CAPITOLUL 4

Jocuri statice în informaţie incompletă (jocuri Bayesiene)

Jocurile în informaţie incompletă sunt acele jocuri în care cel puţin unul dintre jucători nu cunoaşte funcţiile de câştig ale celorlalţi jucători.

Totuşi, acel jucător care nu ştie câştigurile celorlalţi, îşi imaginează care ar putea fi acestea cu o anumită probabilitate.

4.1. Introducere

Exemplul 4.1 Jocul intrării pe piaţă

Se consideră un joc în care jucătorii sunt două firme, din care una este deja pe piaţă, iar a doua doreşte să între. Prima firmă poate să se extindă construind o nouă fabrică, iar cea de-a doua nu cunoaşte costul noii construcţii, ştiind doar că poate fi 4 unităţi sau 1 unitate.

Câştigurile sunt descrise în figura 4.1 a) şi b):

		F2	
		I	*N*
F1	*C*	-1,-1	1,0
	NC	1,1	2,0

Cost mare: p_1
Figura 4.1.a)

		F2	
		I	*N*
F1	*C*	2,1	4,0
	NC	1,1	2,0

Cost mic: p_2
Figura 4.1 b)

Observăm că câştigurile jucătorului 2 depind de faptul că primul a construit sau nu fabrica, dar nu este influenţat de costul acestei investiţii.

Observăm faptul că pentru jucătorul 2 este preferabil să intre doar dacă jucătorul 1 nu construieşte.

Pentru jucătorul 1 în schimb vedem că strategia de a construi este dominantă doar dacă are un cost mic.

Dacă notăm cu p_1 probabilitatea cu care jucătorul 2 credea că 1 are un cost mare, cum 1 construieşte doar dacă are un cost mic, atunci 2 va intra pentru probabilitatea $p_1 > \frac{1}{2}$ şi nu va intra cu probabilitatea $p_1 < \frac{1}{2}$.

Modificând jocul, cu câştigurile descrise în figura 4.2 avem:

F2

F1		*I*	*N*
	C	0,-1	2,0
	NC	2,1	3,0

Cost mic
Figura 4.2 a)

F2

F1		*I*	*N*
	C	1.5,1	3.5,0
	NC	2,1	3,0

Cost mare
Figura 4.2 b)

Fie *y* probabilitatea ca firma 2 să intre pe piaţă (deci $(1 - y)$ este probabilitatea ca firma 2 să nu intre pe piaţă).

În acest caz strategia de a nu construi rămâne dominantă dacă firma 1 are un cost mare.

Dacă este un cost mic, atunci strategia optimă a lui1 depinde de probabilitate ca 2 să intre pe pe piaţă.

A construi este mai bine decât a nu construi dacă:

$1,5\, y + 3,5\, (1 - y) > 2\, y + 3\, (1 - y)$. Rezultă $y < 1/2$.

Astfel, 1 poate încerca să prezică comportamentul lui 2 pentru a-şi alege propria strategie.

Harsany a propus o transformare a acestui joc dintr-unul în informaţie incompletă într-un joc în informaţie imperfectă, descriind sub formă extinsă jocul cu ajutorul ”*Naturii*”. (figura 4.3):

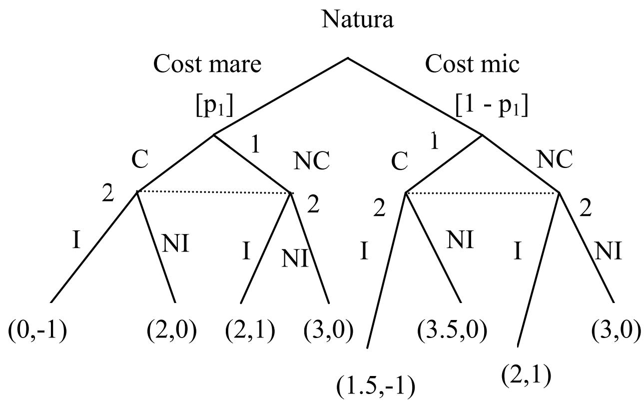

Figura 4.3

Prin această reprezentare am obţinut un joc clasic, respectiv un joc dinamic în informaţie incompletă, al cărui echilibru se poate determina prin metode deja prezentate. . Vedem că în raport cu probabilitatea asignată de jucătorul 1 pentru comportamentul jucătorului 2 vom obţine echilibrul anterior, respectiv: dacă firma 1 va crede că firma 2 intră pe piaţă cu probabilitatea $y > 1/2$, atunci el va alege să nu construiască, iar dacă probabilitatea cu care crede că firma 2 intră este $y < 1/2$ atunci va alege să construiască.

4.2 Reprezentarea jocurilor Bayesiene sub formă normală

În informaţie completă, reprezentam un joc sub formă normală ca fiind: *G(S,u),* fiecare jucător ştiind care sunt strategiile şi câştigurile asociate tuturor celorlalţi jucători.

În cazul jocurilor în informaţie incompletă fiecare jucător îşi cunoaşte propriile funcţii de câştig, dar poate să nu cunoască una a celorlalţi.

Atunci fie $u_i(a_1, a_2, ..., a_n; t_i)$ funcţia de utilitate a jucătorului *i* dacă este de tipul t_i, cu $t_i \in T_i$ (spaţiul tipurilor posibile).

Vom nota cu $p_i(t_{-i}/t_i)$ probabilitatea ca jucătorul de tipul t_i să creadă că ceilalţi sunt de tipul t_{-i}.

Definiţia 4.1 Reprezentarea sub *formă normală* a unui joc Bayesian static cu *n* jucători presupune să specificăm spaţiul acţiunilor (strategiilor) A_i, spaţiul tipurilor jucătorilor T_i, apoi "credinţele" acestora p_i, respectiv funcţiile de câştig, u_i.

- tipul jucătorului *i* - t_i- este informaţie privată a jucătorului *i* şi face parte din mulţimea tipurilor T_i.
- credinţele (aşteptările) jucătorului *i*: $p_i(t_{-i}/t_i)$ descriu incertitudinea lui *i* asupra tipurilor posibile *(n-1)* ale celorlalţijucători, t_{-i}, dat fiind tipul său t_i.

Atunci un joc static în informaţie incompletă (joc bayesian) este *G = {A, T, P, U}*.

În abordarea lui Harsany desfăşurarea unui joc bayesian este următoarea:

- "natura alege tipul jucătorilor $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$;
- fiecare jucător îşi cunoaşte propriul tip t_i, dar nu îl cunoaşte pe al celorlalţi t_{-i};
- jucătorii aleg simultan acţiunile lor;
- se "recepţionează" câştigurile $u_i(a_1, a_2, ..., a_n; t_i)$.

Observaţia 1. Putem calcula $p_1(t_{-i}/t_i)$ utilizând regula Bayes:

$$p_i(t_{-i}/t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)} \qquad (4.1)$$

Observația 2. În multe probleme tipul jucătorilor este independent. Deci $p_i(t_{-i})$ nu depinde de t_i, dar va depinde totuşi de distribuția de probabilitate *p(t)* asupra tipurilor.

Definiția 4.2. Vom numi *strategie* pentru jucătorul *i* o funcție $S_i(t_i)$, în care $S_i(t_i)$ specifică o acțiune particulară din mulțimea acțiunilor A_i, pentru orice t_i, ale jocului *G (A, T, P, U).*

Definiția 4.3. În jocul Bayesian static *G = {A, T, P, U}* strategiile $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ sunt un echilibru Bayesian de tip Nash în strategii pure dacă pentru fiecare jucător *i* şi fiecare tip t_i din T_i, $s_i^*(t_i)$ este soluție a problemei:

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(s_1^*(t_1), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, s_n^*(t_n); t\right) \cdot p(t_{-i}/t_i). \tag{4.2}$$

Astfel, la echilibru, nici un jucător nu îşi va modifica strategia, chiar dacă se schimbă acțiunea în cadrul aceluiaşi tip.

Exemplul 4.2 Duopolul Cournot în informație incompletă

Se consideră modelul duopolului Cournot, (analizat în capitolul 2), în condiții de informație incompletă. Astfel, pe piața unui produs există doi producători, care produc cantitățile q_1, respectiv q_2. Contitatea totală de produs de pe piață va fi *Q*.

Funcția de cerere inversă este: $P(Q) = c - Q$, $Q = q_1 + q_2$

Costul mediu pe unitatea de produs al firmei 1 este c, iar costul total va fi:

$$c_1(q_1) = cq_1.$$

Firma 2 în schimb, poate avea două tipuri de cost, şi anume fie un cost mediu mare, c_M, fie un cost mediu mic, c_m, astfel încât funcția de cost total a firmei 2 va fi:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_M q_2 \\ c_m q_2 \end{cases}$$

cu $c_m < c_M$.

Firma 1 crede cu probabilitatea θ că firma 2 are costul mare, c_M, şi cu probabilitatea $1 - \theta$ că firma 2 are costul mic, c_m. Tipul firmei 2 este dat de costul mediu pe care îl poate avea. Aceasta este o informație privată, adică firma 2 îşi cunoaşte propriul cost, în schimb firma 1 nu ştie acest cost, deci nu poate determina profitul firmei 2. În schimb firma 1 îşi formează anumite credințe, presupuneri, asupra tipului care este firma 2. Astfel, presupune cu probabilitatea θ este firma 2 este de tipul c_M, şi cu probabilitatea $1 - \theta$ este de tipul c_m.

Fiecare dintre firme are de rezolvat problema:

Pentru firma 2:

$$\max_{q_2} (q - q_1^* - q_2 - c_M) q_1 \text{ pentru tipul } c_M \tag{4.3}$$

sau

$$\max_{q_1} (q - q_1^* - q_2 - c_m) q_2 \text{ pentru tipul } c_m. \tag{4.4}$$

Pentru firma 1:

$$\max_{q_1} \theta[q - q_1 - q_2 *(c_M) - c]q_1 + (1-\theta)[q - q_1 - q_2 *(c_m) - c]q_1 \qquad (4.5)$$

Rezolvând aceste probleme obţinem soluţiile (funcţiile de reacţie ale firmei 2 în raport cu cantităţile elese de firma 1 şi de tipul firmei):

$$q_2 *(c_M) = \frac{c - q_1 * - c_M}{2} \text{ sau} \qquad (4.6)$$

$$q_2 *(c_m) = \frac{c - q_1 * - c_m}{2}. \qquad (4.7)$$

Rezultă pentru firma 1 funcţia de reacţie (în raport cu funcţiile de reacţie ale firmei 2 şi cu probabilităţile cu care crede firma 1 că firma 2 este de un tip sau de altul):

$$q_1 * = \frac{\theta[q - q_2 *(c_M) - c] + (1-\theta)[q - q_2 *(c_m) - c]}{2} \qquad (4.8)$$

Din relaţiile (4.6) – (4.8) rezultă:

$$q_2 *(c_M) = \frac{q - 2c_M + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_M - c_m) \qquad (4.9)$$

$$q_2 *(c_m) = \frac{q - 2c_m + c}{2} + \frac{\theta}{6}(c_M - c_m) \qquad (4.10)$$

$$q_1 * = \frac{q - 2c + \theta c_M + (1-\theta)c_m}{3}. \qquad (4.11)$$

Observaţie

În raport cu parametrul θ, respectiv cu probabilitatea cu care crede firma 1 că firma 2 are costul mare, strategiile alese de cele două firme tind către cele în informaţie completă ($\theta \to 0$ sau $\theta \to 1$).

4.3 Strategii mixte revizuite

Harsanyi (1973) a sugerat faptul că pentru jucătorul *i* o strategie mixtă reprezintă incertitudinea jucătorului *j* despre alegerea de către *i* a unei strategii pure, iar aceasta depinde de informaţia privată pe care o are.

Putem extinde această idee şi un *echilibru Nash* în strategii mixte poate fi interpretat (pentru un joc în informaţie completă) ca un *echilibru Bayesian* în strategii pure cu o anumită (puţină) informaţie incompletă.

Să reconsiderăm jocul "bătălia sexelor" descris în capitolul 2. Băiatul şi fata care au de ales unde vor petrece seara respectivă vor decide asupra locului în care vor merge: la *Teatru* sau la *Fotbal*. Matricea jocului este dată în figura 4.4:

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Fata}} \\ & & T & F \\ \cline{3-4} \textit{Băiat} & T & 1,2 & 0,0 \\ \cline{3-4} & F & 0,0 & 2,1 \\ \cline{3-4} \end{array}$$

Figura 4.4

Acest joc are două 2 echilibre: *(T,T)* şi *(F,F).*

Să presupunem acum faptul că ei nu sunt siguri în legătură cu câştigul pe care îl are celălalt, iar aceste câştiguri sunt $2 + t_f$ pentru fată (pentru teatru), respectiv $2 + t_b$ pentru băiat (pentru fotbal).

t_f şi t_b sunt cunoscute de posesori (fată, respectiv băiat), iar celălalt se presupune că sunt din intervalul *[0,x],* uniform distribuite.

Atunci jocul bayesian *G* va fi $G=\{A_b, A_f, T_b, T_f, P_b, P_f, U_b, U_f\}$ cu

- spaţiul acţiunilor: $A_b = A_f =\{T, F\}$;
- spaţiul tipurilor, care este continuu: $T_b = T_f = [0, x]$;
- probabilităţile cu care cred fata, respectiv băiatul că celălalt are câştigurile t_b, respectiv t_f sunt: $p_f(t_b) = p_b(t_f) = \frac{1}{x}$.

Câştigurile vor fi descrise de matricea din figura 4.5:

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{\textit{Fata}} \\ & & T & F \\ \cline{3-4} \textit{Băiat} & T & 2 + t_b, 1 & 0,0 \\ \cline{3-4} & F & 0,0 & 1, 2 + t_f \\ \cline{3-4} \end{array}$$

Figura 4.5

În continuare vom determina un echilibru Bayesian în strategii pure pentru acest joc în informaţie incompletă.

În acest joc fata va alege teatrul dacă t_f depăşeşte un nivel critic *f*, altfel va merge la fotbal. (Analog se defineşte şi pentru băiat strategia cu nivelul critic *b*).

Deci, la echilibru băiatul va alege fotbalul cu probabilitatea $\frac{x-b}{x}$, iar fata va alege teatrul cu probabilitatea $\frac{x-f}{x}$.

În continuare vom arăta ca dacă informația completă dispare (x→0), atunci comportamentul jucătorilor în strategii Bayesiene aproximează comportamentul în strategii mixte al jocului static inițial ($\frac{x-c}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}$).

Să determinăm valorile critice f şi b pentru dimensiunea intervalului câştigului, x, dată:

- pentru băiat :

$$u_1(F) = \frac{f}{x}(2+t_b) + \left(1 - \frac{f}{x}\right)0 = \frac{f}{x}(2+t_b) \tag{4.12}$$

$$u_1(T) = \frac{f}{x}0 + \left(1 - \frac{f}{x}\right)1 = 1 - \frac{f}{x} \tag{4.13}$$

Deci va merge la fotbal doar dacă:

$$t_b \geq \frac{x}{f} - 3 = b \tag{4.14}$$

Pentru fată, vom obține în mod analog:

$$t_f \geq \frac{x}{b} - 3 = f \tag{4.15}$$

Rezolvând (4.14) şi(4.15)simultan obținem:

$$b = f = \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2}. \tag{4.16}$$

Deci, probabilitatea ca băiatul să meargă la fotbal va fi:

$$\frac{x-b}{x} = 1 - \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}. \tag{4.17}$$

Cu alte cuvinte, dacă dacă informația incompletă ar dispare, atunci se obține echilibrul Nash în strategii mixte ale jocului în informație completă.

4.4. Mecanisme design (descriptive) ale jocurilor Bayesiene

Modelul stabilirii prețurilor neliniare

Un monopolist produce un bun la un cost marginal (şi mediu) c şi vinde o cantitate $q \geq 0$ din acest bun. Acest bun este cumpărat de un consumator a cărui satisfacție este descrisă de funcția de câştig:

$$u_1(q, T, \theta) = \theta V(q) - T \text{ cu:} \tag{4.18}$$

- $\theta V(q)$- reprezintă surplusul brut, unde θ este tipul cumpărătoruluiθ;
- T suma transferată de la consumator la vânzător;
- *V(q)* reprezintă funcția de utilitate, de tip von Neumann – Morgenstern, ce are proprietățile:

$$V(0)=0$$
$$V^{'}(0)>0$$
$$V''(0)<0 \text{(utilitate marginală descrescătoare)}$$

V(q) este o cunoştinţă comun, dar θ este informație privată pentru consumator, respectiv este cunoscut doar de consumator.

În cazul în care spațiul tipurilor este discret, vânzătorul ştie că $\theta=\underline{\theta}$ cu probabilitatea $\underline{p}$ şi $\theta=\overline{\theta}$ cu probabilitatea $\overline{p}$, unde $\overline{\theta}>\underline{\theta}>0$ şi $\underline{p}+\overline{p}$=1.

Jocul va fi următorul:

Vânzătorul oferă un tarif *T(q)* (posibil neliniar) în care îi spune cumpărătorului cât îl costă dacă va cumpăra cantitatea *q*.

Consumatorul fie va accepta oferta, fie va refuza.

Dacă jocul ar fi în informație completă, atunci vânzătorul ar şti θ şi va oferi q astfel încât să-şi maximizeze profitul, extrăgând tot surplusul consumatorului, adică:

$$u_1(q,T,\theta)=0=\theta\ V(q)-T \quad\Rightarrow\quad T=\theta V(q). \tag{4.19}$$

Profitul monopolistului este dat de :

$$\pi_2=T-cq=\theta V(q)-cq \tag{4.20}$$

Condițiile necesare de optim sunt:

$$\frac{\partial\pi}{\partial q}=\theta V'(q)-c=0 \tag{4.21}$$

conduc la soluția:

$$\theta V'(q)=c \tag{4.22}$$

(Cum $V''(0)<0$, rezultă că şi condiția suficientă este îndeplinită, deci profitul se maximizează în punctul în care $\theta V'(q)=c$).

Cum însă consumatorul poate fi de două tipuri, vânzătorul poate căuta să ofere 2 pachete de “programe”, câte unul pentru fiecare tip.

Fie $(\underline{q},\underline{T})$ pachetul pentru tipul $\underline{\theta}$ şi $(\overline{q},\overline{T})$ pachetul pentru tipul $\overline{\theta}$.

Atunci câştigul aşteptat al monopolistului va fi:

$$E\pi_2 = \underline{p}\left(\underline{T} - c\underline{q}\right) + \overline{p}\left(\overline{T} - c\overline{q}\right). \tag{4.33}$$

În aceste condiții vânzătorul are în față 2 condiții:

- prima (IR) restricția de *raționalitate individuală* presupune că utilitatea netă minimă a cumpărătorilor este nenegativă, adică:

$$\begin{aligned} &(IR_1) \quad \underline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} \geq 0 \\ &(IR_2) \quad \overline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \geq 0 . \end{aligned}$$

(Consumatorii nu vor alege un consum ce ar asigura o utilitate negativă.)

- al doilea tip de restricții sunt cele numite de compatibilitate incitativă, cu alte cuvinte condiția ca fiecare consumator să consume doar pachetul care îi este destinat:

$$\begin{aligned} &(IC_1) \quad \underline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} \geq \underline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \\ &(IC_2) \quad \overline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \geq \overline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} \ . \end{aligned}$$

Problema pe care o are de rezolvat vânzătorul este de maximizare a profitului aşteptat cu restricțiile *(IR)* şi *(IC)*. In prima etapă să observăm că doar (IR_1) şi (IC_2) sunt necesare, deoarece:

$$\overline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \geq \left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right) V\left(\underline{q}\right) \geq 0 . \tag{4.34}$$

Deci monopolistul va trebui să rezolve problema:

$$\begin{aligned} &\max_{\overline{T}, \underline{T}, \overline{q}, \underline{q}} E\pi = \underline{p}\left(\underline{T} - c\underline{q}\right) + \overline{p}\left(\overline{T} - c\overline{q}\right) \qquad \text{cu restricțiile:} \\ &\underline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} \geq 0 \\ &\overline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \geq \overline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} . \end{aligned} \tag{4.35}$$

(Pentru început vom neglija (IC_1). Dacă soluția problemei satisface şi (IC_1) atunci ea va fi optimală.)

Rezultă:

$$\begin{aligned} &\max E\pi = \left[\left(\underline{p}\underline{\theta} - \overline{p}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\right) V\left(\underline{q}\right) - \underline{p} c \underline{q}\right] + \overline{p}\left(\overline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - c\overline{q}\right) \text{ cu restricțiile:} \\ &\underline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} \geq 0 \\ &\overline{\theta} V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \geq \overline{\theta} V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} . \end{aligned} \tag{4.36}$$

Condițiile de ordin I conduc la soluțiile:

$$\underline{\theta}V'(\underline{q})=\frac{c}{1-\frac{\overline{p}(\overline{\theta}-\underline{\theta})}{\underline{p}\underline{\theta}}} \quad \text{şi} \quad \overline{\theta}V'(\overline{q})=c. \tag{4.37}$$

Cu alte cuvinte, doar cantitatea cerută de consumatorul de tip $\overline{\theta}$ este optimă din punct de vedere social (deoarece este verificată condiția din problema în informație completă) .

Cantitatea cerută de consumatorul de tip $\underline{\theta}$ nu va fi optimală deoarece va consuma o cantitate $\underline{q}<\overline{q}$ (deoarece $V''<0$) .

Demonstrație.

Lagrangeanul asociat problemei (4.36) este:

$$L(\overline{T},\underline{T},\overline{q},\underline{q},\mu_1,\mu_2)=\left[(\underline{p}\underline{\theta}-\overline{p}(\overline{\theta}-\underline{\theta}))V(\underline{q})-\underline{p}c\underline{q}\right]+\overline{p}(\overline{\theta}V(\overline{q})-c\overline{q})+\mu_1(\underline{\theta}V(\underline{q})-\underline{T})+$$
$$\mu_2(\overline{\theta}V(\overline{q})-\overline{T}-\overline{\theta}V(\underline{q})+\underline{T})$$

Condițiile necesare de optim sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{q}}=-Pc+\mu_1\underline{\theta}V'(\underline{q})-\mu_2\overline{\theta}V'(\underline{q})=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \underline{T}}=\underline{P}-\mu_1+\mu_2=0$$

Rezultă $\mu_1-\mu_2=\underline{p}$ şi cum $\mu_2=\overline{p}$ rezultă: $\mu_1=\underline{p}+\overline{p}$.

Deci:

$$(\underline{p}+\overline{p})\underline{\theta}V'(\underline{q})-\overline{p}\overline{\theta}V'(\underline{q})=\underline{p}c \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\theta}V'(\underline{q})+\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\underline{\theta}V'(\underline{q})-\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\overline{\theta}V'(\underline{q})=c$$

$$V'(q)\left[\underline{\theta}+\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\underline{\theta}-\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\overline{\theta}\right]=c \qquad \Rightarrow \qquad V'(q)=\frac{c}{\underline{\theta}+\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\underline{\theta}-\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\overline{\theta}} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\theta}V'(q)=\frac{c}{1+\frac{\overline{p}}{\underline{p}}-\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\frac{\overline{\theta}}{\underline{\theta}}}=\frac{c}{1+\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\left(1-\frac{\overline{\theta}}{\underline{\theta}}\right)}=\frac{c}{1+\frac{\overline{p}}{\underline{p}}\left(\frac{\underline{\theta}-\overline{\theta}}{\underline{\theta}}\right)}=\frac{c}{1-\frac{\overline{p}(\overline{\theta}-\underline{\theta})}{\underline{p}\underline{\theta}}}.$$

4.5 Aplicaţie: Licitaţia la primul preţ

Considerăm un joc, respectiv un proces de licitaţie pentru un tablou de Grigorescu. În joc există doi licitatori *i=1,2*. Fiecare dintre aceştia evaluează tabloul pentru care licitează, la suma v_i (suma maximă pe care sunt dispuşi să o plătească). Ei vor licita pentru tablou şi vor plăti în final suma *P*, respectiv preţul cel mai mare oferit ăn cadrul licitaţiei.

În aceste condiţii câştigul jucătorului care câştigă licitaţia va fi: $u_i = v_i - P$.

Presupunem că evaluările jucătorilor sunt independente şi distribuite uniform în intervalul *[0,1]*.

Evident, preţul plătit nu poate fi negativ, $P \geq 0$.

Cei doi jucători oferă simultan ofertele (în plic închis) şi va câştiga tabloul cel care oferă preţul maxim. În cazul în care ofertele sunt egale, atunci se trage la sorţi jucătorul care va primi tabloul. În plus, ambii jucători sunt neutri faţă de risc.

Pentru început, vom descrie licitaţia ca pe un joc static în informaţie incompletă (joc Bayesian). Informaţia incompletă provine din faptul că fiecare dintre cei doi jucători nu cunoaşte evaluarea celuilalt (v_i este informaţie privată).

Jocul Bayesian este $G=\{A_1, A_2, T_1, T_2, P_1, P_2, U_1, U_2\}$, în care:

- spaţiul acţiunilor este $A_i = [0, \infty)$ pentru fiecare jucător şi reprezintă preţul oferit pentru tablou;
- T_i este spaţiul tipurilor jucătorilor, $T_i = [0,1]$;
- p_i sunt probabilităţile cu care fiecare dintre jucători presupune tipul celuilalt, sunt independente (din independenţa tipurilor) şi sunt uniform distribuite în *[0,1]* şi nu depind de v_i;
- funcţiile de câştig pentru cei doi jucători sunt:

$$u_i(P_1, P_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - P_i; daca P_i > P_j \\ \dfrac{v_i - P_i}{2}; daca P_i = P_j \\ 0 \quad ; \quad daca P_i < P_j \end{cases}. \tag{4.38}$$

Strategiile jucătorilor depind de tipul fiecăruia, cu alte cuvinte, strategia jucătorului *i* va fi $P_i(v_i)$ care reprezintă cel mai bun răspuns la strategia $P_j(v_j)$ aleasă de celălalt jucător.

Cu alte cuvinte, perechea de strategii ($P_1(v_1), P_2(v_2)$) este un echilibru Bayesian al jocului, dacă $P_i(v_i)$ este soluţia problemei:

$$\max_{P_i} (v_i - P_i) prob(P_i > P_j(v_j)) + \frac{1}{2}(v_i - P_i) prob(P_i = P_j(v_j)). \tag{4.39}$$

Vom simplifica problema presupunând că funcşiile de preţ sunt liniare, respectiv:

$$P_1(v_1) = a_1 + c_1 v_1 \tag{4.40}$$
$$P_2(v_2) = a_2 + c_2 v_2 . \tag{4.41}$$

Observaţie: Această restricţie nu este una strictă, forma funcţiilor de preţ putând fi variabilă în realitate.

Cum distribuţia jucătorilor este uniformă (evaluările acestora fiind uniform distribuite în *[0,1]),* iar funcţia de preţ este liniară, soluţia problemei va fi:

$$P_i(v_i) = \frac{v_i}{2}. \tag{4.42}$$

În continuare vom demonstra că aceasta este soluţia unică a jocului.

Strategia adoptată de fiecare jucător este $P_j(v_j) = a_j + c_j v_j$.

Cum *prob*($P_i = P_j(v_j)$) = 0 (datorită distribuţiei uniforme), funcţia celui mai bun răspuns este soluţia problemei:

$$\max_{P_i}(v_i - P_i)prob(P_i > a_j + c_j v_j). \tag{4.43}$$

Evident, putem restrânge spaţiul strategiilor, deoarece este stupid pentru jucători să facă oferte mai mici decât a_j (minimul oferit de celălalt) sau mai mari decât suma maximă $(a_j + c_j)$ ce o poate oferi celălalt.

Deci $a_j \le P_j \le a_j + c_j$.

Atunci:

$$prob(P_i > a_j + c_j v_j) = prob\left(v_j < \frac{P_i - a_j}{c_j}\right) = \frac{P_i - a_j}{c_j}. \tag{4.44}$$

Deci cel mai bun răspuns al jucătorului *i* va fi:

$$P_i(v_i) = \begin{cases} \frac{a_i + a_j}{2}; daca \quad v_i \ge a_j \\ a_j; daca \quad v_i < a_j \end{cases}. \tag{4.45}$$

În continuare vom discuta existenţa cehilibrului în raport cu a_j şi c_j.

Daca $a_j \in (0,1)$ atunci $P_i(v_i)$ nu este liniară (figura 4.6):

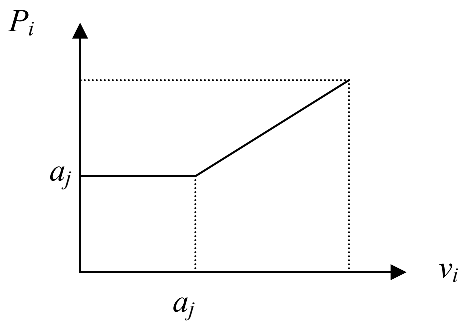

Figura 4.6

Deci a_j este fie negativ $(a_j < 0)$, fie supraunitar$(a_j \geq 1)$.

Evident $c_j \geq 0$ (deoarece prețul oferit crește cu valoarea pe care o are tabloul).

Pentru $a_j \geq 1$ și $c_j \geq 0$ rezultă $P_j(v_j) = a_j + c_j v_j \geq 1$, absurd, deoarece $v_i \in [0,1]$, și ar rezulta a_j=1, c_j=0.

Deci $a_j \leq 0$ și de aici

$$P_i(v_i) = \frac{v_i + a_j}{2}. \tag{4.46}$$

Rezultă: $\begin{cases} P_1(v_1) = \dfrac{v_1 + a_1}{2} \\ P_2(v_2) = \dfrac{v_2 + a_1}{2} \end{cases}$, deci

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2}, a_1 = \dfrac{a_2}{2} \\ c_2 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{a_1}{2} \end{cases}. \tag{4.47}$$

Evident, $c_1 = c_2 = 0$ și $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.

De aici rezultă că $P_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$, *i=1,2.*

Observația1 Rezultatul jocului arată faptul că licitatorii vor oferi jumătate din prețul maxim ce ar fi dispuși să-l ofere pentru tabloul respectiv, cu alte cuvinte nu se poate extrage întreaga rentă a jucătorului de către organizatorul licitației.

Observația2 Se poate demonstra relativ ușor faptul că, pentru alte forme ale funcției de preț $P_i(v_i)$, condiția pentru ca un echilibru să existe și să fie unic este liniaritatea funcției de preț *P*.

4.6. Principiul revelației

Să presupunem că avem un joc cu *n +1* jucători, și anume:

- un jucător principal *(P),* jucătorul *0*, care nu deține informație privată;
- *n* jucători de tip $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, cu $\theta_i \in \Theta$.

Jucătorul principal nu cunoaște tipul θ al celorlalți *n* jucători, dar presupune că fiecare dintre tipurile θ_i poate fi întâlnit cu probabilitatea p_i.

Obiectul mecanismului design este acela de a determina o alocație *y ={x,t},* care constă dintr-un vector *x* (o decizie ce aparține unei mulțimi compacte, convexe și nevide) și *t* (un vector de transfer monetar de la jucătorul principal către ceilalți jucători – eventual acest transfer poate fi și negativ).

Jucătorii $i=1,\dots,n$ au funcţii de câştig de tip von Neumann-Morgenstern, descrise prin $u_i(y,\theta)$.

Presupunem că funcţiile de câştig u_i sunt strict crescătoare în raport cu transferurile t_i, iar u_0 este strict descrescătoare în raport cu t_i şi, în plus, sunt de două ori diferenţiabile.

Dacă $\{y(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ sunt tipuri continue de jucători, atunci, pentru jucătorul i, $i=1,\dots,n$, câştigul aşteptat va fi:

$$u_i(\theta_i) = E_{\theta,-i}[u_i(y(\theta_i,\theta_{-i}),\theta_i,\theta_{-i})/\theta_i] \qquad (4.48)$$

iar pentru jucătorul principal:

$$u_0 = \underset{\theta}{E}\, u_0(y(\theta),\theta) \qquad (4.49)$$

În aplicaţiile cu care vom opera, câştigurile jucătorilor depind doar de transferul propriu t_i şi de tipul său θ_i, nu şi de tipurile celorlalţi jucători θ_{-i} sau transferurile lor t_{-i}.

Aplicaţii economice

1) Discriminarea de preţ, unde x=cantitatea cumpărată de consumator
   - t-preţul plătit pentru bunul consumat
   - θ-tipul consumatorului, dat de nivelul surplusului consumatorului.

2) Reglementarea – cu x-vector de preţuri (sau costuri)
   - t-venitul firmei
   - θ-parametru tehnologic al firmei.

3) Impozitarea veniturilor – x-veniturile agenţilor
   - t-dimensiunea impozitului plătit de agenţii economici
   - θ-capacitatea agentului de a economisi bani.

4) Venituri publice – x-cantitatea de bun public oferită
   - t_i-contribuţiile monetare ale consumatorilor la finanţarea producţiei de bun public
   - θ-tipul consumatorului în raport cu surplusul consumatorilor de bun public.

5) Licitaţii – x_i-probabilitatea ca licitatorii să cumpere bunul
   - t_i-suma plătită pentru bun de cel care va câştiga licitaţia
   - θ_i-preferinţele consumarorului pentru bunul i.

6) Negocieri – x-cantitatea vândută
   - t_1-transferul monetar către vânzător
   - t_2-transferul (negativ) monetar către cumpărător ($t_1+t_2=0$)
   - $\theta_1=c$ – costul producătorului
   - $\theta_2=v$ – preferinţele consumatorului.

Definiţia 4.4

Vom numi *mecanism* sau *contract* dat de un anunţ de mesaje $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_I)$ ce aparţine spaţiului mesajelor M_i. M

Tipul jucătorilor este informaţie privată şi de aici mecanismul y_n: $M_i \rightarrow YxR^n$, poate să depindă de $\theta=(\theta_1,...,\theta_I)$.

Definiţia 4.5

Vom numi mecanism direct acel mecanism în care spaţiul mesajelor este spaţiul tipurilor de jucători, respectiv $M = \Theta$.

Observaţie. Un mesaj reprezintă un anunţ, o operaţiune efectuată de către unul dintre jucători.

Dacă spaţiul mesajelor (anunţurilor) este Θ_i, spaţiul tipurilor pentru fiecare jucător, atunci fiecare dintre aceştia îşi anunţă tipul – care poate fi cel adevărat sau poate să mintă.

Fie $\hat{\theta} \equiv (\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_n)$ tipurile declarate de către jucători. Atunci definim aceste tipuri prin: $\bar{y}(\hat{\theta}) = y_m(\mu^*(\hat{\theta}))$, unde $\mu^*(\hat{\theta}) = (\mu_1^*(\theta_1^*),...,\mu_n^*(\hat{\theta}_n))$.

Pentru jocul descris anterior, declararea de către fiecare jucător a *tipului real* (deci declararea adevărului) constituie un echilibru bayesian al jocului, dat fiind μ_i^*, un echilibru bayesian al jocului iniţial, $\forall i$ şi Θ_i.

Teoremă (principiul revelaţiei) Gibbard, Green-Laffont, Myerson.

Fie un mecanism cu spaţiul mesajelor M_i şi funcţia de alocare $y_m(.)$ ce are un echilibru bayesian $y^*(\cdot) = \{\mu_i^*(\theta_i)\}_{i=1,n}$, $\theta_i \in \Theta_i$. Atunci există un mecanism direct revelator $\bar{y} = y_m \circ y^*$ astfel încât spaţiul mesajelor este chiar spaţiul tipurilor agenţilor (jucătorilor), $M_i = \Theta_i$, şi există un echilibru bayesian în care fiecare agent acceptă mecanismul propus şi relevă adevăratul tip.

Observaţie. Echilibrul asociat (bayesian) poate să nu fie unic (principiul revelaţiei ne asigură doar de existenţa echilibrului, nu şi de unicitatea acestuia). Printre acestea se vor găsi şi echilibre "necredibile", dar pot fi eliminate prin îmbogăţirea spaţiului mesajelor cu informaţii care nu influenţeaza echilibrul real, dar le elimină pe cele necredibile.