Curs 1
Noțiuni generale ale teoriei jocurilor

Introducere

Teoria jocurilor este o ramură relativ nouă a microeconomiei dezvoltată în ultimii 60 de ani. Ea a apărut odata cu publicarea lucrării "*The Theory of Games and Economic Behaviour"* de către John von Neumann şi Oskar Morgenstern în 1944. Aceştia au definit jocul ca "*orice interacțiune între diverşi agenți, guvernată de un set de reguli specifice care stabilesc mutările posibile ale fiecărui participant şi câştigurile pentru fiecare combinație de mutări*". Această descriere se poate aplica aproape oricărui fenomen social. Astfel încât se aştepta de la această ştiința rezolvarea tuturor situațiilor în care oamenii realizează că rezultatul acțiunilor lor depinde nu numai de acestea, dar şi de acțiunile celorlalți participanți la acea interacțiune.

De la comportamentul în trafic până la decizii de producție şi de la războiul prețurilor la decizia de a avea copii, totul părea că va fi analizat ştiințific cu ajutorul teoriei jocurilor. Deşi nu a satisfăcut toate aceste aşteptări, teoria jocurilor şi-a găsit numeroase aplicații în domeniul ştiințelor sociale, inclusiv, sau, poate, mai ales în domeniul economiei.

Teoria jocurilor utilizează trei ipoteze fundamentale: *jucătorii se comportă rațional*; *fiecare ştie că ceilalți sunt raționali*; *toți jucătorii cunosc regulile jocului*.

Pentru a înțelege un joc oarecare este necesară mai întâi cunoaşterea regulilor acestuia, deoarece astfel se poate afla care acțiuni sunt permise (posibile) la un anumit moment. Apoi este necesar a se cunoaşte cum aleg jucătorii o acțiune din mulțimea acțiunilor posibile.

Problema alegerii acțiunilor de către jucători este legată de primele două ipoteze amintite anterior.

Jucătorul care are un comportament rațional are anumite preferințe asupra "lucrurilor": el preferă mierea - zahărului, muzica clasică - jazz-ului, etc.; acest jucător este rațional deoarece el va alege acea acțiune care îi va satisface cel mai bine preferințele sale. Se poate spune, în consecință, că jucătorul rațional are o anumita ierarhie a preferințelor, astfel încât este posibilă exprimarea acestora cu ajutorul unor funcții de utilitate.

Se poate observa că ipotezele cu care operează teoria jocurilor sunt aceleaşi cu care se lucrează în economie şi în alte domenii.

Definiția 1. Jocul cu *n* jucători este o succesiune de decizii şi evenimente aleatoare, simultane sau nu, care respectă o anumită structură a câştigului, dată de anumite reguli de funcționare (regulile jocului).

Evenimentul aleator presupune o distribuție de probabilitate asupra unui câmp de evenimente.

Regulile jocului vor indica modul în care se iau deciziile de către jucători şi ordinea acestora.

Un jucător este *rațional* dacă va căuta să-şi maximizeze satisfacția în raport cu deciziile proprii, dar ținând cont de deciziile celorlalți jucători.

Definiția 2. Vom numi *strategie* a unui jucător, o acțiune realizabilă (posibilă), pe care jucătorul o poate alege în cadrul jocului. Mulțimea strategiilor jocului este dată de mulțimea strategiilor tuturor jucătorilor.

Vom nota mulțimea strategiilor jocului astfel:

$S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$,
unde *n* este numărul de jucători.

În unele situații, *natura* (hazardul) este al *(n + 1)* - lea jucător.

Definiția 3. Numim *funcție de câştig* a jocului funcția $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$, formată din funcțiile de câştig ale fiecărui jucător. Notând funcția de câştig a fiecărui jucător u_i şi funcțiile de câştig ale celorlalți jucători u_{-i}, funcția de câştig a jocului va fi: $u : S \rightarrow R$, $u = (u_i, u_{-i})$.

Definiția 4. Numim strategie optimală acea strategie care maximizează câştigul jucătorului *i*, indiferent de strategiile alese de ceilalți jucători.

Echilibrul Nash (care a preluat numele creatorului sau, John Nash) este o mulțime de strategii $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ care respecta condiția:

$$u_i (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*) \quad \forall\, i = 1, n$$

sau

$$u_i (s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i (s_i, s_{-i}^*), \ \forall\, i = 1, n$$

În continuare vom aminti o clasificare a jocurilor în raport cu diverse criterii:

a. în raport cu modul în care comunica jucători între ei avem
- jocuri cooperative;
- jocuri necooperative.

Jocurile cooperative sunt acele jocuri în care jucătorii comunică liber între ei înainte de luarea deciziilor şi pot face promisiuni (care vor fi respectate) înainte de alegerea strategiilor.
Jocurile necooperative sunt jocurile în care jucătorii nu comunică între ei înainte de luarea deciziilor.

b. în raport cu desfăşurarea în timp a jocurilor
- jocuri statice
- jocuri dinamice

Jocul static este acel joc în care deciziile jucătorilor se iau simultan, după care jocul ia sfârşit.
Jocul dinamic este acel joc în care deciziile jucătorilor sunt secvențiale, adică evoluează în timp.

c. în raport cu natura informației
- jocuri în informație completă
- jocuri în informație incompletă

Jocul în informație completa este acel joc în care toți jucători cunosc numărul celorlalți jucători, strategiile fiecăruia, funcțiile de câştig ale fiecăruia, precum şi regulile jocului.
Jocul în informație incompleta este jocul în care cel puțin unul dintre jucători nu cunoaşte una sau mai multe funcții de câştig ale celorlalți jucători, restul elementelor (numărul celorlalți jucători, strategiile fiecăruia şi regulile jocului) fiind cunoscute.

d. în cazul jocurilor dinamice, în raport cu tipul informației

- jocuri în informație perfectă
- jocuri în informație imperfectă

Jocul dinamic în informație perfectă este jocul dinamic în care fiecare dintre jucători cunoaşte regulile, numărul jucătorilor, strategiile acestora, precum şi evoluția în timp a jocului (istoria jocului).

Jocul dinamic în informație imperfectă este jocul dinamic în care măcar unul dintre jucători nu cunoaşte istoria jocului, cunoscând celelalte elemente.

e. în raport cu structura câştigurilor
- jocuri de sumă nulă
- jocuri de sumă nenulă

Jocul de suma nula este acel joc în care suma câştigurilor este zero .
Jocul de suma nenula este jocul în care suma câştigurilor este diferita de zero.

f. în raport cu numărul de jucători
- jocuri cu doi jucători
- jocuri multipersoană
- jocuri contra naturii.

Exista patru clase de jocuri care vor fi analizate în primele patru capitole ale cursului: jocuri statice în informație completă, jocuri dinamice în informație completă, jocuri statice în informație incompletă şi jocuri dinamice în informație incompletă. Corespunzător celor patru clase de jocuri, există patru tipuri de echilibre în jocuri: *echilibrul Nash, echilibrul perfect în subjoc, echilibrul Bayesian, echilibrul Bayesian perfect.*

Jocuri statice în informație completă

Jocuri sub formă normală

Un *joc sub formă normală* (sau strategică) este definit prin trei elemente: mulțimea jucătorilor $i \in \mathcal{P}$, cu $\mathcal{P}=\{1,2,..I\}$ o mulțime finită, spațiul strategiilor pure S_i pentru fiecare jucator i şi funcțiile de câştig (sau de plată) u_i .

Vom nota acest joc cu $G = \{S_1,...,S_I;u_1,...u_I\}$.

Vom numi *strategie pură* $s_i \in S_i$ pentru jucătorul i acțiunea realizabilă care poate fi aleasă de jucătorul i din spațiul strategiilor pure S_i şi care îi va aduce câştigul $u_i(s)$.

Vom nota cu $s \in \times S_i$, $s = (s_1, s_2..., s_I)$ vectorul acțiunilor realizabile alese la un moment dat de către jucători (uzual, vom mai nota $s = (s_i, s_{-i})$, cu $s_{-i} = (s_1,..., s_{i-1}, s_{i+1},..., s_I)$ fiind acțiunile (strategiile) alese de către jucătorii care joacă împotriva jucătorului i).

Funcțiile de câştig $u_i(s)$ sunt definite ca funcții de utilitate de tip von Neumann – Morgenstern pentru fiecare profil al strategiilor realizabile $s = (s_1,..., s_I)$, adică în funcție de strategiile alese de către toți jucătorii.

De exemplu, la nivelul unui agent economic această funcție de utilitate poate fi nivelul profitului, nivelul încasărilor sau nivelul costului. Pentru analiştii politici, aceste câştiguri pot fi numărul de voturi câştigate sau alegerea unei platforme electorale.

O categorie specială de jocuri o constituie *jocurile de sumă nulă*. În cazul acestor jocuri, suma câştigurilor este zero, $\sum_{i=1}^{I} u_i(s) = 0 \ , \forall s \in \times S_i$, adică pierderea unor jucători reprezintă câştigul celorlalți. Cum aceste jocuri reprezintă doar un caz particular, este mai interesantă analiza jocurilor în general, indiferent de suma utilităților (a câştigurilor).

Faptul că jocul se desfăşoară în informație completă presupune că jucătorii ştiu care sunt strategiile realizabile ale tuturor, precum şi care sunt funcțiile de câştig ale fiecăruia, în funcție de strategiile alese.Vom numi acestea „ cunoştință comună".

Exemplul 1. Dilema prizonierului

Să considerăm exemplul clasic al „dilemei prizonierului". Aceasta presupune că doi suspecți sunt arestați, fiind învinuiți de comiterea unei crime. Ei sunt anchetați în camere separate, şi fiecare are la dispoziție două variante de răspuns: fie să păstreze tăcerea, adică să nege că ar fi comis crima, fie să îl acuze pe celălalt prizonier. Dacă suspecții se acuză reciproc, atunci ei vor primi ca pedeapsă câte 7 ani de închisoare. Dacă ambii neagă, atunci pedeapsa va fi de 1 an închisoare pentru fiecare, iar dacă unul neagă, iar celălalt acuză, atunci cel care acuză va fi eliberat , iar cel care neagă va fi pedepsit cu 10 ani de închisoare.

În această descriere a jocului avem toate elementele necesare pentru un joc sub formă normală (strategică). Mulțimea jucătorilor este finită, $i \in \{1,2\}$, mulțimea strategiilor pentru fiecare jucător este aceeaşi, $S = \{A, N\}$ (cu *A = Acuză*, *N = Neagă*), iar funcțiile de câştig vor fi:

$$u_1(A,A) = -7\,; u_1(A,N) = 0\,;\; u_1(N,A) = -10\,; u_1(N,N) = -1\,;$$
$$u_2(A,A) = -7\,; u_2(A,N) = -10\,; u_2(N,A) = 0\,; u_2(N,N) = -1\,.$$

Acest joc în formă normală poate fi reprezentat şi sub *formă matriceală*.

Matricea jocului va conține toate elementele necesare descrierii unui joc în formă normală, adică jucătorii, strategiile disponibile şi funcțiile de câştig .

În cazul nostru avem:

		Prizonier2	
		A	*N*
Prizonier1	*A*	-7,-7	0,-10
	N	-10,0	-1,-1

Figura 1

Liniile şi coloanele matricii indică strategiile realizabile ale jucătorilor (strategiile pure), iar celulele matricii vor conține câştigurile fiecărui jucător, în funcție de strategiile alese, cu primul număr indicând câştigul jucătorului1, iar al doilea pe cel al jucătorului 2.

Vom defini *o strategie mixtă* a jucătorului *i* o distribuție de probabilitate p_i asupra mulțimii strategiilor realizabile (pure). Dacă vom nota cu $\mathcal{P}$ spațiul strategiilor mixte, el va fi produsul cartezian al strategiilor mixte realizabile pentru fiecare jucător: $\mathcal{P} = \times \mathcal{P}_i$, cu $p_i \in \mathcal{P}_i$.

Suportul (baza) unei strategii mixte va fi format din strategiile pure pe care le au la dispoziție jucătorii, care au asignate probabilități pozitive de a fi alese. Câştigul jucătorului *i* care va juca strategia mixtă p_i este:

$$u_i(p_i(s)) = \sum_{s_j \in S} p_i(s_j) \cdot u_i(s).$$

Evident, $\sum_j p_i(s_j) = 1$.

Observație. Putem considera strategiile mixte şi ca o generalizare a strategiilor pure, dacă $p_i = (0,0,..,1,..,0)$, cu probabilitatea 1 corespunzător strategiei pure $s_j \in S_i$ şi 0 pentru toate celelalte.

Strategii dominate

Vom explica acest concept pornind de la exemplul precedent. În cazul jucătorului *2*, el poate juca fie *A*, fie *N*. Dacă primul jucător va juca *A*, atunci *2* are de ales între a juca *A* şi a avea câştigul *(-7)* sau a juca *N* şi a avea câştigul *(–10).* Evident că el va prefera să joace *A*, deoarece stă mai puțin în închisoare. Dacă *1* joacă *N,* atunci *2* poate juca *A*, cu cu câştigul *(0)* sau *N*, cu câştigul *(–1).* Evident, el va alege tot *A*.

Cu alte cuvinte, indiferent ce ar alege jucătorul 1, pentru jucătorul 2 este mai bine să joace *A* decât *N,* adică vom spune că strategia *N* (de a nega) este dominată de strategia *A* (de a acuza). Un raționament asemănător se face şi pentru jucătorul 1, strategia *N* fiind dominată de către strategia *A*. Putem da acum următoarea definiție:

Definiția 5. În jocul sub forma normală $G = \{S_1,...,S_I; u_1,...u_I\}$, fie s_i' şi s_i'' două strategii realizabile pentru jucătorul i ($s_i', s_i'' \in S_i$). Vom spune că strategia s_i' este *strict dominată (dominată)* de strategia s_i'', dacă oricare ar fi combinația de strategii realizabile ale celorlalți jucători, câştigul jucătorului *i* dacă joacă s_i' este strict mai mic (respectiv mai mic sau egal) decât câştigul pe care îl are jucând s_i'':

$$u_i(s_1,..s_{i-1}, s_i', s_{i+1},..,s_I) < u_i(s_1,..,s_{i-1}, s_i'', s_{i+1},..,s_I)$$

(sau $u_i(s_i', s_{-i}) \le u_i(s_i'', s_{-i})$)

cu $s_{-i} \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_I$.

Vom presupune că jucătorii raționali (vom înțelege prin jucător rațional acel jucător care urmăreşte întotdeauna maximizarea câştigului propriu in funcție de alegerea strategiilor de către ceilalți jucători) nu vor alege niciodată să joace o strategie dominată.

Pentru jocul nostru, vedem că soluția (echilibrul) jocului este ca fiecare jucător să joace *A*, adică *(A,A).* Analog, putem defini o strategie strict dominantă (slab dominantă):

Definiția 6. Strategia pură s_i este strict dominantă (slab dominantă) pentru jucătorul *i* dacă $p_i' \in \mathcal{P}_i$ astfel încât $u_i(P_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$, $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ (sau $u_i(P_i', s_{-i}) \ge u_i(s_i, s_{-i})$).

Procesul de determinare a echilibrului reprezintă algoritmul de eliminare iterativă a strategiilor strict dominate.

Echilibrul Nash

Definiția 7 În jocul sub formă normală $G = \{S_1,...,S_I; u_1,...u_I\}$,strategiile pure $\left(s_1^*,..,s_I^*\right)$ constituie un *echilibru Nash* dacă pentru fiecare jucător *i*, s_i^* este cel mai bun răspuns la strategiile celorlalți I - 1 jucători $\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right)$, adică:

$$u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right) \geq u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right) \ , \ \forall s_i \in S_i$$

sau s_i^* va fi soluția problemei:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right)$$

Extinzând definiția şi în spațiul strategiilor mixte vom avea:

Definiția 8. O strategie profil mixt $p^* = \left(p_i^*, p_{-i}^*\right)$ constituie un *echilibru Nash* al jocului $G = \{S_1,...,S_I; u_1,...u_I\}$dacă oricare ar fi jucătorul *i*, atunci $u_i\left(p_i^*, p_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, p_{-i}^*\right)$, $\forall s_i \in S_i$.

Observație. Strategia s_i^* care asigura maximizarea câştigului jucătorului *i* in raport cu strategiile jucate de ceilalți jucături se mai numeste *"cel mai bun răspuns"* (best response) al jucătorului *i* la strategiile alese de ceilalți.

Cu alte cuvinte, $s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} \ u_i\left(s_1^*,..s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,..,s_I^*\right)$

Vom spune că un echilibru Nash este *puternic (strict)* dacă fiecare jucător are un cel mai bun răspuns la strategiile oponenților unic (adică s^* este un echilibru Nash *puternic (strict)* dacă $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) > u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$) oricare ar fi jucătorul *i*).

Un echilibru Nash este *slab (nestrict)* dacă el nu este unic. În cazul echilibrului obținut prin eliminarea iterativă a strategiilor dominate, acesta este un echilibru Nash puternic, deoarece este unicul echilibru al jocului, iar strategiile alese de jucători sunt cel mai bun răspuns posibil (deoarece le-am eliminat pe toate celelalte care nu sunt răspunsuri acceptabile).

Deci atât în cazul „*dilemei prizonierului*", cât şi în cazul jocului prezentat anterior, avem un echilibru Nash unic, (*Acuză,Acuză*) în primul caz, respectiv (*S,M*) în al doilea.

Determinarea echilibrului prin algoritmul maximizării câştigurilor relative (al celui mai bun răspuns)

Să determinăm echilibrul Nash al jocului prezentat în figura 2 :

		Jucător2		
		St	M	D
	S	1,<u>3</u>	<u>3</u>,1	3,2
Jucător1	M	<u>3</u>,1	1,<u>3</u>	3,2
	J	2,3	2,3	<u>4</u>,<u>4</u>

Figura 2

Algoritmul este următorul: pentru fiecare jucător *i* vom determina cel mai bun răspuns pe care îl poate da în raport cu alegerile celorlalţi jucători. (În matricea jocului, vom sublinia câştigurile jucătorului *i* ce sunt obţinute prin alegerea celui mai bun răspuns). Dacă există o combinaţie de strategii care să maximizeze câştigurile tuturor jucătorilor (respectiv o casuţă a matricei în care să fie subliniate ambele câştiguri) atunci acesta constituie echilibrul Nash al jocului determinat prin algoritmul celui mai bun răspuns.

Aplicând acest algoritm jocului din figura 2 rezultă: dacă jucătorul *1* ar juca strategia *S*, atunci pentru jucătorul *2* cel mai bun răspuns este să joace *St*, deoarece $3>1$ şi $3>2$, deci vom sublinia câştigul corespunzător, 3, care corespunde strategiei *St*. Dacă *1* ar juca *M,* atunci *2* va juca *M* ($3>1$; $3>2$), şi vom sublinia câştigul 3 ce corespunde strategiei M, iar dacă *1* ar juca *J*, atunci *2* va juca *D,* obţinând câştigul 4, pe care îl vom sublinia. Procedăm în mod analog şi pentru jucătorul *2*. Dacă *2* ar juca strategia *St* atunci cel mai bun răspuns al jucătorului *1* este să joace *M* cu câştigul 3, pe care îl vom sublinia. Dacă *2* joacă *M* atunci *1* joacă *S,* cu câştigul 3, subliniat, iar dacă *2* joacă *D*, atunci *1* joacă *J,* cu câştigul 4, subliniat la rândul său.

Observăm că cele mai bune răspunsuri ale jucătorilor *1* şi *2* au un punct comun, respectiv jucătorul *1* să joace strategia *J* iar jucătorul *2* să joace strategia *D*. Aceasta corespunde situaţiei în care în căsuţa *(J,D)* a matricei câştigurilor sunt subliniate ambele câştiguri, (4,4).

Acesta este unicul echilibru Nash al jocului (fiind un echilibru Nash strict).

Exemplu. *Bătălia sexelor*

Să considerăm acum un alt joc celebru şi anume „*bătălia sexelor*”. Acest joc constă în următoarele: într-o familie, soţul şi soţia trebuie să decidă unde vor merge într-o seară pentru a se distra, având de ales între a merge la un meci de fotbal şi a merge la teatru. Dintre aceste variante, soţul preferă să meargă la fotbal, iar soţia la teatru. Dacă unul din ei cedează, atunci cel care cedează va avea câştigul 2, iar cel care nu cedează, va câştiga 4. În cazul în care nici unul nu cedează, atunci vor ramâne acasă, iar câştigul fiecăruia va fi 0.

Matricea jocului este următoarea:

		Soţie *F*	Soţie *T*
Soţ	*F*	<u>4</u>,<u>2</u>	0,0
	T	0,0	<u>2</u>,<u>4</u>

Figura 3

Să determinăm care este echilibrul Nash al acestui joc, prin algoritmul maximizării câştigurilor relative: dacă soţul alege să meargă la fotbal, atunci cel mai bun răspuns al soţiei este să cedeze, (deoarece dacă nu cedează câştigă 0, în timp ce dacă va ceda va câştiga 2). Dacă soţul alege să meargă la teatru, evident pentru soţie este optim să aleagă aceeaşi strategie. Raţionând analog şi pentru soţie, obsevăm că în cazul acestui joc, avem două echilibre Nash în strategii pure, adică *(F,F),* respectiv *(T,T),* cu câştigurile (4,2), respectiv (2,4).

Cum deja am găsit două echilibre Nash ale jocului, intrebarea care se pune în continuare este aceea de a vedea dacă nu mai sunt şi alte echilibre. Pentru aceasta vom căuta echilibre în strategii mixte.

Algoritmul determinării echilibrului în strategii mixte

Prin acest algoritm vom determina echilibrul (sau echilibrele) în strategii mixte. Pentru aceasta vom asocia fiecărei strategii pure a jucătorului *i* o anumită probabilitate. Pentru fiecare jucător, mulţimea strategiilor formează un câmp complet de evenimente, deci suma probabilităţilor asociate va fi unitară. În continuare, pentru fiecare strategie vom determina câştigul aşteptat. Vom elimina din calcule strategiile dominate - sau le asociem probabilitatea nulă (0) de a fi jucate – şi vom determina probabilităţile pentru care câştigurile aduse de strategiile nedominate sunt egale. Acesta va constitui echilibrul jocului în strategii mixte.

Observaţie. Probabilităţile asociate strategiilor reprezintă ipoteze pe care le fac ceilalţi jucători despre modul în care va juca jucătorul *i*.

În cazul *bătăliei sexelor* vom avea: presupunem că soţia crede că soţul va merge la fotbal cu probabilitatea p_1 şi la teatru cu probabilitatea $1- p_1$,iar soţul crede că soţia va merge la fotbal cu probabilitatea p_2, respectiv la teatru cu probabilitatea $1- p_2$. În figura 4 avem reprezentarea sub formă matriceală :

			Soţie	
			p_2	$1-p_2$
			F	T
Soţ	p_1	*F*	4,2	0,0
	$1-p_1$	*T*	0,0	2,4

Figura 4.

Atunci câştigul asociat strategiei mixte *(p_1, $1- p_1$)* este câştigul aşteptat de soţie dacă alege să meargă la teatru, respectiv la fotbal. Astfel, atunci utilitatea aşteptată a soţiei va fi:

$$u_2\left((p_1,1-p_1);F\right)=2\cdot p_1+0\cdot(1-p_1)=2p_1$$
$$u_2\left((p_1,1-p_1);T\right)=0\cdot p_1+4\cdot(1-p_1)=4-4p_1.$$

La echilibru, $u_2\left((p_1,1-p_1);F\right)=u_2\left((p_1,1-p_1);T\right)$ şi $p_1 + p_2 = 1$

Din rezolvarea sistemului rezultă $p_1 = 2/3$.

Deci dacă soţia crede că soţul doreşte să meargă la fotbal cu o probabilitate $p_1 > 2/3$ atunci soţia va alege să meargă la fotbal, (adică $p_2 = 1$), iar dacă $p_1 < 2/3$ atunci deci va alege să meargă la teatru ($p_2 = 0$).

În cazul în care $p_1 = 2/3$ atunci îi este indiferent ce alege, deoarece câştigul aşteptat este acelaşi.

Cu alte cuvinte, dacă $p_1 > 2/3$, atunci cel mai bun răspuns al soţiei este să meargă la fotbal, iar dacă $p_1 < 2/3$ atunci cel mai bun răspuns al soţiei este să meargă la teatru.

Raționând analog şi pentru soț, vom obține $p_2 = 1/3$, adică soțul va alege să meargă la fotbal dacă el crede că soția doreşte să meargă la fotbal cu o probabilitate $p_2 > 1/3$ şi să meargă la teatru, dacă $p_2 < 1/3$, fiind indiferent unde va merge dacă $p_2 = 1/3$.

Prin urmare, mai există un echilibru Nash al jocului, echilibru în strategii mixte, pentru care strategiile mixte sunt: $\left(p_1^*, p_2^*\right) = \left((2/3, 1/3), (1/3, 2/3)\right)$.

Existența echilibrului Nash

În paragraful anterior, am definit echilibrul de tip Nash şi am arătat modul în care poate fi determinat. Întrebarea care se impune în continuare este următoarea: în ce condiții există un echilibru de tip Nash? Răspunsul la această întrebare este dat de teorema lui Nash:

Teorema Nash Orice joc finit sub formă normală are un echilibru în strategii mixte.

Observație. În cazul în care găsim un echilibru în strategii pure, el poate fi asimilat unui echilibru în strategii mixte, în care probabilitățile de realizare ale tuturor strategiilor sunt 0, mai puțin strategia care constituie echilibrul, care va avea probabilitatea de realizare 1.

Un rezultat mai puternic a fost dat de Debreu(1952), prin următoarea teoremă:

Teorema Debreu Fie un joc sub formă normală în care spațiul strategiilor S_i este o mulțime nevidă, compactă şi convexă şi aparține unui spațiu euclidian (nu neapărat finit). Dacă funcțiile de câştig u_i sunt continue în S şi cvasi-concave în S_i atuci există un echilibru Nash în strategii pure.

O problemă ce poate apare aici este interpretarea echilibrului în strategii mixte. Ce reprezintă acest echilibru? Dacă în strategii pure descrierea acestui echilibru este suficient de clară – ea reprezintă strategia ce trebuie aleasă asfel încât să se maximizeze funcția de câştig (sau utiliatea) jucătorilor – un echilibru în strategii mixte este mai dificil de înțeles.Cum se alege o strategie mixtă în condiții practice? Aici apare acea doză de incertitudine datorată probabilităților de alegere a uneia sau alteia din strategii (pentru că, în final, se va juca o strategie pură şi nu una mixtă!). Conceptul de strategie mixtă ne ajută însă în a determina punctul de echilibru, respectiv optimul unui joc. Apoi, alegerea uneia sau alteia din strategii se va face în funcție de cât de apropiată este de strategia mixtă optimală – în cazul în care avem de-a face cu strategii exprimate în formă discretă.

Problema este rezolvată în cazul unor strategii sub formă continuă (aşa cum ne asigură şi teorema anterioară), în acest caz determinându-se cu precizie strategiile ce trebuie adoptate pentru a se realiza maximizarea câştigului.

În cazul în care avem un joc al cărui soluție poate fi determinată prin algoritmul de determinare iterativă prin eliminarea strategiilor dominate, atunci echilibrul este şi unic. Aceasta poate fi rezumat în următoarea propoziție:

Propoziție

Într-un joc cu n jucători sub formă normală, $G = \{S_1,...,S_n; u_1,...,u_n\}$ dacă există un echilibru obținut prin eliminarea strategiilor strict dominate atunci acesta este unicul echilibru Nash al jocului.

Observații.

a) pentru jocurile în care strategiile sunt dintr-un spațiu discret, dacă există un echilibru în strategii pure unic, atunci acel echilibru poate fi determinat prin algoritmul maximizării câştigurilor relative. În plus, toate echilibrele în strategii pure pot fi determinate prin acest algoritm.

b) Dacă nu poate fi determinat echilibrul prin algoritmul maximizării cîştigurilor relative, atunci pentru jocul considerat există doar echilibre (sau echilibru) în strategii mixte.

Jocuri dinamice în informație completă

Jocuri dinamice în informație completă şi perfectă

Un joc dinamic este acel joc în care alegerile jucătorilor sunt efectuate la diverse momente de timp.

Un exemplu clasic pentru asemenea jocuri este aşa numitul „joc al grenadei”. Iată în ce constă acesta: un individ care are în mână o grenadă îi spune unui al doilea: daca nu îmi dai 1 milion de USD voi detona grenada şi vom muri împreună. În aceste condiții celalalt jucător poate fie să-i dea banii, fie să nu îi dea, riscând ca celălalt să detoneze grenada.

În acest joc vedem că există trei momente în care se fac alegerile jucătorilor, şi anume: amenințarea primului jucător, apoi decizia celui de-al doilea de a da sau de a nu da banii şi în sfârşit decizia celui cu grenada de a o detona sau nu.

Definiția 9. Vom numi *istorie a jocului* h^{t+1} la momentul *t+1* (sau în etapa *t+1*) secvența de decizie pe care au luat-o jucătorii în cele *t* etape anterioare ale jocului.

$$h^{t+1} = (s^0, s^1, \ldots, s^t)$$

În aceste condiții vom defini mulțimea acțiunilor posibile pentru jucătorul *i* ca fiind:

Definiția 10 Vom numi *acțiune fezabilă* a jucătorului *i* la momentul (etapa) *t+1* acea acțiune ce poate fi aleasă de jucătorul *i* din mulțimea acțiunilor pe care le are la dispoziție. Vom nota mulțimea acțiunilor posibile (fezabile) a jucătorului *i* la momentul *t+1* cu $A_i(h^{t+1})$.

Definiție 11. Vom numi *strategie pură* a jucătorului *i* un plan al acțiunilor pe care le va juca jucătorul în fiecare etapa *t*.

Dacă vom nota cu H^t mulțimea istoriilor jocului la momentul *t,* atunci $A_i(H^t) = \bigcup_{h^t \in H^t} A_i(h^t)$.

Definiția 12. Vom numi funcție de câştig a jucătorului *i* aplicația $U_i : H_i^{t+1} \to R$, $u_i(s_i, s_{-i}) : H_i^{t+1} \to R$.

Definiția 13 Un echilibru Nash în strategii pure pentru jocul dinamic $G_i = (S_i, u_i)$ va fi acea strategie care respectă condiția $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$ $\forall s_i^{'} \in S_i$ (cu alte cuvinte cea mai bună alegere posibilă a jucătorului *i* indiferent de alegerile celorlalți jucători).

Definiția 14. Vom numi *joc sub formă extinsă* acel joc dinamic în care se cunosc:

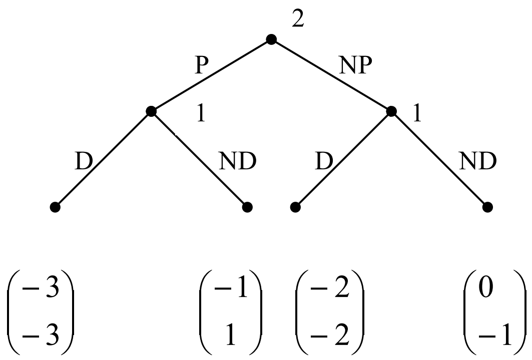
a) mulțimea jucătorilor;
b) mulțimea strategiilor fiecărui jucător;
c) ordinea în care jucătorii iau deciziile;
d) funcțiile de câştig ale jucătorilor.

Reprezentarea grafică a jucătorilor sub forma extinsă se face sub forma unui graf de tip arbore.

În acest graf vom avea următoarele elemente:

- nodurile grafului sunt momentele la care jucătorii aleg o strategie posibilă;
- arcele grafului reprezintă acțiunile alese ale jucătorilor;
- nodul inițial reprezintă momentul de început al jocului;
- nodurile finale indică sfârşitul jocului şi în dreptul lor sunt specificate câştigurile jucătorilor.

De exemplu, reprezentând sub forma extinsă jocul grenadei obținem:



Figura

Observație Vom presupune că graful ce descrie forma extinsă a jocului nu conține cicluri şi duble precedențe, cu alte cuvinte se poate defini o relație de ordine parțială pe acest graf: „x ≻ y” care înseamnă „nodul lui x este înaintea nodului y”.

Definiția 15. Vom numi „*cale*” a jocului mulțimea nodurilor şi arcelor ce conduc din nodul inițial într-un nod final.

Observație O „cale” a jocului poate fi identificată cu istoria finală a acestuia.

Definiția 16. Vom numi *joc în informație perfectă* acel joc în care toți jucătorii ştiu la orice moment t ce decizii s-au luat în etapa anterioară (la momentul $t-1$).

Definiția 17. Vom numi joc cu *memorie perfectă* (perfect recall) acel joc în care toți jucătorii ştiu istoria jocului de la momentul 0 până la momentul t.

Definiția 18. Vom numi *echilibru perfect în subjoc* (subgame perfect equilibrium) o strategie s care, pentru orice istorie h^t, $S(h^t)$ din $G(h^t)$ este un echilibru Nash al lui $G(h^t)$.

Determinarea echilibrului prin algoritmul inducției recursive (backward induction).

Fie un joc dinamic cu doi jucători, două etape, iar mulțimile strategiilor jucătorilor sunt S_1 şi S_2, iar funcțiile de câştig sunt U_1 şi U_2.

Desfăşurarea jocului este următoarea:

Jucătorul 1 alege acțiunea a_1 din S_1 în prima etapă. În etapa a doua jucătorul 2 observă alegerea jucătorului 1, deci pe a_1 şi alege acțiunea sa a_2 din S_2, după care jocul ia sfârşit. În acest moment câştigurile jucătorilor vor fi $u_1(a_1,a_2)$ respectiv $u_2(a_1,a_2)$.

Pentru jocul descris anterior vom formula algoritmul inducției recursive. Acest algoritm porneşte de la principiul că, la ultima etapă a jocului, jucătorul care urmează să decidă ştie deja care au fost strategiile alese de ceilalți deci în consecință va alege acea acțiune care să îi maximizeze câştigul.

Etapa 1. Jucătorul 2, observa alegerea jucătorului 1 şi caută acțiunea care să îi maximizeze câştigul:

$$R_2(a_1) = arg\max_{a_2 \in S_2} u_2(a_1, a_2)$$

Aceasta constituie funcția de reacție (funcția celui mai bun răspuns) a jucătorului 2 în raport cu acțiunea aleasă de jucătorul 1.

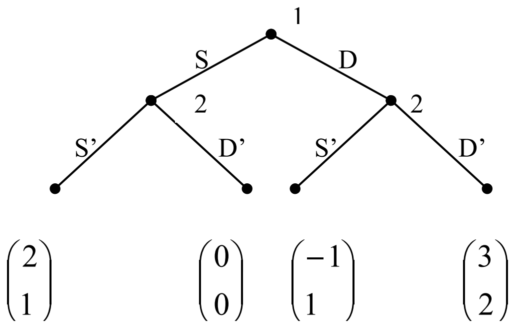
Etapa 2. Jucătorul 1 ştie că jucătorul 2 va juca $R_2(a_1)$ şi prin urmare va caută să-şi maximizeze câştigul prin alegerea strategiei:

$$a_1^* = arg\max_{a_1 \in S_1} u_2(a_1, R_2(a_1))$$

Reprezentarea jocurilor dinamice sub formă normală

Jocurile dinamice pot fi reprezentate sub formă normală, prin intermediul formei matriceale, dacă se va construi un plan complet de acțiune în raport cu strategiile care pot fi jucate de către ceilalți jucători. Acest plan este construit ex-ante, adică înainte de începutul jocului. După ce jocul începe vom discuta de istoria jocului.

Exemplu: Se consideră următorul joc descris sub forma extinsă:



Figura

Pornind de la forma extinsă vom construi forma normală echivalentă :

		2			
		(S',S')	(S',D')	(D',S')	(D',D')
1	**S**	2, 1	2, 1	0, 0	0, 0
	D	-1, 1	3, 2	-1, 1	3, 2

Figura

Aceasta formă normală se construieşte ca un plan complet de acțiune posibil în raport cu alegerile jucătorilor. (De exemplu, dacă jucătorul 1 alege strategia stânga (S), atunci jucătorul 2 poate alege S' sau D', dar neştiind ce a ales jucătorul 1, se gândeşte la 4 variante de câştig posibile, în raport cu ce ar fi putut juca primul jucător).

Pentru această formă putem determina echilibrul prin algoritmii descrişi în capitolul anterior. Astfel, jocul descris în figura 3.3 are un unic echilibru în strategii pure, şi anume *(D,D').*

Acelaşi echilibru rezultă şi în cazul în care aplicăm algoritmul inducției recursive.

Jocuri dinamice în informație imperfectă

Jocurile dinamice în informație imperfectă sunt acele jocuri în care jucătorii (unul sau mai mulți) nu cunosc istoria jocului (sau o etapa a acesteia).

Să reluăm jocul de la exemplul anterior, de acestă dată în informație imperfectă. (figura 3.4)

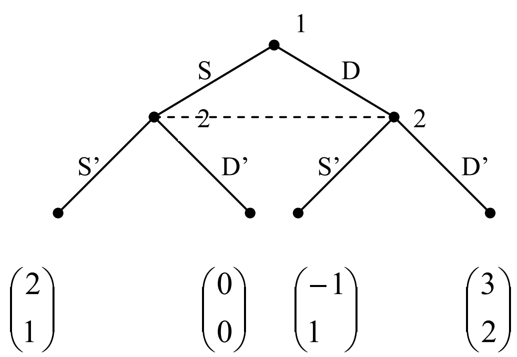


Figura 3.4

Observație Linia punctată din dreptul jucătorului 2 indică faptul că jucătorul 2 nu ştie care a fost strategia aleasă de jucătorul 1 (S sau D) în prima etapă a jocului. Aceasta situație poate fi considerată echivalentă cu faptul că jucătorul 2 alege simultan cu primul jucător strategia.

În acest caz putem reprezenta sub formă normală jocul în informație imperfectă, respectiv sub formă matriceală, ca în figura 3.5:

		2	
		S'	*D'*
1	*S*	2,1	0,0
	D	-1,1	3,2

Figura 3.5

În acest caz jocul are două echilibre, şi anume (S, S'), respectiv (D,D'). Totuşi, echilibrul (S,S') nu este credibil deoarece (D,D') aduce cîştiguri mai mari ambilor jucători.

Echivalența strategiilor pure cu cele mixte

Definiția 19. Două strategii pure s_i şi s'_i sunt echivalente dacă au aceeaşi distribuție de probabilitate oricare ar fi strategiile pure ale adversarilor.

Definiția 20. Vom numi forma strategică redusă (sau forma normală redusă) a unui joc sub forma extinsă acel joc în care s-au păstrat doar clasele de strategii echivalente (se păstrează doar un singur membru al fiecărei clase de echivalență).

Analog modului în care am definit strategiile mixte pentru jocurile statice, le vom defini şi pentru jocurile dinamice.

Luce şi Raiffa (1987) au făcut următoarea analogie pentru a explica relațiile dintre strategiile mixte şi cele pure (sau de comportament): o strategie pură este o carte de instrucțiuni, în această carte se specifică la fiecare pagină modul în care se va juca dacă avem anumite informații. Spațiul strategiilor este mulțimea cărților din bibliotecă.

O strategie mixtă este o distribuție de probabilitate asupra cărților din bibliotecă, adică un mod aleator de a selecta o carte.

În condițiile unor jocuri în informație perfectă (perfect recall) strategiile mixte şi cele pure (comportamentale) sunt echivalente

Teorema Kuhn

Într-un joc dinamic în informație perfectă strategiile mixte şi strategiile pure sunt echivalente (sau altfel spus, fiecare strategie mixtă are echivalentă o unică strategie pură, sau fiecare strategie pură este echivalentă cu fiecare strategie mixtă generată de aceasta).

Observație Mai multe strategii mixte pot genera aceeaşi strategie pură.

Pentru a determina echilibrele unui joc dinamic vom utiliza teorema Zermelo – Kuhn:

Teorema Zermelo – Kuhn

Un joc finit în informație perfectă are un echilibru Nash în strategii pure.

Demonstrația acestei teoreme se face pe baza algoritmului lui Zermelo care este o generalizare a inducției recursive cu mai mulți jucători (pe baza programării dinamice).

Cum jocul este finit, există o mulțime de noduri „penultime”, adică anterioare nodurilor terminale. În aceste noduri se determină câştigurile maxime pe care le pot avea jucătorii ce trebuie să joace în acel moment.

De aici vom avansa în sens invers în cadrul arborelui până la nodul inițial, pentru care vom determina strategia de echilibru. Se verifică uşor că această strategie este un echilibru Nash al jocului dinamic.

Observație Dacă vom slăbi condițiile teoremei, atunci algoritmul lui Zermelo nu mai este eficient. De exemplu, pentru jocurile infinite sau pentru jocurile cu strategii nestrict dominate nu se poate determina echilibrul pornind de la acest algoritm.

Echilibrul perfect în subjoc

Definiția 21. Vom numi subjoc propriu G al unui joc sub formă extinsă T secvența de noduri şi arce ce încep dintr-un nod unic şi se continuă cu toți succesorii acelui nod (un subarbore al arborelui inițial).

Definiție 22. Vom numi *echilibru perfect în subjoc* acea strategie p a jocului G care este echilibru Nash al oricărui subjoc propriu al lui G.

Observații

1. Cum orice joc poate fi privit ca propriul sau subjoc, un echilibru perfect al subjocului este în mod necesar un echilibru Nash.

2. Echilibru perfect al subjocului este – în cazul jocurilor finite – acelaşi cu cel determinat prin algoritmul inducției recursive.

Jocuri repetate

O categorie specială o reprezintă jocurile repetate.

Definiția 23 Vom numi *joc-etapă* acea secvență de decizii (statică sau dinamică) ce se repetă de un număr T de ori (T eventual infinit).

Jocurile pot fi finit sau infinit repetate, în raport cu orizontul T în care se desfăşoară jocul.
În continuare vom defini elementele fundamentale ale acestor tipuri de jocuri:

- Vom nota cu $G=(xA_i, U)$ jocul-etapă şi
  Λ_i spațiul distribuțiilor de probabilitate asupra acțiunilor A_i ale jucătorului i;
- Jocurile se desfăşoară în informație perfectă şi completă, respectiv la sfârşitul fiecărei etape orice jucător ştie istoria jocului şi câştigurile obținute.
- Vom nota cu $a^t = (a_1^t, a_2^t, \ldots.. a_n^t)$ acțiunile alese de cei n jucători la momentul t, şi atunci istoria jocului va fi $h^t = (a^0, a^1, \ldots. a^{t-1})$.
- O strategie pură în jocurile repetate este reprezentată de o secvență de strategii pure ale jocului-etapă, de la început până la sfârşitul jocului.
- O strategie mixtă P_i va fi descrisă de o secvență de strategii mixte $\alpha_i \in \Lambda_i$.
- Funcțiile de câştig vor fi descrise prin:

$U_i = E_p(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(p^t(h^t))$ - pentru jocuri infinit repetate

$U_i = E_p \frac{1-\delta}{1-\delta^{T+1}} \sum_{t=0}^{T} \delta^t u_i(p^t(h^t))$ - pentru jocuri finit repetate, unde:

E_p = câştigul aşteptat de strategia p;
δ = factor de actualizare intertemporală (factor de discont);
$\delta = 0$ – reprezintă jucătorii ce nu au răbdare să continue jocul şi se opresc după prima etapă;

$\delta = 1$ – reprezintă jucătorii perfect răbdători, pentru care câştigurile fiecărei perioade sunt echivalente.

- Criteriul urmat de jucători în alegerea strategiilor este maximizarea câştigului mediu (aşteptat) pe unitatea de timp, respectiv:

$$\max \liminf_{T \to \infty} E(1/T) \sum_{t=0}^{T} u_i(p^t(h^t))$$

Pentru jocurile finit repetate soluția poate fi determinată prin algoritmul inducției recursive, iar acest algoritm arată faptul că echilibrul Nash al jocului finit repetat este repetarea în fiecare etapă a echilibrului Nash al jocului etapă.

Jocuri finit repetate

Vom considera următorul exemplu: fie jocul-etapă *G* – dilema prizonierului – şi este repetat de un număr *T* de ori, finit. Jocul finit repetat va fi *G(T)*.

		Jucător 2	
		A	*N*
Jucător 1	**A**	-8,-8	-10,0
	N	0,-10	-2,-2

Determinând echilibrul prin inducție recursivă obținem: la ultima etapă, ambii jucători vor *acuza* deoarece nu au încredere că jocul ar putea avea o desfăşurare cooperativă (adoptă echilibrul Nash). La penultima etapă, deja se cunoaşte (anticipat) rezultatul ultimei etape, deci jucătorii vor adopta acelaşi comportament, respectiv se vor *acuza* reciproc. Continuând raționamentul, atingem etapa inițială a jocului prin determinarea la echilibru în fiecare etapă a echilibrului Nash pentru jocul-etapă. Deci echilibrul jocului finit repetat este repetare de T ori a strategiei *(A, A)*.

Propoziție Dacă jocul-etapă G are un echilibru Nash unic, atunci pentru orice joc finit repetat *G(T)* există un echilibru perfect în subjoc unic: repetarea echilibrului Nash asociat jocului-etapă.

Demonstrație Prin algoritmul inducției recursive, plecând de la ultima etapă se poate atinge pentru orice subjoc propriu repetarea echilibrului Nash al jocului-etapă, aşa cum a fost arătat anterior.

Critici la echilibrul perfect în subjoc

Una dintre problemele care apare la interpretarea acestui rezultat este că acest echilibru nu este credibil. De exemplu, dacă dilema prizonierului se va repeta de trei ori (T=3), atunci avem următoarele: la ultima etapă jucătorii vor alege strategia *(A, A),* dar până atunci, cel puțin o etapă, este mai bine pentru ei să aleagă o strategie de cooperare, respectiv *(N, N)*. În cazul în care echilibrul jocului este repetarea strategiei *(A, A)* de trei ori (determinat prin inducție recursivă), atunci câştigul total al jucătorului i va fi

$$v_i((A,A),(A,A),(A,A)) = (-8) + \delta_i(-8) + \delta_i^2(-8) = (-8)(1+\delta_i+\delta_i^2) = (-8)\frac{1-\delta_i^3}{1-\delta_i}$$

Dacă cel puțin prima etapă jucătorii vor coopera, respectiv vor alege strategia de a *nega* amândoi *(N,N),* atunci câştigurile vor fi:

$$v_i'((N,N),(A,A),(A,A)) = (-2) + \delta_i(-8) + \delta_i^2(-8)$$

Evident $v_i < v_i', (\forall) i = 1,2$, cu alte cuvinte pentru cel puțin o perioadă jucătorii vor alege să coopereze, chiar dacă jocul este necooperativ, deoarece câştigul adus de această strategie este mai mare decât cel de necooperare. Acest rezultat a fost sintetizat de Benoit şi Krishna (1985) în următoarea teoremă:

Teorema Benoit-Krishna

Fie un joc finit repetat *G(T),* pentru care s^* este un echilibru, şi fie $\hat{s}$ o altă strategie astfel încât $u(\hat{s}) > u(s^*)$. Atunci există un *T'<T*, pentru *T* suficient de mare, astfel încât pentru *T'* perioade echilibrul jocului finit repetat este repetarea lui $\hat{s}$, iar pentru următoarele *T-T'* perioade repetarea lui s^*.

Definiția 24. Vom numi câştig de rezervă $\underline{u_i}$ pentru jucătorul *i,* câştigul minim ce îl poate obține în cele mai proaste condiții pentru el, sau altfel spus $\underline{u_i} = \min_{s_{-i}}[\max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})]$

Fie m_{-i} strategiile celorlalți jucători pentru care se realizează $\underline{u_i}$, adică profilul <u>minmax</u> al strategiilor celorlalți jucători. Atunci $u_i(m_i, m_{-i}) = \underline{u_i}$.

Jocuri infinit repetate

Dacă jocurile considerate sunt infinit repetate, atunci nu mai poate fi aplicat algoritmul inducției recursive pentru că nu există o etapă finală a jocului de la care să pornim în sens invers. În aceste condiții echilibrul se va determina prin intermediul rezultatelor expuse de teorema folk (populară):

Teorema folk Dat fiind jocul-etapă *G* şi jocul infinit repetat *G(∞)* şi $\underline{u_i}$ câştigul minmax al jucătorului *i*, atunci pentru orice vector al câştigurilor v cu $v_i > \underline{u_i}, (\forall) i$, există $\underline{\delta} < 1$, astfel încât $(\forall)\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ există un echilibru Nash al jocului *G(∞)* dat de repetarea strategiilor care asigură câştigul v.

M. Friedman (1971) a demonstrat această teoremă în condiții slăbite:

Teorema Friedman Fie α^* un echilibru al jocului-etapă cu câştigul *c*. Atunci oricare ar fi $u \in U$ cu $u_i > c_i, (\forall) i, (\exists) \underline{\delta}$ astfel încât $(\forall)\delta > \underline{\delta}$ strategia asociată lui u să fie un echilibru perfect în subjoc.

Strategia de pedepsire şi jocurile finit repetate

În cazul jocurilor finit repetate strategia de a se repeta echilibrul Nash al jocului-etapă pare a fi echilibrul jocului dinamic. Totuşi, am văzut că această strategie nu este credibilă. În acest context apare întrebarea dacă putem adopta comportamentul de pedepsire astfel încât să fie determinați jucătorii să adopte un comportament cooperativ chiar şi în cadrul jocurilor finit repetate. Răspunsul la această întrebare este afirmativ, cu observația că în acest caz soluția depinde atât de nivelul pragului dat de factorul de actualizare $\underline{\delta}$, cât şi de durata jocului, respectiv de numărul de etape jucate T.

Astfel avem teorema:

Teoremă Dat fiind jocul-etapă G şi jocul finit repetat G(T), $\underline{u}_i$ câştigul minmax al jucătorului i, atunci pentru orice vector al câştigurilor v, cu $v_i > \underline{u}_i, (\forall)i, (\exists)\underline{\delta} < 1$, pentru T suficient de mare, astfel încât $(\forall)\delta \in (\underline{\delta}1), (\exists)T' > 0$ astfel încât repetarea de T' ori a strategiilor ce asigură câştigul v constituie echilibrul Nash al jocului repetat pentru T' etape.

Demonstrație

Demonstrația se poate face analog cu cea a teoremei folk. Dacă strategia adoptată este una de "pedepsire", atunci există un prag al "răbdării" $\underline{\delta}$ şi un număr minim de etape T în care trebuie să se desfăşoare jocul pentru ca cel puțin T' etape jucătorii vor adopta un comportament cooperativ adoptând strategia care aduce câştigul v.

Fie $\underline{u}_i$ = câştigul minmax al jucătorului i;

$v_i > \underline{u}_i$ - câştigul de cooperare al jucătorului i;

$\overline{u}_i = \max_a u(a)$ - câştigul de deviere al jucătorului i.

În cazul în care deviază, câştigul jucătorului i este:

$$u_i^D(s') = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'-1}\delta^t v_i + \delta^{T'}\overline{u}_i + \sum_{t=T'+1}^{T}\delta^t \underline{u}_i\right)$$

cu T' numărul de etape în care jucătorul i cooperează, T'<T.

Câştigul de cooperare pe întreaga perioadă va fi :

$$u_i^C = \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\sum_{t=0}^{T}\delta^t v_i$$

Pragul de la care jucătorul i nu este tentat să devieze este dat de inegalitatea $u_i^C \ge u_i^D \Leftrightarrow \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\sum_{t=0}^{T}\delta^t v_i \ge \frac{1-\delta_i}{1-\delta_i^{T+1}}\left(\sum_{t=0}^{T'-1}\delta^t v_i + \delta^{T'}\overline{u}_i + \sum_{t=T'+1}^{T}\delta^t \underline{u}_i\right) \Leftrightarrow$

$$\delta^{T'}(\overline{u}_i - v_i) \le \sum_{t=T'+1}^{T}\delta^t (v_i - \underline{u}_i) \Leftrightarrow \delta^{T'}(\overline{u}_i - v_i) \le (v_i - \underline{u}_i)\frac{1-\delta^{T-T'}}{1-\delta} \Leftrightarrow \frac{(1-\delta)\delta^{T'}}{1-\delta^{T-T'}} \le \frac{v_i - \underline{u}_i}{\overline{u}_i - v_i} \quad (*)$$

Dat fiind numărul de etape T' ce se doresc a fi cooperative şi un prag de semnificație *δ*, se poate obține *T*, respectiv numărul de etape pe care le are jocul finit repetat ca jucătorii să coopereze T' perioade. Vom avea:

$$-(1-\delta)\delta^{2T'}\frac{\overline{u}_i - v_i}{v_i - \underline{u}_i} + \delta^{T'} \ge \delta^T \Rightarrow T \ge \log\delta\left(\delta^T - (1-\delta)\delta^{2T'}\frac{\overline{u}_i - v_i}{v_i - \underline{u}_i}\right)$$

Dacă se dă în schimb *T* şi *T'* atunci se poate determina $\underline{\delta}$, nivelul minim al factorului de actualizare pentru care jucătorii vor coopera, din relația (*).