soluțiilor sale admisibile sau că (P_5) are **optim infinit**.

Să luăm în considerare şi programul liniar:

$$(P_6)\quad \begin{aligned} &(\max) f = 3x_1 - x_2 \\ &3x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ &5x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ &2x_1 + x_2 \geq 5 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

dedus din (P_2) schimbând sensurile tuturor restricțiilor. În figura 2.12 sunt puse în evidență cele cinci

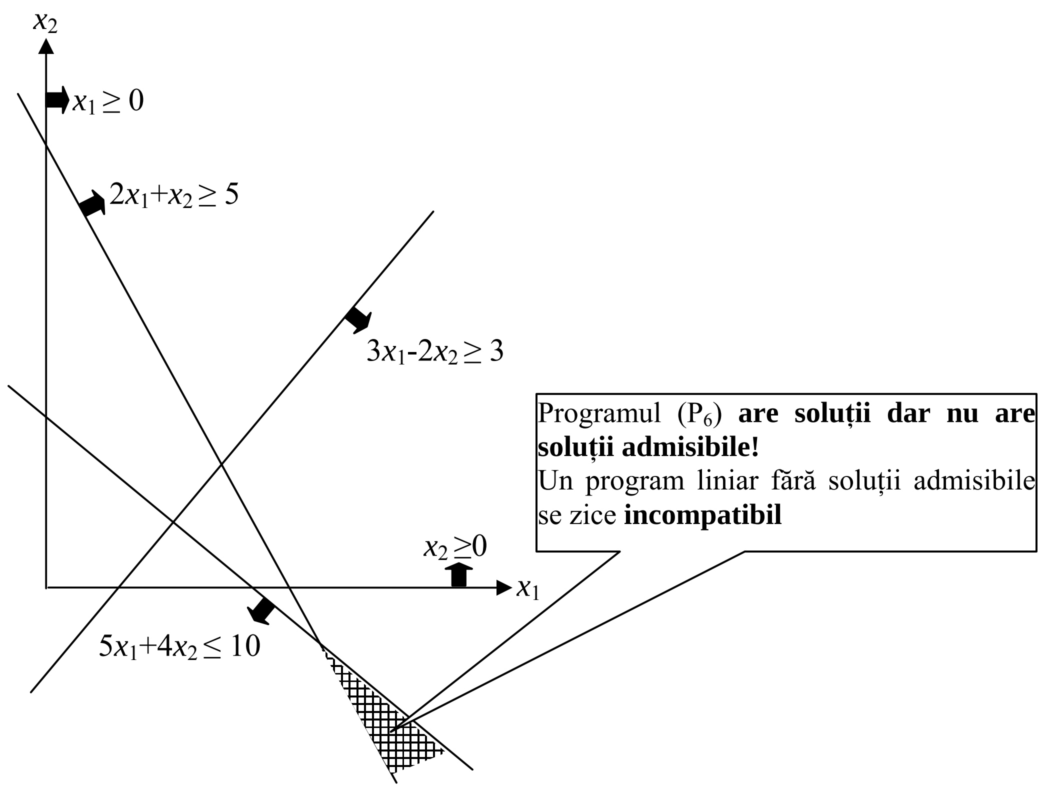


Figura 2.12

semiplane în care sunt verificate restricțiile şi condițiile de nenegativitate. Mulțimea haşurată este formată din punctele ale căror coordonate verifică toate restricțiile programului; aceste puncte reprezintă **soluțiile** programului. Nici una dintre aceste soluții nu verifică simultan ambele condiții de nenegativitate, altfel spus nu este admisibilă. Programul (P_6) **nu are soluții admisibile**; zicem că (P_6) este un **program incompatibil**.

Exemplele studiate mai sus ilustrează următoarea clasificare a programelor liniare după existența soluțiilor admisibile.

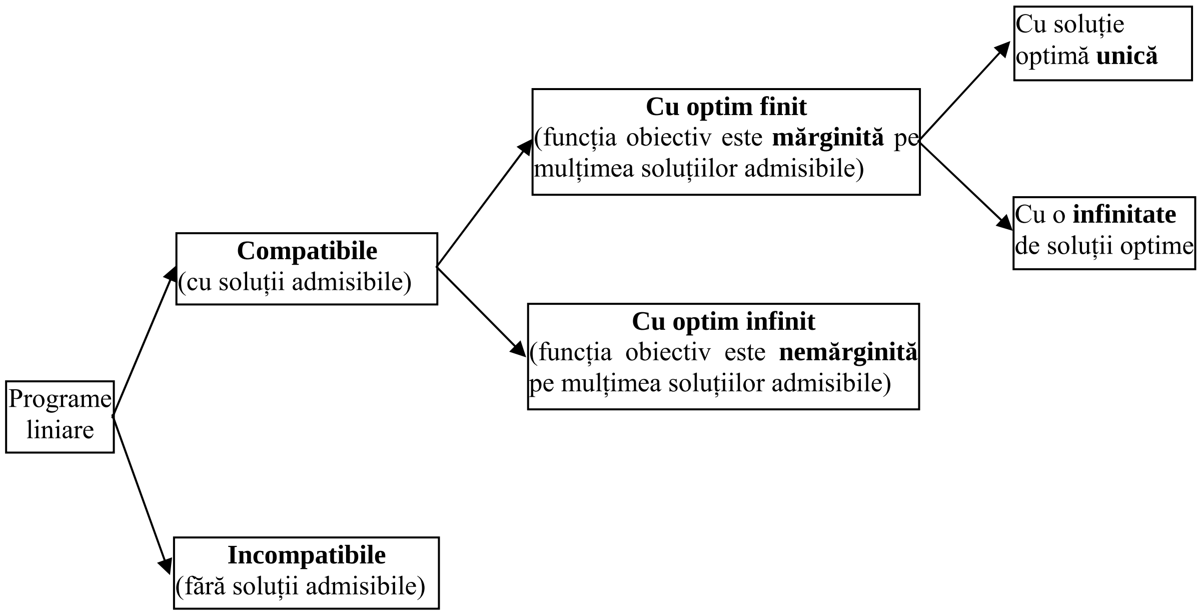


Figura 2.13

Observație importantă: Existența unei soluții optime în cazul în care funcția obiectiv este mărginită pe mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$ este consecința faptului că $\mathcal{A}$ este o mulțime **închisă** în topologia uzuală a spațiului numeric R^n (≡își conține frontiera). Faptul că $\mathcal{A}$ este închisă rezultă din cerința ca toate restricțiile inegalități să fie **nestricte**!!
De exemplu, funcția $f(x) = 3x$ este mărginită superior pe mulțimea $\mathcal{A} = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ - care nu este închisă - însă $\max\{f(x), x \in \mathcal{A}\}$ nu există: singurul candidat ar fi $x^* = 1$ dar $1 \notin \mathcal{A}$!

Următoarele concluzii sunt valabile pentru orice program liniar compatibil în două sau trei variabile – mulțimea soluțiilor admisibile $\mathcal{A}$ putând fi „vizualizată” în „planul” R^2 sau „spațiul fizic” R^3:

- **Mulțimea $\mathcal{A}$ este convexă, adică cu două puncte conține și segmentul care unește punctele. O consecință intuitivă a acestei proprietăți este că soluția optimă, dacă există, se găsește „undeva” pe frontiera lui $\mathcal{A}$.**
- **Frontiera mulțimii $\mathcal{A}$ are un număr finit de vârfuri și dacă programul are soluții optime cel puțin una dintre ele se găsește într-un vârf.**

Aceste afirmații constituie sursa întregii teorii a programării liniare deoarece sunt valabile pentru orice program liniar, bineînțeles cu condiția generalizării corespunzătoare a termenilor geometrici utilizați în formulare.

2.4 Forme speciale de prezentare a unui program liniar

Într-un program liniar se pot întâlni restricții de toate tipurile, egalități şi inegalități, acestea din urmă putând fi de sensuri contrare. Studiul teoretic a impus forme speciale de prezentare, mai simple, în care toate restricțiile au „aceeaşi formă”:

- **forma canonică**, în care toate restricțiile sunt inegalități cu acelaşi sens;
- **forma standard**, în care toate restricțiile sunt egalități.

Orice program liniar poate fi adus la una din aceste forme fără „alterarea” mulțimii soluțiilor admisibile şi nici a soluțiilor sale optime!

1) Forma canonică a unei probleme de programare liniară

O restricție a unui program liniar (P) se zice **concordantă** dacă este o **inegalitate** de tipul "≤" când funcția obiectiv se **maximizează** şi de tipul "≥" când funcția obiectiv se **minimizează**. O restricție **inegalitate** care nu este concordantă se va numi **neconcordantă**. Restricțiile egalități nu fac obiectul acestei clasificări.

Spunem că o problemă de programare liniară este în **formă canonică** dacă toate restricțiile ei sunt **inegalități concordante**.

În consecință, o problemă în **formă canonică de maximizare** arată astfel:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0 & j = 1,\dots,n \\ (\max) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \quad \text{sau matricial} \quad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ (\max) f = cx \end{cases} \quad \text{unde:}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

O problemă în **formă canonică de minimizare** se va scrie:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \\ x_j \geq 0 \\ (\min) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ (\min) f = cx \end{cases}$$

Orice problemă de programare liniară se poate pune sub o formă canonică de maximizare sau minimizare, **fără modificarea mulțimii soluțiilor admisibile**, observând că:

- **o egalitate se poate înlocui cu două inegalități de sens contrar;**
- **o restricție neconcordantă devine concordantă prin înmulțire cu -1;**
- **putem schimba sensul optimizării funcției obiectiv, grație formulei generale:**

$$\min_{x \in \mathcal{A}} f(x) = -\max_{x \in \mathcal{A}} \left[-f(x) \right] \tag{1}$$

În consecință, putem face anumite raționamente teoretice pe o formă canonică, ca de exemplu în **teoria dualității liniare**, fără ca prin aceasta să restrângem generalitatea.

Exemplul 2.1 de aducere a unui program liniar la o formă canonică:

$$\begin{array}{l} (\max) f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (\min)(-f) = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -3 \\ 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ -2x_1 - x_3 \geq -10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Programul (P) — Forma canonică de minimizare a programului (P)

2) Forma standard a unei probleme de programare liniară

Spunem că o problemă de programare liniară este în **formă standard** dacă toate restricțiile ei sunt **egalități**. Importanța acestei forme particulare rezultă din faptul că metoda de rezolvare a problemelor de programare liniară care va fi expusă mai departe cere ca problema să fie în această prezentare.

În consecință, o problemă (P) care are şi restricții inegalități va fi înlocuită - în vederea rezolvării ei - cu o alta în care toate restricțiile sunt egalități.

Noua problemă, numită **forma standard a problemei** (P) şi notată (**FSP**), se construieşte astfel:

- **O restricție inegalitate din problema originală (P) de tipul "≤" (respectiv de tipul "≥") se transformă în egalitate prin adăugarea (respectiv prin scăderea) unei variabile nenegative din membrul său stâng.**
- **Restricțiile inegalități nu se modifică.**
- **Noile variabile introduse nu apar în funcția obiectiv a problemei originale (alternativ, spunem că ele apar cu coeficienți nuli)**

Variabilele introduse în restricțiile inegalități în scopul transformării acestora în egalități poartă numele de **variabile de abatere**.

Exemplul 2.2 de aducere a unui program liniar la forma standard.

$$(P)\quad \begin{array}{l} (\max) f = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow (FSP) \quad \begin{array}{l} (\max) f = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 9 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,5 \end{array}$$

Problema care apare în acest context este aceea de a explica modul în care se obține soluția optimă a problemei (P) dacă se cunoaşte soluția optimă a formei sale standard (FSP).
Se poate arăta uşor că între mulțimile de soluții admisibile $\mathcal{A}_P$,ale problemei (P) şi $\mathcal{A}_{FSP}$, ale problemei (FSP), există o **corespondență bijectivă care conservă soluțiile optime**. Vom arăta cum funcționează această corespondență pe exemplul precedent.

Notând-o cu Φ, aceasta va asocia unei soluții admisibile $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ a problemei (P) vectorul:

$$\Phi(\overline{x}) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, 5\overline{x}_1 + 2\overline{x}_2 - \overline{x}_3 - 4, 9 - \overline{x}_1 - 2\overline{x}_2 - 3\overline{x}_3)$$

care prin construcție se dovedeşte a fi o soluție admisibilă a problemei (FSP). Reciproc, unei soluții admisibile $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4, \widetilde{x}_5)$ a problemei (FSP) corespondența inversă Φ^{-1} îi asociază vectorul $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3)$ care satisface restricțiile problemei originale (P) deoarece $\widetilde{x}_4 \geq 0, \widetilde{x}_5 \geq 0$.Dacă $\overline{x}$ este soluția optimă a problemei (P) atunci $\Phi(\overline{x})$ este soluția optimă a problemei (FSP) şi reciproc, dacă cunoaştem soluția optimă $\widetilde{x}$ a problemei (FSP) , $\Phi^{-1}(\widetilde{x})$ reprezintă soluția optimă a problemei (P).

În problemele concrete, variabilele de abatere au interpretări economice precise ca de exemplu cantități de resurse neutilizate sau depăşiri ale unor indicatori economici aşa că în analiza soluției optime valorile lor vor fi luate în considerare laolaltă cu valorile variabilelor originale.

Exemplul 2.3 Reluăm modelul problemei firmei de calculatoare (rezolvat grafic în secțiunea 2.2) împreună cu forma sa standard:

$$(P)\quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (FSP)\quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 150 \\ x_2 + x_4 = 20 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_5 = 300 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, 5 \\ (\max) f = 50x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \end{cases}$$

Conținutul economic al variabilelor de abatere x_3, x_4, x_5 derivă nemijlocit din semnificațiile restricțiilor în care sunt introduse. Astfel:

$$x_3 = \underbrace{150}_{\text{Fondul de timp disponibil pentru asamblare}} - \underbrace{(3x_1 + 5x_2)}_{\text{Necesarul de timp pentru asamblarea cantităților } x_1,\, x_2 \text{ de produse finite}} \equiv \text{Fondul de timp pentru asamblare neutilizat}$$

Analog:

$$x_4 = 20 - x_2 \equiv \text{monitoare } PC_2 \textbf{ rămase în stoc}$$

$$x_5 = 300 - (8x_1 + 5x_2) \equiv \text{spațiul de depozitare } \textbf{nefolosit}$$

Știind că:

$$x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 8 \quad x_5^* = 0 \quad (\max) f = 1980$$

este soluția optimă a formei standard, cuplul $x_1^* = 30 \quad x_2^* = 12$ reprezintă soluția optimă a programului original (P) iar 1980 este valoarea maximă a funcției obiectiv. În termeni economici , programul optim de activitate al firmei pentru următoarea săptămână ar consta în asamblarea a 30 unități PC_1 şi a 12 unități PC_2 cu un profit maxim de $1980. În plus $x_3^* = 0$ şi $x_5^* = 0$ arată că acest program ar utiliza integral fondul de timp pentru asamblare şi spațiul de depozitare în timp ce $x_4^* = 8$ arată că în stoc ar mai rămâne 8 monitoare PC_2 ce ar putea fi folosite în altă perioadă de planificare.

Probleme propuse

1. Să se reprezinte grafic mulțimea soluțiilor admisibile ale programului liniar:

$$(P_1)\quad \begin{cases} (\max) f = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) să se determine grafic soluția optimă a programului (P_1);
b) care va fi soluția optimă dacă funcția obiectiv se schimbă în $(\max) g = x_1 + 2x_2$

2. Să se reprezinte grafic mulțimea soluțiilor admisibile ale programului liniar:

$$
(P_2)\quad
\begin{aligned}
&(\min) f = 5x_1 + 2x_2 \\
&x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
&-2x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) să se determine grafic soluția optimă a programului (P_2);
b) care va fi soluția optimă dacă funcția obiectiv se schimbă în $(\min) g = 3x_1 + 6x_2$

3. Să se reprezinte grafic mulțimea soluțiilor admisibile ale programului liniar:

$$
(P_3)\quad
\begin{aligned}
&(\max) f = x_1 + x_2 \\
&-3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
&-2x_1 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 - 2x_2 \leq 6 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) să se determine grafic soluția optimă a programului (P_3);
b) care va fi soluția optimă dacă funcția obiectiv se schimbă în $(\max) g = -x_1 + x_2$

4. Determinați pe cale grafică soluțiile optime ale programelor liniare rezultate din modelarea problemelor 1 şi 2 din secțiunea „Probleme propuse" a unității de învățare 1. Interpretați economic soluțiile găsite.

5. Rezolvați pe cale grafică programul liniar:

$$
\begin{aligned}
&(\max) f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\
&x_1 + x_2 \geq 3 \\
&x_1 - x_2 \geq 1 \\
&x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
&\qquad\qquad -x_3 + 2x_4 \leq 2 \\
&\qquad\qquad 2x_3 - x_4 \leq 2 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$