CAPITOLUL 3

Jocuri dinamice în informație completă

3.1. Jocuri dinamice în informație completă şi perfectă

3.1.1. Introducere

Un joc dinamic este acel joc în care alegerile jucătorilor sunt efectuate la diverse momente de timp.

Un exemplu clasic pentru asemenea jocuri este aşa numitul „joc al grenadei”. Iată în ce constă acesta: un individ care are în mână o grenadă îi spune unui al doilea: daca nu îmi dai 1 milion de USD voi detona grenada şi vom muri împreună. În aceste condiții celalalt jucător poate fie să-i dea banii, fie să nu îi dea, riscând ca celălalt să detoneze grenada.

În acest joc vedem că există trei momente în care se fac alegerile jucătorilor, şi anume: amenințarea primului jucător, apoi decizia celui de-al doilea de a da sau de a nu da banii şi în sfârşit decizia celui cu grenada de a o detona sau nu.

Definiția 3.1. Vom numi *istorie a jocului* h^{t+1} la momentul *t+1* (sau în etapa *t+1*) secvența de decizie pe care au luat-o jucătorii în cele *t* etape anterioare ale jocului.

$$h^{t+1} = (s^0, s^1, \ldots, s^t)$$

În aceste condiții vom defini mulțimea acțiunilor posibile pentru jucătorul *i* ca fiind:

Definiția 3.2. Vom numi *acțiune fezabilă* a jucătorului *i* la momentul (etapa) *t+1* acea acțiune ce poate fi aleasă de jucătorul *i* din mulțimea acțiunilor pe care le are la dispoziție. Vom nota mulțimea acțiunilor posibile (fezabile) a jucătorului *i* la momentul *t+1* cu $A_i(h^{t+1})$.

Definiție 3.3. Vom numi *strategie pură* a jucătorului *i* un plan al acțiunilor pe care le va juca jucătorul în fiecare etapa *t*.

Dacă vom nota cu H^t mulțimea istoriilor jocului la momentul *t,* atunci $A_i(H^t) = \bigcup_{h^t \in H^t} A_i(h^t)$.

Definiția 3.4. Vom numi funcție de câştig a jucătorului *i* aplicația $U_i : H_i^{t+1} \to R$, $u_i(s_i, s_{-i}) : H_i^{t+1} \to R$.

Definiția 3.5. Un echilibru Nash în strategii pure pentru jocul dinamic $G_i = (S_i, u_i)$ va fi acea strategie care respectă condiția $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$ $\forall s_i^{'} \in S_i$ (cu alte cuvinte cea mai bună alegere posibilă a jucătorului *i* indiferent de alegerile celorlalți jucători).

Definiție 3.6. Vom numi *joc sub formă extinsă* acel joc dinamic în care se cunosc:

a) mulțimea jucătorilor;
b) mulțimea strategiilor fiecărui jucător;
c) ordinea în care jucătorii iau deciziile;

d) funcţiile de câştig ale jucătorilor.

Reprezentarea grafică a jucătorilor sub forma extinsă se face sub forma unui graf de tip arbore.

În acest graf vom avea următoarele elemente:

- nodurile grafului sunt momentele la care jucătorii aleg o strategie posibilă;
- arcele grafului reprezintă acţiunile alese ale jucătorilor;
- nodul iniţial reprezintă momentul de început al jocului;
- nodurile finale indică sfârşitul jocului şi în dreptul lor sunt specificate câştigurile jucătorilor.

De exemplu, reprezentând sub forma extinsă jocul grenadei obţinem:

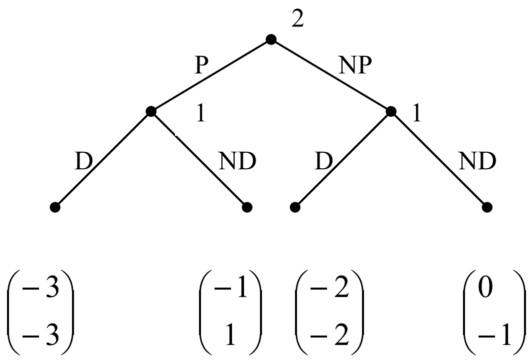

Figura 3.1

Observaţie Vom presupune că graful ce descrie forma extinsă a jocului nu conţine cicluri şi duble precedenţe, cu alte cuvinte se poate defini o relaţie de ordine parţială pe acest graf: „x • y” care înseamnă „nodul lui x este înaintea nodului y”.

Definiţia 3.7. Vom numi „*cale*” a jocului mulţimea nodurilor şi arcelor ce conduc din nodul iniţial într-un nod final.

Observaţie O „cale” a jocului poate fi identificată cu istoria finală a acestuia.

Definiţia 3.8. Vom numi *joc în informaţie perfectă* acel joc în care toţi jucătorii ştiu la orice moment t ce decizii s-au luat în etapa anterioară (la momentul $t-1$).

Definiţia 3.9. Vom numi joc cu *memorie perfectă* (perfect recall) acel joc în care toţi jucătorii ştiu istoria jocului de la momentul 0 până la momentul t.

Definiţia 3.10. Vom numi *echilibru perfect în subjoc* (subgame perfect equilibrium) o strategie s care, pentru orice istorie h^t, $S(h^t)$ din $G(h^t)$ este un echilibru Nash al lui $G(h^t)$.

3.1.2. Determinarea echilibrului prin algoritmul inducţiei recursive (backward induction).

Fie un joc dinamic cu doi jucători, două etape, iar mulţimile strategiilor jucătorilor sunt S_1 şi S_2, iar funcţiile de câştig sunt U_1 şi U_2.

Desfăşurarea jocului este următoarea:

Jucătorul 1 alege acţiunea a_1 din S_1 în prima etapă. În etapa a doua jucătorul 2 observă alegerea jucătorului 1, deci pe a_1 şi alege acţiunea sa a_2 din S_2, după care jocul ia sfârşit. În acest moment câştigurile jucătorilor vor fi $u_1(a_1,a_2)$ respectiv $u_2(a_1,a_2)$.

Pentru jocul descris anterior vom formula algoritmul inducţiei recursive. Acest algoritm porneşte de la principiul că, la ultima etapă a jocului, jucătorul care urmează să decidă ştie deja care au fost strategiile alese de ceilalţi deci în consecinţă va alege acea acţiune care să îi maximizeze câştigul.

Etapa 1. Jucătorul 2, observa alegerea jucătorului 1 şi caută acţiunea care să îi maximizeze câştigul:

$$R_2(a_1) = arg \max_{a_2 \in S_2} u_2(a_1, a_2)$$

Aceasta constituie funcţia de reacţie (funcţia celui mai bun răspuns) a jucătorului 2 în raport cu acţiunea aleasă de jucătorul 1.

Etapa 2. Jucătorul 1 ştie că jucătorul 2 va juca $R_2(a_1)$ şi prin urmare va caută să-şi maximizeze câştigul prin alegerea strategiei:

$$a_1^* = arg \max_{a_1 \in S_1} u_2(a_1, R_2(a_1))$$

3.1.3. Duopolul Stackelberg

Pe piaţa unui produs există doi producători, firma 1 şi respectiv firma 2. Strategiile posibile pentru cele două firme sunt cantităţile produse, q_1 respectiv q_2, pozitive. Funcţiile de câştig sunt date de profiturile firmelor. Desfăşurarea jocului este următoarea: firma 1 alege cantitatea pe care o produce şi o trimite pe piaţa. Firma 2 observă cantitatea produsă de firma 1 şi îşi stabileşte la rândul ei producţia q_2 căutând să maximizeze profitul.

Ambele firme au costuri marginale (şi medii) egale, de valoare c. Funcţia de cerere inversă este:

$$P(Q) = a - Q \text{, unde } Q = q_1 + q_2 .$$

Se cere să se determine echilibrul acestui joc.

Rezolvare

Sub forma extinsă, jocul are următoarea descriere:

1. firma 1 alege cantitatea produsă $q_1 \geq 0$ (acţiunea a_1).
2. firma 2 observă cantitatea produsă de firma 1, şi alege cantitatea produsă $q_2 \geq 0$ (acţiunea a_2).
3. jocul ia sfârşit, funcţiile de câştig ale celor 2 firme fiind nivelurile profiturilor, $\pi_i(q_i, q_j) = q_i(P(Q) - c)$, $i = 1{,}2$ cu $P(Q) = a - Q$, unde $Q = q_1 + q_2$.

Determinăm echilibrul prin inducţie recursivă:

Etapa 1 În ultima etapă a jocului, firma 2 observă cantitatea q_1 aleasă de prima firma şi îşi va alege producţia q_2 astfel încât să rezolve problema:

$$R_2(q_1^*) = \arg\max_{q_2} \pi_2(q_1^*, q_2) = q_2(P(q_1^* + q_2) - c).$$

De aici obținem $q_2^* = R_2(q_1^*) = \frac{a-c}{2} - \frac{q_1^*}{2}$ $(*)$.

Etapa 2 Firma 1 ştie că funcția de reacție a firmei 2 este cea din relația (*) şi alege cantitatea produsă q_1^* astfel încât să-şi maximizeze profitul:

$$q_1^* = \arg\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2^*) = \arg\max_{q_1} \left[\left(a - \frac{a-c}{2} - \frac{q_1^*}{2}\right) - c\right] q_1^*$$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{a-c}{2} \Rightarrow q_2^* = \frac{a-c}{4}.$$

Deci echilibrul jocului dinamic determinat prin inducție recursivă este:

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{a-c}{2}, \frac{a-c}{4}\right).$$

Nivelul câştigurilor ce corespund acestor strategii sunt:

$$(\pi_1^*, \pi_2^*) = \left(\frac{(a-c)^2}{8}, \frac{(a-c)^2}{16}\right).$$

Cu alte cuvinte, firma care alege prima strategie va fi avantajată, ea obținând un profit dublu față de cea de-a doua firmă.

În acest caz suplimentul de informație pe care ce-a de-a doua firmă îl are (prin faptul că ştie cantitatea aleasă de prima) se traduce printr-o pierdere de profit (de la $\pi_c = \frac{(a-c)^2}{9}$ la $\pi_s = \frac{(a-c)^2}{16}$). Dacă firma 2 nu ar avea acea informație, atunci jocul s-ar desfăşura ca un joc static, şi de aici profituri egale pentru cele două firme: $\pi_i = \frac{(a-c)^2}{9}$.

3.1.4 Reprezentarea jocurilor dinamice sub formă normală

Jocurile dinamice pot fi reprezentate sub formă normală, prin intermediul formei matriceale, dacă se va construi un plan complet de acțiune în raport cu strategiile care pot fi jucate de către ceilalți jucători. Acest plan este construit ex-ante, adică înainte de începutul jocului. După ce jocul începe vom discuta de istoria jocului.

Exemplu: Se consideră următorul joc descris sub forma extinsă:

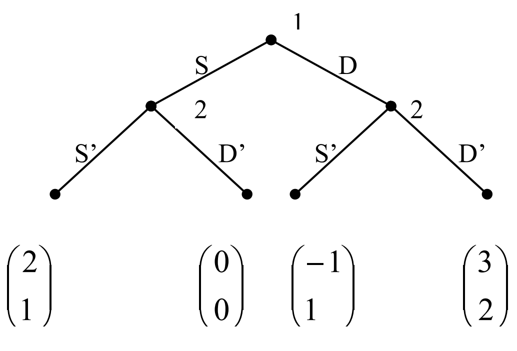

Figura 3.2

Pornind de la forma extinsă vom construi forma normală echivalentă :

		2 (S',S')	(S',D')	(D',S')	(D',D')
1	S	2, 1	2, 1	0, 0	0, 0
	D	-1, 1	3, 2	-1, 1	3, 2

Figura 3.3

Aceasta formă normală se construieşte ca un plan complet de acțiune posibil în raport cu alegerile jucătorilor. (De exemplu, dacă jucătorul 1 alege strategia stânga (S), atunci jucătorul 2 poate alege S' sau D', dar neştiind ce a ales jucătorul 1, se gândeşte la 4 variante de câştig posibile, în raport cu ce ar fi putut juca primul jucător).

Pentru această formă putem determina echilibrul prin algoritmii descrişi în capitolul anterior. Astfel, jocul descris în figura 3.3 are un unic echilibru în strategii pure, şi anume *(D,D').*

Acelaşi echilibru rezultă şi în cazul în care aplicăm algoritmul inducției recursive.

3.2. Jocuri dinamice în informație imperfectă

3.2.1. jocuri dinamice în informație imperfectă

Jocurile dinamice în informație imperfectă sunt acele jocuri în care jucătorii (unul sau mai mulți) nu cunosc istoria jocului (sau o etapa a acesteia).

Să reluăm jocul de la exemplul anterior, de acestă dată în informație imperfectă. (figura 3.4)

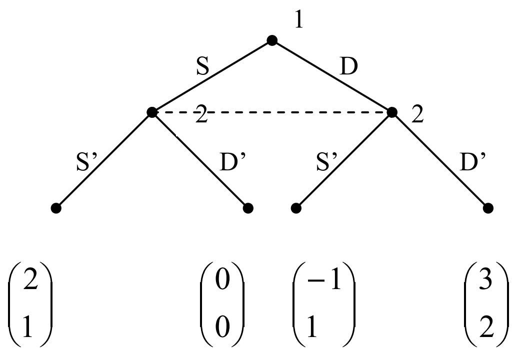

Figura 3.4

Observație Linia punctată din dreptul jucătorului 2 indică faptul că jucătorul 2 nu ştie care a fost strategia aleasă de jucătorul 1 (S sau D) în prima etapă a jocului. Aceasta situație poate fi considerată echivalentă cu faptul că jucătorul 2 alege simultan cu primul jucător strategia.

În acest caz putem reprezenta sub formă normală jocul în informație imperfectă, respectiv sub formă matriceală, ca în figura 3.5:

		2 *S'*	*D'*
1	*S*	2,1	0,0
	D	-1,1	3,2

Figura 3.5

În acest caz jocul are două echilibre, şi anume (S, S'), respectiv (D,D'). Totuşi, echilibrul (S,S') nu este credibil deoarece (D,D') aduce cîştiguri mai mari ambilor jucători.

3.2.2 Echivalenţa strategiilor pure cu cele mixte

Definiţia 3.11 Două strategii pure s_i şi s'_i sunt echivalente dacă au aceeaşi distribuţie de probabilitate oricare ar fi strategiile pure ale adversarilor.

Exemplu Se consideră jocul sub formă extinsă :

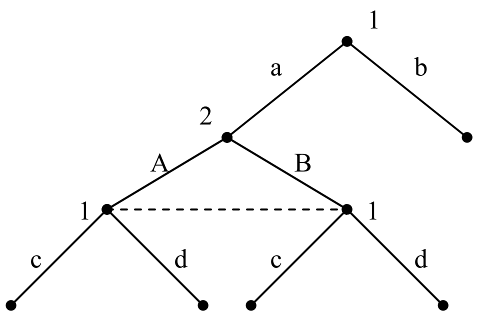

Figura 3.6

Pentru jucătorul 1, strategiile (b,c) şi respectiv (b,d) sunt echivalente deoarece probabilitatea de a fi jucate este zero.

Definiţia 3.12 Vom numi forma strategică redusă (sau forma normală redusă) a unui joc sub forma extinsă acel joc în care s-au păstrat doar clasele de strategii echivalente (se păstrează doar un singur membru al fiecărei clase de echivalenţă).

Analog modului în care am definit strategiile mixte pentru jocurile statice, le vom defini şi pentru jocurile dinamice.

Luce şi Raiffa (1987) au făcut următoarea analogie pentru a explica relaţiile dintre strategiile mixte şi cele pure (sau de comportament): o strategie pură este o carte de instrucţiuni, în această carte se specifică la fiecare pagină modul în care se va juca dacă avem anumite informaţii. Spaţiul strategiilor este mulţimea cărţilor din bibliotecă.

O strategie mixtă este o distribuţie de probabilitate asupra cărţilor din bibliotecă, adică un mod aleator de a selecta o carte.

În condiţiile unor jocuri în informaţie perfectă (perfect recall) strategiile mixte şi cele pure (comportamentale) sunt echivalente.

Vom demonstra că orice strategie mixtă p_i a unei forme strategice generează o strategie pură unică s_i astfel :

Fie $R_i(h_i)$ mulţimea strategiilor pure ale jucătorului i ce preced h_i, atunci $(\forall)\ s_i \in R_i(h_i)$ există un profil s_{-i} de strategii asociate h_i.

Vom avea : $s_i(a_i/h_i) = \sum_{\substack{a_i \in R_i(h_i) \\ s_i(a_i)=a_i}} P_i(s_i) \Big/ \sum_{s_i \in R_i(h_i)} P_i(s_i)$.

Dacă p_i asociază probabilitatea 0 (zero) pentru $(\forall)\ s_i \in R_i(h_i)$ atunci:

$$s_i(a_i/h_i) = \sum_{\{s_i(h_i)=a_i\}} P_i(s_i).$$

Cum $s_i(\bullet/\bullet)$ este nenegativă, atunci $\sum_{a\in S(h_i)} s_i(a_i/h_i)=1$ deoarece fiecare s_i indică acţiune pentru jucătorul *i*.

Exemplu Fie jocul sub forma extinsă din figura 3.7:

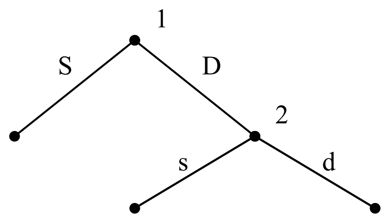

Figura 3.7

Şi istoriile : h_0 : (S)
h_1 : (D,d)

Fie $p_1=(1/2(S,s);1/2(D,d))$, condiţionat de faptul că se cunoaşte istoria h_1.
Aceasta strategie mixtă este echivalentă cu strategia *(D,d),* deoarece strategia jucată în cazul istoriei h_1 va fi *d* cu probabilitatea 1, adică $(s,d)\in R_1(h_1^{'})$.

Ceea ce am arătat până aici este sintetizat de următoarea teoremă:

Teorema Kuhn
Într-un joc dinamic în informaţie perfectă strategiile mixte şi strategiile pure sunt echivalente (sau altfel spus, fiecare strategie mixtă are echivalentă o unică strategie pură, sau fiecare strategie pură este echivalentă cu fiecare strategie mixtă generată de aceasta).

Observaţie Mai multe strategii mixte pot genera aceeaşi strategie pură.

Exemplu Se consideră jocul sub forma extinsă:

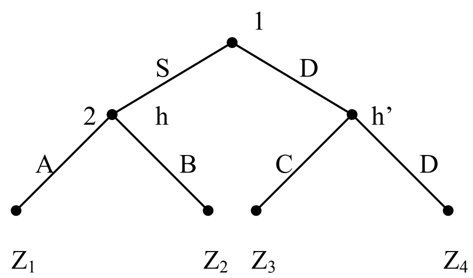

Figura 3.8

Fie $S_2=\{A,B,C,D\}$ mulţimea strategiilor jucătorului *2* şi

$$\left.\begin{array}{lcl} S_2 & = & (A,C) \\ S_2' & = & (A,D) \\ S_2'' & = & (B,C) \\ S_2''' & = & (B,D) \end{array}\right\} \text{- strategii pure}$$

Fie strategiile mixte $s_3=(\frac14, \frac14, \frac14, \frac14)$ şi $s_4=(\frac12, 0, 0, \frac12)$

Atunci:

$p_2(A/h) = p_2(B/h) = ½$

$P_2(C/h') = P_2(D/h') = ½$.

Deci, s_3 şi s_4 sunt echivalente.

3.2.3. Dominanță strictă şi echilibru Nash în jocurile dinamice

Se consideră jocul sub forma extinsă, în care:

$S_1=\{A,B\}$

$S_2=\{C,D\}$

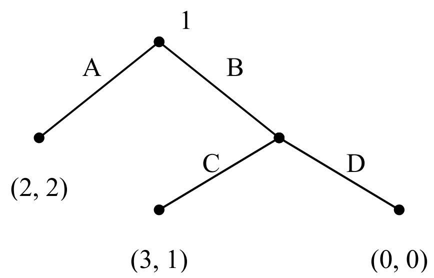

Figura 3.9

Reprezentarea acestui joc sub forma normală este:

		2: *C*	*D*
1	*A*	2, 2	2, 2
	B	3, 1	0, 0

Figura 3.10

Observăm că pentru jucătorul 2 strategia *C* nu domină strict strategia *D* $(2,1) \succ (2,0)$. De aici apare pentru jucătorul 2 posibilitatea de „amenințare”: dacă 1 nu joaca *A*, atunci 2 va juca *D*.
Acest joc, observăm că are două echilibre în strategii pure, şi anume *(A,D)* respectiv *(B,C)*.
Pentru a determina echilibrele unui joc dinamic vom utiliza teorema Zermelo – Kuhn:

Teorema Zermelo – Kuhn

Un joc finit în informație perfectă are un echilibru Nash în strategii pure.

Demonstrația acestei teoreme se face pe baza algoritmului lui Zermelo care este o generalizare a inducției recursive cu mai mulți jucători (pe baza programării dinamice).

Cum jocul este finit, există o mulțime de noduri „penultime”, adică anterioare nodurilor terminale. În aceste noduri se determină câştigurile maxime pe care le pot avea jucătorii ce trebuie să joace în acel moment.

De aici vom avansa în sens invers în cadrul arborelui până la nodul inițial, pentru care vom determina strategia de echilibru. Se verifică uşor că această strategie este un echilibru Nash al jocului dinamic.

Observaţie Dacă vom slăbi condiţiile teoremei, atunci algoritmul lui Zermelo nu mai este eficient. De exemplu, pentru jocurile infinite sau pentru jocurile cu strategii nestrict dominate nu se poate determina echilibrul pornind de la acest algoritm.

3.2.4. Echilibrul perfect în subjoc

Definiţia 3.13 Vom numi subjoc propriu *G* al unui joc sub formă extinsă *T* secvenţa de noduri şi arce ce încep dintr-un nod unic şi se continuă cu toţi succesorii acelui nod (un subarbore al arborelui iniţial).

Definiţie 3.14 Vom numi *echilibru perfect în subjoc* acea strategie *p* a jocului *G* care este echilibru Nash al oricărui subjoc propriu al lui *G*.

Observaţii

1. Cum orice joc poate fi privit ca propriul sau subjoc, un echilibru perfect al subjocului este în mod necesar un echilibru Nash.
2. Echilibru perfect al subjocului este – în cazul jocurilor finite – acelaşi cu cel determinat prin algoritmul inducţiei recursive.

Critici la adresa inducţiei recursive

Exemplu 1 Se consideră jocul cu n jucători descris sub forma extinsă în figura 3.11:

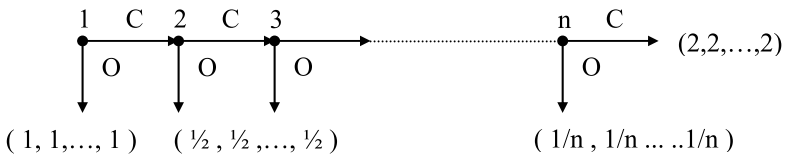

Figura 3.11

Strategia *C* înseamnă continuare din partea fiecărui jucător *i*, iar *O* strategia de oprire a jocului.

Fie *p* probabilitatea ca fiecare jucător să joace strategia *C*.

Aplicând algoritmul inducţiei recursive obţinem soluţia *(C,C,...,C)*.

Totuşi, probabilitatea cu care priveşte jucătorul *1* sau *2* posibilitatea ca jocul să continue prin continuarea până la sfârşit este p^{n-1} respectiv p^{n-2}. Cum $p \in (0,1)$, $p^{n-1} \to 0$, adică probabilitatea cu care crede jucătorul 1 că se va ajunge la sfârşitul jocului tinde la zero, deci apare credinţa că un alt jucător poate opri jocul înainte de final cu o probabilitate tinzând la 1.

Exemplu 2 *Centipedul lui Rosenthal*

Se consideră jocul sub forma extinsă (în 100 etape) descris în figura de mai jos, în care strategiile sunt C = continuă, O = opreşte jocul.

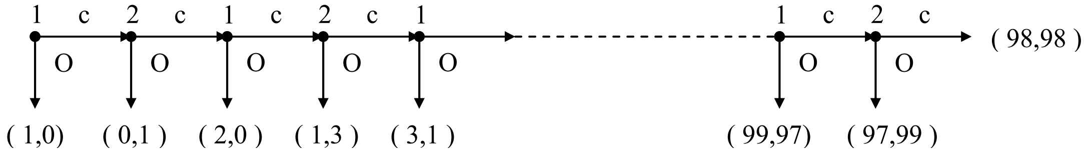

Figura 3.12

Prin inducţie recursivă rezultă că echilibrul acestui joc va fi oprirea jocului de la prima etapă.

Această ipoteză apare în realitate puţin probabilă, deoarece pentru orice nivel de aşteptare (şi încredere) suplimentare fiecare din cei doi jucători va câştiga mai mult.

Exemplu 3 Fie un joc sub forma extinsă descris în figura 3.13.

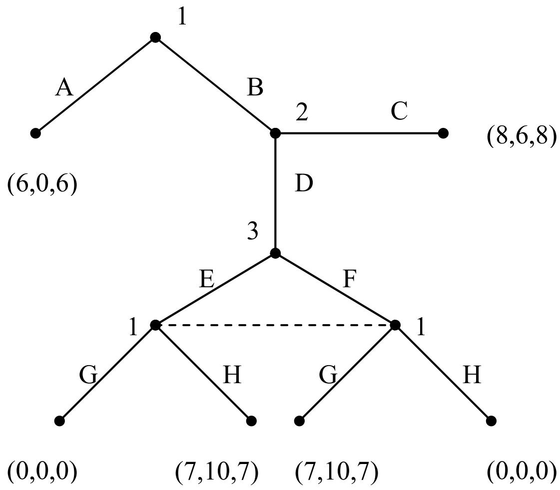

Figura 3.13

Acest joc are trei echilibre în strategii pure, respectiv (B,D,E,H) ; (B,D,F,G) şi un echilibru în strategii mixte (½ (B,D,E,H); ½ (B,D,F,G)).

Această situaţie nu poate fi rezolvată prin intermediul algoritmului inducţiei recursive sau prin teorema Zermelo, deoarece echilibrul perfect în subjoc nu poate fi definit în strategii mixte.

3.3. Jocuri repetate

3.3.1. Introducere

O categorie specială o reprezintă jocurile repetate.

Definiţia 3.15 Vom numi *joc-etapă* acea secvenţă de decizii (statică sau dinamică) ce se repetă de un număr T de ori (T eventual infinit).

Jocurile pot fi finit sau infinit repetate, în raport cu orizontul T în care se desfăşoară jocul.

În continuare vom defini elementele fundamentale ale acestor tipuri de jocuri:

- Vom nota cu $G=(xA_i, U)$ jocul-etapă şi

  A_i spaţiul distribuţiilor de probabilitate asupra acţiunilor A_i ale jucătorului i;

- Jocurile se desfăşoară în informaţie perfectă şi completă, respectiv la sfârşitul fiecărei etape orice jucător ştie istoria jocului şi câştigurile obţinute.

- Vom nota cu $a^t = (a_1^t, a_2^t, ... a_n^t)$ acţiunile alese de cei n jucători la momentul t, şi atunci istoria jocului va fi $h^t = (a^0, a^1, ...a^{t-1})$.
- O strategie pură în jocurile repetate este reprezentată de o secvenţă de strategii pure ale jocului-etapă, de la început până la sfârşitul jocului.
- O strategie mixtă P_i va fi descrisă de o secvenţă de strategii mixte $\alpha_i \in \Lambda_i$.
- Funcţiile de câştig vor fi descrise prin:

$$U_i = E_p (1-\delta) \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i (p^t (h^t)) \text{ - pentru jocuri infinit repetate}$$

$$U_i = E_p \frac{1-\delta}{1-\delta^{T+1}} \sum_{t=0}^{T} \delta^t u_i (p^t (h^t)) \text{ - pentru jocuri finit repetate, unde:}$$

E_p = câştigul aşteptat de strategia p;
δ = factor de actualizare intertemporală (factor de discont);
δ = 0 – reprezintă jucătorii ce nu au răbdare să continue jocul şi se opresc după prima etapă;
δ = 1 – reprezintă jucătorii perfect răbdători, pentru care câştigurile fiecărei perioade sunt echivalente.

- Criteriul urmat de jucători în alegerea strategiilor este maximizarea câştigului mediu (aşteptat) pe unitatea de timp, respectiv:

$$\max \liminf_{T\to\infty} E(1/T) \sum_{t=0}^{T} u_i (p^t (h^t))$$

Pentru jocurile finit repetate soluţia poate fi determinată prin algoritmul inducţiei recursive, iar acest algoritm arată faptul că echilibrul Nash al jocului finit repetat este repetarea în fiecare etapă a echilibrului Nash al jocului etapă.

3.3.2. Modelul de negociere Rubinstein – Stahl

În 1982 Rubinstein şi Stahl au propus următorul joc:
Doi jucători doresc să împartă suma de 1 milion de dolari. Jocul este dinamic, infinit repetat şi se desfăşoară astfel:

- În perioadele pare, jucătorul 1 propune o împărţire a sumei în proporţia x, respectiv $1-x$ pentru jucătorul 2;
- În perioadele impare, jucătorul 2 primeşte propunerea jucătorului 1, o analizează, şi fie o acceptă fie o respinge. În cazul în care o va respinge, atunci va face la rândul său o propunere de împărţire a sumei $(x, 1-x)$.

În cazul acestui joc dinamic avem informaţie perfectă deoarece jucătorii ştiu istoria jocului în fiecare moment. Câştigurile jucătorilor vor fi la momentul t, în cazul în care jocul ia sfârşit, de $(\delta^t; x, \delta_2^t (1-x))$.

Echilibrul perfect în subjoc

Observăm că avem un număr mare de echilibre Nash în acest joc. De exemplu strategia: "jucătorul 1 cere $x = 1$ şi refuză orice altă împărțire", respectiv "jucătorul 2 oferă $x=1$ şi acceptă orice ofertă" este un echilibru Nash.

Totuşi, acest echilibru Nash nu este un echilibru perfect în subjoc. Dacă jucătorul 2 refuză oferta jucătorului 1 în a doua etapă, şi oferă la rândul său $x > \delta$, atunci jucătorul 1 trebuie să o accepte deoarece este cel mai bun câştig posibil, deoarece refuzând această ofertă, în etapa următoare va primi (chiar dacă 2 acceptă împărțirea (1,0) doar δ_1^2, care este mai mic decât δ_1).

Un echilibru perfect în subjoc va fi următorul: "jucătorul i va cere proporția $\frac{(1-\delta_j)}{1-\delta_i\delta_j}$ atunci când îşi face oferta şi va accepta orice proporție mai mare sau egală cu $\frac{\delta_i(1-\delta_j)}{1-\delta_i\delta_j}$, respectiv va refuza orice proporție mai mică".

Demonstrație:

Fie $\underline{v_1}$ respectiv $\overline{v_1}$ câştigurile cele mai mici, respectiv cele mai mari pe care le poate obține jucătorul 1 dacă va continua jocul pentru orice echilibru perfect în subjoc dacă începe acesta, şi în mod analog definim aceste câştiguri pentru jucătorul 2, (dacă începe jucătorul 1) $\underline{v_2}$ respectiv $\overline{v_2}$. Vom avea $\underline{w_1}$, $\overline{w_1}$ câştigurile minime, respectiv maxime de continuare a jocului pentru jucătorul 1 dacă va începe jucătorul 2, şi $\underline{w_2}$, $\overline{w_2}$ câştigurile minime (maxime) de continuare pentru jucătorul 2 dacă începe el jocul.

Dacă începe jucătorul 1, atunci 2 va accepta orice ofertă x astfel încât oferta va depăşi $\delta_2\overline{v_2}$, deoarece 2 nu poate aştepta mai mult de $\overline{v_2}$ din continuarea jocului. Deci avem $\underline{v_1} \geq 1-\delta_2\overline{v_2}$.

Simetric, jucătorul 1 va accepta orice ofertă $\delta_1\overline{v_1}$ şi $\underline{v_2} \geq 1-\delta_1\overline{v_1}$.

Dacă 2 nu va oferi niciodată mai mult de $\delta_1\overline{v_1}$, atunci câştigurile jucătorului 1 dacă va continua jocul, atunci când 2 face prima ofertă respectiv $\overline{w_1}$, este cel mult $\delta_1\overline{v_1}$.

Cum 2 poate obține cel puțin $\underline{v_2}$ din continuare - prin a refuza oferta lui 1, atunci 2 va refuza orice ofertă x astfel încât $1-x \leq \delta_2\underline{v_2}$.

De aici, pentru jucătorul 1 avem: $\overline{v_1} \leq max(1-\delta_2\underline{v_2}, \delta_1\overline{w_1}) = max(1-\delta_2\underline{v_2}, \delta_1^2\overline{v_1})$

Dar: $max(1-\delta_2\underline{v_2}, \delta_1^2\overline{v_1}) = 1-\delta_2\underline{v_2}$

deoarece dacă

$$\overline{v_1} \leq \delta_1^2\overline{v_1} = -\overline{v_1} \leq 0, \text{ dar}$$

$$1-\delta_2\underline{v_2} > \delta_1^2\overline{v_1}$$

deoarece nici δ_2 nici $\underline{v_2}$ nu pot fi mai mici ca 1, deci

$$\overline{v_1} \leq 1-\delta_2\underline{v_2}.$$

Simetric, $\overline{v_2} \leq 1-\delta_{12}\underline{v_1}$.

Din inegalităţile anterioare avem:

$$\underline{v_1} \geq 1-\delta_2\underline{v_2} \geq 1-\delta_2(1-\delta_1\underline{v_1}) \text{ sau}$$

$$\underline{v_1} \geq \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2} \text{ şi } \overline{v_1} \leq 1-\delta_2(1-\delta_1\overline{v_1}) \text{ sau}$$

$$\overline{v_1} \leq \frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}.$$

Cum $\overline{v_1} \leq \underline{v_1} \Rightarrow \underline{v_1} = \overline{v_1} = \dfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$.

În mod analog $\underline{v_2} = \overline{v_2} = \dfrac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ iar $\underline{w_1} = \overline{w_1} = \dfrac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$

respectiv $\underline{w_2} = \overline{w_2} = \dfrac{\delta_2(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$.

De aici rezultă că echilibrul perfect în subjoc este unic.

Observaţie

- În condiţiile în care jucătorul 1 va muta primul, atunci acesta este în avantaj. De exemplu, dacă $\delta_1 = \delta_2$, atunci $v_1 = \dfrac{1-\delta}{1-\delta^2} = \dfrac{1}{1+\delta} > \dfrac{1}{2}$, deci 1 poate obţine mai mult de jumătate din câştig.

Totuşi, acest avantaj va dispare dacă perioada în care se joacă jocul va fi relativ mică, deoarece depinde mult de răbdarea jucătorilor. De exemplu, pentru $\delta_1 = e^{-r_1 t}, \delta_2 = e^{-r_2 t}$ cu t durata jocului şi $t \to 0$, r_1 şi r_2 fiind indicatori ai "răbdării" jucătorilor, atunci δ_i este aproximativ $1 - r_i t$ iar v_1 converge către $\dfrac{r_2}{r_1 + r_2}$. Deci pentru $r_1 = r_2$ părţile împărţite de cei 2 jucători vor fi egale.

3.3.3. Jocuri finit repetate

Vom considera următorul exemplu: fie jocul-etapă *G* – dilema prizonierului – şi este repetat de un număr *T* de ori, finit. Jocul finit repetat va fi *G(T).*

		Jucător 2	
		A	*N*
Jucător 1	*A*	-8,-8	-10,0
	N	0,-10	-2,-2

Determinând echilibrul prin inducţie recursivă obţinem: la ultima etapă, ambii jucători vor *acuza* deoarece nu au încredere că jocul ar putea avea o desfăşurare cooperativă (adoptă echilibrul Nash). La penultima etapă, deja se cunoaşte (anticipat) rezultatul ultimei etape, deci jucătorii vor adopta acelaşi comportament, respectiv se vor *acuza* reciproc. Continuând raţionamentul, atingem etapa iniţială a jocului prin determinarea la echilibru în fiecare etapă a echilibrului Nash pentru jocul-etapă. Deci echilibrul jocului finit repetat este repetare de T ori a strategiei *(A, A).*

Propoziţie Dacă jocul-etapă G are un echilibru Nash unic, atunci pentru orice joc finit repetat *G(T)* există un echilibru perfect în subjoc unic: repetarea echilibrului Nash asociat jocului-etapă.

Demonstraţie Prin algoritmul inducţiei recursive, plecând de la ultima etapă se poate atinge pentru orice subjoc propriu repetarea echilibrului Nash al jocului-etapă, aşa cum a fost arătat anterior.

Critici la echilibrul perfect în subjoc

Una dintre problemele care apare la interpretarea acestui rezultat este că acest echilibru nu este credibil. De exemplu, dacă dilema prizonierului se va repeta de trei ori (T=3), atunci avem următoarele: la ultima etapă jucătorii vor alege strategia *(A, A),* dar până atunci, cel puţin o etapă, este mai bine pentru ei să aleagă o strategie de cooperare, respectiv *(N, N).* În cazul în care echilibrul jocului este repetarea strategiei *(A, A)* de trei ori (determinat prin inducţie recursivă), atunci câştigul total al jucătorului i va fi

$$v_i((A,A),(A,A),(A,A)) = (-8) + \delta_i(-8) + \delta_i^2(-8) = (-8)(1+\delta_i+\delta_i^2) = (-8)\frac{1-\delta_i^3}{1-\delta_i}$$

Dacă cel puţin prima etapă jucătorii vor coopera, respectiv vor alege strategia de a *nega* amândoi *(N,N),* atunci câştigurile vor fi:

$$v_i'((N,N),(A,A),(A,A)) = (-2) + \delta_i(-8) + \delta_i^2(-8)$$

Evident $v_i < v_i', (\forall) i = 1,2$, cu alte cuvinte pentru cel puţin o perioadă jucătorii vor alege să coopereze, chiar dacă jocul este necooperativ, deoarece câştigul adus de această strategie este mai mare decât cel de necooperare. Acest rezultat a fost sintetizat de Benoit şi Krishna (1985) în următoarea teoremă:

Teorema Benoit-Krishna

Fie un joc finit repetat *G(T),* pentru care s^* este un echilibru, şi fie $\hat{s}$ o altă strategie astfel încât $u(\hat{s}) > u(s^*)$. Atunci există un *T'<T*, pentru *T* suficient de mare, astfel încât pentru *T'* perioade echilibrul jocului finit repetat este repetarea lui $\hat{s}$, iar pentru următoarele *T-T'* perioade repetarea lui s^*.

Demonstraţie

Pentru demonstraţia acestei teoreme vom apela la principiul raţionalităţii jucătorilor, care vor dori maximizarea câştigului pentru tot jocul.

Astfel, dacă jucătorii vor adopta strategia s^* la fiecare etapă a jocului, atunci câştigul lor mediu va fi:

$$v_i(s^*) = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\sum_{t=0}^{T}\delta_i^t u_i(s^{*t})$$

Dacă pentru *T'* etape vor adopta strategia $\hat{s}$, iar pentru restul de *T-T'* etape strategia s^*, atunci câştigul va fi:

$$v_i(s') = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'}\delta_i^t u_i(\hat{s}^t) + \sum_{t=T'+1}^{T}\delta_i^t u_i(s^{*t})\right) \text{ cu } s' = (\hat{s}^1, \hat{s}^2, \ldots \hat{s}^{T'}, \hat{s}^{T'+1}, \ldots . s^{*T})$$

Cum $u(\hat{s}) > u(s^*)$, adică $u_i(\hat{s}) > u_i(s^*), (\forall)$ jucătorul *i*, fie i_1 jucătorul pentru care se atinge
$\min(u(\hat{s}) - u(s^*))$.

Atunci, pentru jucătorul i_1 vom avea:

$$u_{i_1}(s') - v_i(s^*) = \frac{1-\delta_{i_1}}{1-\delta_{i_1}^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'}\delta_{i_1}^t u_{i_1}(\hat{s}^t) + \sum_{t=T'+1}^{T}\delta_{i_1}^t u_{i_1}(s^{*t})\right) - \frac{1-\delta_{i_1}}{1-\delta_{i_1}^{T+1}}\sum_{t=0}^{T}\delta_{i_1}^t u_{i_1}(s^{*t}) =$$

$$= \frac{1-\delta_{i_1}}{1-\delta_{i_1}^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'}\delta_{i_1}^t u_{i_1}(\hat{s}^t) - u_{i_1}(s^{*t})\right) > 0$$

Deci pentru jucătorul i_1 este strict mai bine să aleagă să joace în *T'* etape strategia de cooperare, deoarece va câştiga strict mai bine.

Următoarea întrebare care se pune este cât timp să se desfăşoare jocul astfel încât jucătorii să coopereze cel puţin o perioadă. Această problemă se rezolvă în urma adoptării unei "strategii de pedepsire" (trigger strategy). Această strategie presupune următoarea desfăşurare: "*jucătorul i va adopta un comportament cooperativ în prima etapă şi va continua acest comportament atâta timp cât şi ceilalţi jucători adoptă un comportament similar. În momentul în care unul din jucători deviază de la acest comportament, atunci până la sfârşitul jocului se va adopta un comportament de pedepsire, adică vor fi penalizaţi prin revenirea la comportamentul necooperativ* ".

Acest comportament se bazează pe existenţa unui "câştig de rezervă", sau câştig minmax. Astfel vom defini:

Definiţia 3.16 Vom numi câştig de rezervă $\underline{u_i}$ pentru jucătorul *i,* câştigul minim ce îl poate obţine în cele mai proaste condiţii pentru el, sau altfel spus $\underline{u_i} = \min_{s_{-i}}[\max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})]$

Fie m_{-i} strategiile celorlalţi jucători pentru care se realizează $\underline{u_i}$, adică profilul <u>minmax</u> al strategiilor celorlalţi jucători. Atunci $u_i(m_i, m_{-i}) = \underline{u_i}$.

Exemplul 3.1 Pentru dilema prizonierului, câştigul minmax este atins pentru strategiile *(A, A)* şi va coincide cu echilibrul Nash.

		Jucător 2 A	Jucător 2 N
Jucător 1	A	-8,-8	-10,0
	N	0,-10	-2,-2

$\underline{u_1} = \min_{s_2 \in \{A,N\}}[\max_{s_1 \in \{A,N\}} u_1(s_1, s_2)] = \min(-8, 0) = -8$

Exemplu 3.2 Se consideră jocul-etapă static descris în figura 3.14

		Jucător 2	
		D	E
Jucător 1	A	-2, 2	1, -2
	B	1, -2	-2, 2
	C	0,1	0, 1

Figura 3. 14

Observăm că acest joc nu are un echilibru în strategii pure. Pentru jucătorul 2, echilibrul în strategii mixte este $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, cu alte cuvinte, jucătorul 2 este indiferent pe care dintre strategii o adoptă, D sau E. pentru jucătorul 1 în schimb, cum nu ştie care va fi comportamentul jucătorului 2, atunci el poate câştiga:

$$u_1(A,.) = \frac{1}{2}(-2) + 1(\frac{1}{2}) = -0,5$$
$$u_1(B,.) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-2) = -0,5$$
$$u_1(C,.) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 = 0$$

Deci câştigul minmax al jucătorului 1 este 0, pentru strategia C (cel mai mic câştig pe care îl poate obţine el căutând să-şi maximizeze câştigul, indiferent de ceea ce ar juca ceilalţi jucători).

3.3.4. Jocuri infinit repetate

Dacă jocurile considerate sunt infinit repetate, atunci nu mai poate fi aplicat algoritmul inducţiei recursive pentru că nu există o etapă finală a jocului de la care să pornim în sens invers. În aceste condiţii echilibrul se va determina prin intermediul rezultatelor expuse de teorema folk (populară):

Teorema folk Dat fiind jocul-etapă *G* şi jocul infinit repetat *G(∞)* şi $\underline{u}_i$ câştigul minmax al jucătorului *i*, atunci pentru orice vector al câştigurilor v cu $v_i > \underline{u}_i, (\forall) i$, există $\underline{\delta} < 1$, astfel încât $(\forall)\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ există un echilibru Nash al jocului *G(∞)* dat de repetarea strategiilor care asigură câştigul v.

Demonstraţie

Presupunem că există o strategie pură a astfel încât $u(a) = v$ (cu $v > \underline{u}$) şi fie pentru fiecare jucător i următoarea strategie: "*voi juca a_i în perioada 0 şi voi continua să joc a_i atâta timp cât în perioada anterioară s-a jucat a. Dacă nu, atunci se va juca m_i (strategiile corespunzătoare câştigului minmax) pentru restul jocului*."

Este posibil ca jucătorul *i* să câştige prin deviere de la această strategie?

În perioada în care deviază el va câştiga $\max_a u_i(a)$, iar după va câştiga $\underline{u}_i$, respectiv câştigul adus de strategia minmax, deci până la sfârşitul jocului va câştiga $\underline{u}_i$ în fiecare etapă.

În concluzie, câştigul adus de devierea în etapa t va fi:

$$u_D = (1-\delta_i^t)u_i + \delta^t(1-\delta)\max_a u_i(a) + \delta^{t+1}\underline{u}_i$$

Observație Între câştiguri există următoarea relație:

$$\max_a u_i(a) > u_i > \underline{u}_i$$

Acest câştig este mai mic decât u_i cât timp se depăşeşte nivelul este $\underline{\delta}_i$, definit prin:

$$(1-\underline{\delta}_i)\max_a u_i(a) + \delta_i \underline{u}_i = v_i \qquad (*)$$

Cum $v_i > \underline{u}_i$, atunci soluția $\underline{\delta}_i$ a ecuației (*) este mai mică decât 1.

Fie $\underline{\delta} = \max_i \underline{\delta}_i$, deci există $\underline{\delta}$ astfel încât $(\forall)\delta > \underline{\delta}$, echilibrul jocului este dat de strategiile care asigură câştigul v. q.e.d.

Observații

Dacă optimul nu este atins pentru o strategie pură, atunci el se poate realiza pentru o strategie mixtă, iar demonstrația va rămâne aceeaşi.

În demonstrație am considerat faptul că într-o etapă a jocului deviază doar un singur jucător.

Altfel spus, dacă $\delta > \underline{\delta}$ atunci un jucător nu va fi tentat să devieze deoarece câştigul din deviere nu acoperă pierderile ulterioare.

M. Friedman (1971) a demonstrat această teoremă în condiții slăbite:

Teorema Friedman Fie α^* un echilibru al jocului-etapă cu câştigul *c*. Atunci oricare ar fi $u \in U$ cu $u_i > c_i, (\forall)i, (\exists)\underline{\delta}$ astfel încât $(\forall)\delta > \underline{\delta}$ strategia asociată lui u să fie un echilibru perfect în subjoc.

Exemplul 3.3 Revenind la dilema prizonierului infinit repetată, să determinăm care este pragul $\underline{\delta}$ pentru care jucătorii vor adopta un comportament cooperativ în cadrul jocului.

		Jucător 2	
		A	N
Jucător 1	A	-8,-8	-10,0
	N	0,-10	-2,-2

Pentru acest joc câştigul minmax este asigurat de strategia (A, A) cu $\underline{u}(A, A) = (-8,-8)$.

Câştigul de cooperare este $u(N, N) = v$ deoarece (-2, -2)>(-8, -8).

Câştigul adus de deviere pentru jucătorul 1 va fi $u_1 = \max_{a \in \{A,N\}} u_i(.,N) = 0$.

Observăm că $u_1 > v_1 > \underline{u}_1, (0 > -2 > -8)$ - analog pentru jucătorul 2.

De aici obţinem câştigul mediu de deviere al jucătorului 1 pentru jocul infinit repetat:

$$u_{1D} = (1-\delta_1)\max_a u_1(a) + \delta_1 \underline{u}_1 = (1-\delta_1)u_1 + \delta_1 \underline{u}_1.$$

Câştigul mediu de cooperare va fi:

$u_{1C} = v_1$ - deoarece câştigă la fiecare etapă v_1, deci şi în medie v_1.

De aici rezultă:

$$u_{1D} = u_{1C} \Rightarrow (1-\delta_1)u_1 + \delta_1 \underline{u}_1 = v_1 \Leftrightarrow \underline{\delta}_1 = \frac{v_1 - u_1}{\underline{v}_1 - u_1} \text{ sau}$$

$$\underline{\delta}_1 = \frac{u_1 - v_1}{u_1 - \underline{v}_1} = \frac{0-(-2)}{0-(-8)} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Cu alte cuvinte pragul $\underline{\delta}$ de la care jucătorii vor adopta un comportament cooperativ va fi $\underline{\delta} = 0{,}25$, respectiv pentru orice $\delta \in (0.25,1)$ jucătorii vor coopera.

Observaţie Jocul fiind simetric obţinem $\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_2 = 0{,}25$.

3.3.5. Strategia de pedepsire şi jocurile finit repetate

În cazul jocurilor finit repetate strategia de a se repeta echilibrul Nash al jocului-etapă pare a fi echilibrul jocului dinamic. Totuşi, am văzut că această strategie nu este credibilă. În acest context apare întrebarea dacă putem adopta comportamentul de pedepsire astfel încât să fie determinaţi jucătorii să adopte un comportament cooperativ chiar şi în cadrul jocurilor finit repetate. Răspunsul la această întrebare este afirmativ, cu observaţia că în acest caz soluţia depinde atât de nivelul pragului dat de factorul de actualizare $\underline{\delta}$, cât şi de durata jocului, respectiv de numărul de etape jucate T.

Astfel avem teorema:

Teoremă Dat fiind jocul-etapă G şi jocul finit repetat G(T), $\underline{u}_i$ câştigul minmax al jucătorului i, atunci pentru orice vector al câştigurilor v, cu $v_i > \underline{u}_i, (\forall)i, (\exists)\underline{\delta} < 1$, pentru T suficient de mare, astfel încât $(\forall)\delta \in (\underline{\delta}1), (\exists)T' > 0$ astfel încât repetarea de T' ori a strategiilor ce asigură câştigul v constituie echilibrul Nash al jocului repetat pentru T' etape.

Demonstraţie

Demonstraţia se poate face analog cu cea a teoremei folk. Dacă strategia adoptată este una de "pedepsire", atunci există un prag al "răbdării" $\underline{\delta}$ şi un număr minim de etape T în care trebuie să se desfăşoare jocul pentru ca cel puţin T' etape jucătorii vor adopta un comportament cooperativ adoptând strategia care aduce câştigul v.

Fie $\underline{u}_i$ = câştigul minmax al jucătorului i;

$v_i > \underline{u}_i$ - câştigul de cooperare al jucătorului i;

$\bar{u}_i = \max_a u(a)$ - câştigul de deviere al jucătorului i.

În cazul în care deviază, câştigul jucătorului i este:

$$u_i^D(s') = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'-1}\delta^t v_i + \delta^{T'}\bar{u}_i + \sum_{t=T'+1}^{T}\delta^t \underline{u}_i\right)$$

cu T' numărul de etape în care jucătorul i cooperează, T'<T.

Câştigul de cooperare pe întreaga perioadă va fi :

$$u_i^C = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\sum_{t=0}^{T}\delta^t v_i$$

Pragul de la care jucătorul i nu este tentat să devieze este dat de inegalitatea

$$u_i^C \ge u_i^D \Leftrightarrow \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\sum_{t=0}^{T}\delta^t v_i \ge \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'-1}\delta^t v_i + \delta^{T'}\bar{u}_i + \sum_{t=T'+1}^{T}\delta^t \underline{u}_i\right) \Leftrightarrow$$

$$\delta^{T'}(\bar{u}_i - v_i) \le \sum_{t=T'+1}^{T}\delta^t (v_i - \underline{u}_i) \Leftrightarrow \delta^{T'}(\bar{u}_i - v_i) \le (v_i - \underline{u}_i)\frac{1-\delta^{T-T'}}{1-\delta} \Leftrightarrow \frac{(1-\delta)\delta^{T'}}{1-\delta^{T-T'}} \le \frac{v_i - \underline{u}_i}{\bar{u}_i - v_i} \quad (*)$$

Dat fiind numărul de etape T' ce se doresc a fi cooperative şi un prag de semnificaţie δ, se poate obţine T, respectiv numărul de etape pe care le are jocul finit repetat ca jucătorii să coopereze T' perioade. Vom avea:

$$-(1-\delta)\delta^{2T'}\frac{\bar{u}_i - v_i}{v_i - \underline{u}_i} + \delta^{T'} \ge \delta^T \Rightarrow T \ge \log\delta\left(\delta^T - (1-\delta)\delta^{2T'}\frac{\bar{u}_i - v_i}{v_i - \underline{u}_i}\right)$$

Dacă se dă în schimb T şi T' atunci se poate determina $\underline{\delta}$, nivelul minim al factorului de actualizare pentru care jucătorii vor coopera, din relaţia (*).

3.3.6. Aplicaţii

1. Investiţia strategică şi duopolul

Pe piaţa unui produs există doi producători, firma 1 şi firma 2, pentru care costul mediu este acelaşi, $c=3$ u.m. pe unitatea de produs. Firma 1 poate să instaleze o nouă tehnologie care îi va reduce costul la $c_1=1$ u.m. pe unitatea de produs, dar costul acestei tehnologii este f. Firma 2 observă decizia de investiţii a primei firme şi apoi alege nivelul outputului simultan cu prima firmă.

Funcţia de cerere inversă pe piaţă este $P(Q) = a - Q$, cu $Q = q_1+q_2$.

Funcțiile de câştig sunt date de profiturile firmelor, respectiv pentru firma 1 avem:

$$\pi_1(q_1,q_2)=\begin{cases}(a-c-q_1-q_2)q_1 & \text{dacă nu investeşte}\\ (a-c_1-q_1-q_2)q_1-f & \text{dacă investeşte}\end{cases}$$

$$\pi_2(q_1,q_2)=(a-c-q_1-q_2)q_2$$

Se cere să se determine echilibrul acestui joc. Date numerice *a=15, f* – parametru.

Rezolvare Dacă firma 1 nu investeşte, atunci costurile medii pe unitatea de produs vor fi identice pentru cele două firme, care se vor afla în competiție de tip Cournot.

Funcțiile de reacție sunt: $R_i(q_j)=\dfrac{a-c}{2}-\dfrac{q_j}{2}$, iar echilibrul jocului este $q_1^*=\dfrac{a-c}{3}=q_2^*$, iar nivelurile profiturilor vor fi $\pi_1^*=\pi_2^*=\dfrac{(a-c)^2}{9}$.

Pentru datele numerice avem:

$$(q_1^*,q_2^*)=(4,4)$$
$$(\pi_1^*,\pi_2^*)=(16,16)$$

Dacă firma 1 investeşte în schimb, atunci funcțiile de reacție se obțin din problemele:

$$\max_{q_1}\pi_1(q_1,q_2)=\max_{q_1}(a-c_1-q_1-q_2)q_1-f$$

$$\max_{q_2}\pi_2(q_1,q_2)=\max_{q_2}(a-c-q_1-q_2)q_2$$

De aici: $R_2(q_1)=\dfrac{a-c}{2}-\dfrac{q_1}{2},R_1(q_2)=\dfrac{a-c_1}{2}-\dfrac{q_2}{2}$

De aici, nivelul de echilibru rezultă din rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases}q_2=\dfrac{a-c}{2}-\dfrac{q_1}{2}\\ q_1=\dfrac{a-c_1}{2}-\dfrac{q_2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q_1+2q_2=a-c\\ 2q_1+q_2=a-c_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q_{1I}^*=\dfrac{a+c-2c_1}{3}\\ q_{2I}^*=\dfrac{a+c_1-2c}{3}\end{cases}$$

cu câştigurile

$$(\pi_{I1}^*,\pi_{2I}^*)=\left(\left(\frac{a+c-2c_1}{3}\right)^2-f;\left(\frac{a+c_1-2c}{3}\right)^2\right)$$

Deci firma 1 va alege să investească doar dacă $\pi_{1I}^*>\pi_1$, adică $\dfrac{(a-c)^2}{9}<\dfrac{(a+c-2c_1)^2}{9}-f$, adică dacă $f<\dfrac{(a+c-2c_1)^2}{9}-\dfrac{(a-c)^2}{9}$.

Numeric obținem

$$(q_{I1}^*,q_{2I}^*)=(\frac{16}{3},\frac{10}{3})$$
$$(\pi_{I1}^*,\pi_{2I}^*)=(\frac{256}{9}-f,\frac{100}{9})$$

Deci prima firmă va investii doar dacă pentru ea costul tehnologic, $f < \frac{112}{9} = \frac{256}{9} - 16$.