CURS 2

Jocuri statice în informaţie incompletă (jocuri Bayesiene)

Jocurile în informaţie incompletă sunt acele jocuri în care cel puţin unul dintre jucători nu cunoaşte funcţiile de câştig ale celorlalţi jucători.

Totuşi, acel jucător care nu ştie câştigurile celorlalţi, îşi imaginează care ar putea fi acestea cu o anumită probabilitate.

Introducere

Exemplul 1 Jocul intrării pe piaţă

Se consideră un joc în care jucătorii sunt două firme, din care una este deja pe piaţă, iar a doua doreşte să între. Prima firmă poate să se extindă construind o nouă fabrică, iar cea de-a doua nu cunoaşte costul noii construcţii, ştiind doar că poate fi 4 unităţi sau 1 unitate.

Câştigurile sunt descrise în figura 1 a) şi b):

		F2	
		I	*N*
F1	*C*	-1,-1	1,0
	NC	1,1	2,0

Cost mare: p_1
Figura 1.a)

	F2	
	I	*N*
C	2,1	4,0
NC	1,1	2,0

Cost mic: p_2
Figura 1 b)

Observăm că câştigurile jucătorului 2 depind de faptul că primul a construit sau nu fabrica, dar nu este influenţat de costul acestei investiţii. Pentru jucătorul 2 este preferabil să intre doar dacă jucătorul 1 nu construieşte.

Pentru jucătorul 1 în schimb vedem că strategia de a construi este dominantă doar dacă are un cost mic.

Dacă notăm cu p_1 probabilitatea cu care jucătorul 2 credea că 1 are un cost mare, cum 1 construieşte doar dacă are un cost mic, atunci 2 va intra pentru probabilitatea $p_1 > \frac{1}{2}$ şi nu va intra cu probabilitatea $p_1 < \frac{1}{2}$.

Fie *y* probabilitatea ca firma 2 să intre pe piaţă (deci *(1 – y)* este probabilitatea ca firma 2 să nu intre pe piaţă).

În acest caz strategia de a nu construi rămâne dominantă dacă firma 1 are un cost mare. Vom modifica jocul, cu câştigurile descrise în figura 2. Fie *y* probabilitatea ca firma 2 să intre pe piaţă (deci *(1 – y)* este probabilitatea ca firma 2 să nu intre pe piaţă).

		F2	
		I	*N*
F1	*C*	0,-1	2,0
	NC	2,1	3,0

Cost mic
Figura 2 a)

		F2	
		I	*N*
F1	*C*	1.5,1	3.5,0
	NC	2,1	3,0

Cost mare
Figura 2 b)

În acest caz strategia de a nu construi rămâne dominantă dacă firma 1 are un cost mare.

Dacă este un cost mic, atunci strategia optimă a lui1 depinde de probabilitate ca 2 să intre pe pe piață.

A construi este mai bine decât a nu construi dacă:

1,5 y + 3,5 (1 – y) > 2 y + 3 (1 – y). Rezultă $y < 1/2$.

Astfel, 1 poate încerca să prezică comportamentul lui 2 pentru a-şi alege propria strategie.

Harsanyi a propus o transformare a acestui joc dintr-unul în informație incompletă într-un joc în informație imperfectă, descriind sub formă extinsă jocul cu ajutorul ”*Naturii*”. (figura 3):

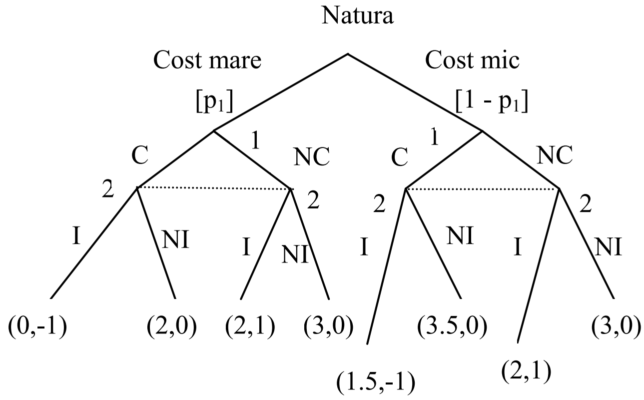

Figura 3

Prin această reprezentare am obținut un joc clasic, respectiv un joc dinamic în informație incompletă, al cărui echilibru se poate determina prin metode deja prezentate. . Vedem că în raport cu probabilitatea asignată de jucătorul 1 pentru comportamentul jucătorului 2 vom obține echilibrul anterior, respectiv: dacă firma 1 va crede că firma 2 intră pe piață cu probabilitatea $y > 1/2$, atunci el va alege să nu construiască, iar dacă probabilitatea cu care crede că firma 2 intră este $y < 1/2$ atunci va alege să construiască.

Reprezentarea jocurilor Bayesiene sub formă normală

În informație completă, reprezentam un joc sub formă normală ca fiind: *G(S,u),* fiecare jucător ştiind care sunt strategiile şi câştigurile asociate tuturor celorlalți jucători.

În cazul jocurilor în informație incompletă fiecare jucător îşi cunoaşte propriile funcții de câştig, dar poate să nu cunoască una a celorlalți.

Atunci fie $u_i(a_1, a_2, ..., a_n; t_i)$ funcția de utilitate a jucătorului *i* dacă este de tipul t_i, cu $t_i \in T_i$ (spațiul tipurilor posibile).

Vom nota cu $p_i(t_{-i}/t_i)$ probabilitatea ca jucătorul de tipul t_i să creadă că ceilalți sunt de tipul t_{-i} .

Definiția 1 Reprezentarea sub *formă normală* a unui joc Bayesian static cu *n* jucători presupune să specificăm spațiul acțiunilor (strategiilor) A_i, spațiul tipurilor jucătorilor T_i, apoi “credințele” acestora p_i, respectiv funcțiile de câştig, u_i .

- tipul jucătorului *i* - t_i- este informație privată a jucătorului *i* şi face parte din mulțimea tipurilor T_i .

- credințele (aşteptările) jucătorului *i*: $p_i(t_{-i}/t_i)$ descriu incertitudinea lui *i* asupra tipurilor posibile *(n-1)* ale celorlalțijucători, t_{-i}, dat fiind tipul său t_i.

Atunci un joc static în informație incompletă (joc bayesian) este *G = {A, T, P, U}*.

În abordarea lui Harsanyi desfăşurarea unui joc bayesian este următoarea:

- "natura alege tipul jucătorilor $t=(t_1,t_2,...,t_n)$;
- fiecare jucător îşi cunoaşte propriul tip t_i, dar nu îl cunoaşte pe al celorlalți t_{-i};
- jucătorii aleg simultan acțiunile lor;
- se "recepționează" câştigurile $u_i(a_1,a_2,...,a_n;t_i)$.

Observația 1. Putem calcula $p_1(t_{-i}/t_i)$ utilizând regula Bayes:

$$p_i(t_{-i}/t_i) = \frac{p(t_{-i},t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i},t_i)}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p(t_{-i},t_i)} \qquad (1)$$

Observația 2. În multe probleme tipul jucătorilor este independent. Deci $p_i(t_{-i})$ nu depinde de t_i, dar va depinde totuşi de distribuția de probabilitate *p(t)* asupra tipurilor.

Definiția 2. Vom numi *strategie* pentru jucătorul *i* o funcție $S_i(t_i)$, în care $S_i(t_i)$ specifică o acțiune particulară din mulțimea acțiunilor A_i, pentru orice t_i, ale jocului *G (A, T, P, U).*

Definiția 3. În jocul Bayesian static *G = {A, T, P, U}* strategiile $s^*=(s_1^*,s_2^*,...,s_n^*)$ sunt un echilibru Bayesian de tip Nash în strategii pure dacă pentru fiecare jucător *i* şi fiecare tip t_i din T_i, $s_i^*(t_i)$ este soluție a problemei:

$$\max_{a_i\in A_i} \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} u_i\left(s_1^*(t_1),...,s_{i-1}^*(t_{i-1}),a_i,s_{i+1}^*(t_{i+1}),...,s_n^*(t_n);t\right)\cdot p\left(t_{-i}/t_i\right). \qquad (2)$$

Astfel, la echilibru, nici un jucător nu îşi va modifica strategia, chiar dacă se schimbă acțiunea în cadrul aceluiaşi tip.

Exemplul 2 Duopolul Cournot în informație incompletă

Se consideră modelul duopolului Cournot, în condiții de informație incompletă. Astfel, pe piața unui produs există doi producători, care produc cantitățile q_1, respectiv q_2. Contitatea totală de produs de pe piață va fi *Q*.

Funcția de cerere inversă este: $P(Q) = c - Q$, $Q = q_1 + q_2$

Costul mediu pe unitatea de produs al firmei 1 este c, iar costul total va fi:

$$c_1(q_1) = cq_1.$$

Firma 2 în schimb, poate avea două tipuri de cost, şi anume fie un cost mediu mare, c_M, fie un cost mediu mic, c_m, astfel încât funcția de cost total a firmei 2 va fi:

$$c_2(q_2) = \begin{cases} c_M q_2 \\ c_m q_2 \end{cases} \qquad \text{cu } c_m < c_M.$$

Firma 1 crede cu probabilitatea θ că firma 2 are costul mare, c_M, şi cu probabilitatea $1 - \theta$ că firma 2 are costul mic, c_m. Tipul firmei 2 este dat de costul mediu pe care îl poate avea. Aceasta este o informație privată, adică firma 2 își cunoaște propriul cost, în schimb firma 1 nu știe acest cost, deci nu poate determina profitul firmei 2. În schimb firma 1 își formează anumite credințe, presupuneri, asupra tipului care este firma 2. Astfel, presupune cu probabilitatea θ este firma 2 este de tipul c_M, și cu probabilitatea *1-* θ este de tipul c_m.

Fiecare dintre firme are de rezolvat problema:

Pentru firma 2:

$$\max_{q_2}(q - q_1 * - q_2 - c_M)q_1 \text{ pentru tipul } c_M \tag{3}$$

sau

$$\max_{q_1}(q - q_1 * - q_2 - c_m)q_2 \text{ pentru tipul } c_m. \tag{4}$$

Pentru firma 1:

$$\max_{q_1} \theta[q - q_1 - q_2 * (c_M) - c]q_1 + (1-\theta)[q - q_1 - q_2 * (c_m) - c]q_1 \tag{5}$$

Rezolvând aceste probleme obținem soluțiile (funcțiile de reacție ale firmei 2 în raport cu cantitățile elese de firma 1 și de tipul firmei):

$$q_2 * (c_M) = \frac{c - q_1 * - c_M}{2} \text{ sau} \tag{6}$$

$$q_2 * (c_m) = \frac{c - q_1 * - c_m}{2}. \tag{7}$$

Rezultă pentru firma 1 funcția de reacție (în raport cu funcțiile de reacție ale firmei 2 și cu probabilitățile cu care crede firma 1 că firma 2 este de un tip sau de altul):

$$q_1 * = \frac{\theta[q - q_2 * (c_M) - c] + (1-\theta)[q - q_2 * (c_m) - c]}{2} \tag{8}$$

Din relațiile (6) – (8) rezultă:

$$q_2 * (c_M) = \frac{q - 2c_M + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_M - c_m) \tag{9}$$

$$q_2 * (c_m) = \frac{q - 2c_m + c}{2} + \frac{\theta}{6}(c_M - c_m) \tag{10}$$

$$q_1 * = \frac{q - 2c + \theta c_M + (1-\theta)c_m}{3}. \tag{11}$$

Observație

În raport cu parametrul θ, respectiv cu probabilitatea cu care crede firma 1 că firma 2 are costul mare, strategiile alese de cele două firme tind către cele în informație completă ($\theta \to 0$ sau $\theta \to 1$).

Strategii mixte revizuite

Harsanyi (1973) a sugerat faptul că pentru jucătorul *i* o strategie mixtă reprezintă incertitudinea jucătorului *j* despre alegerea de către *i* a unei strategii pure, iar aceasta depinde de informația privată pe care o are.

Putem extinde această idee și un *echilibru Nash* în strategii mixte poate fi interpretat (pentru un joc în informație completă) ca un *echilibru Bayesian* în strategii pure cu o anumită (puțină) informație incompletă

Exemplul 3. Să reconsiderăm jocul "bătălia sexelor". Băiatul şi fata care au de ales unde vor petrece seara respectivă vor decide asupra locului în care vor merge: la *Teatru* sau la *Fotbal.* Matricea jocului este dată în figura 4:

		Fata	
		T	*F*
Băiat	*T*	1,2	0,0
	F	0,0	2,1

Figura 4

Acest joc are două 2 echilibre: *(T,T)* şi *(F,F).*

Să presupunem acum faptul că ei nu sunt siguri în legătură cu câştigul pe care îl are celălalt, iar aceste câştiguri sunt $2 + t_f$ pentru fată (pentru teatru), respectiv $2 + t_b$ pentru băiat (pentru fotbal).

t_f şi t_b sunt cunoscute de posesori (fată, respectiv băiat), iar celălalt se presupune că sunt din intervalul $[0,x]$, uniform distribuite.

Atunci jocul bayesian *G* va fi $G=\{A_b, A_f, T_b, T_f, P_b, P_f, U_b, U_f\}$ cu

- spaţiul acţiunilor: $A_b = A_f = \{T, F\}$;
- spaţiul tipurilor, care este continuu: $T_b = T_f = [0, x]$;
- probabilităţile cu care cred fata, respectiv băiatul că celălalt are câştigurile t_b, respectiv t_f sunt: $p_f(t_b) = p_b(t_f) = \frac{1}{x}$.

Câştigurile vor fi descrise de matricea din figura 5:

		Fata	
		T	*F*
Băiat	*T*	$1, 2 + t_f$	0,0
	F	0,0	$2 + t_b, 1$

Figura 5

În continuare vom determina un echilibru Bayesian în strategii pure pentru acest joc în informaţie incompletă.

În acest joc fata va alege teatrul dacă t_f depăşeşte un nivel critic *f*, altfel va merge la fotbal. (Analog se defineşte şi pentru băiat strategia cu nivelul critic *b*).

Deci, la echilibru băiatul va alege fotbalul cu probabilitatea $\frac{x-b}{x}$, iar fata va alege teatrul cu probabilitatea $\frac{x-f}{x}$.

În continuare vom arăta ca dacă informația completă dispare (x→0), atunci comportamentul jucătorilor în strategii Bayesiene aproximează comportamentul în strategii mixte al jocului static inițial ($\frac{x-c}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}$).

Să determinăm valorile critice *f* şi *b* pentru dimensiunea intervalului câştigului, *x,* dată:

- pentru băiat :

$$u_1(F) = \frac{f}{x}(2+t_b) + \left(1-\frac{f}{x}\right)0 = \frac{f}{x}(2+t_b) \tag{12}$$

$$u_1(T) = \frac{f}{x}0 + \left(1-\frac{f}{x}\right)1 = 1-\frac{f}{x} \tag{13}$$

Deci va merge la fotbal doar dacă:

$$t_b \geq \frac{x}{f} - 3 = b \tag{14}$$

Pentru fată, vom obține în mod analog:

$$t_f \geq \frac{x}{b} - 3 = f \tag{15}$$

Rezolvând (14) şi(15)simultan obținem:

$$b = f = \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2}. \tag{16}$$

Deci, probabilitatea ca băiatul să meargă la fotbal va fi:

$$\frac{x-b}{x} = 1 - \frac{-3+\sqrt{9+4x}}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}. \tag{17}$$

Cu alte cuvinte, dacă dacă informația incompletă ar dispare, atunci se obține echilibrul Nash în strategii mixte ale jocului în informație completă.

Mecanisme design (descriptive) ale jocurilor Bayesiene

Exemplul 4. Modelul stabilirii prețurilor neliniare

Un monopolist produce un bun la un cost marginal (şi mediu) *c* şi vinde o cantitate $q \geq 0$ din acest bun. Acest bun este cumpărat de un consumator a cărui satisfacție este descrisă de funcția de câştig:

$$u_1(q,T,\theta) = \theta V(q) - T \text{ cu:} \tag{18}$$

- $\theta V(q)$- reprezintă surplusul brut, unde θ este tipul cumpărătoruluiθ;
- *T* suma transferată de la consumator la vânzător;
- *V(q)* reprezintă funcția de utilitate, de tip von Neumann – Morgenstern, ce are proprietățile:

$$V(0) = 0$$

$$V'(0) > 0$$

$$V''(0) < 0 \text{(utilitate marginală descrescătoare)}$$

V(q) este o cunoştință comun, dar θ este informație privată pentru consumator, respectiv este cunoscut doar de consumator.

În cazul în care spațiul tipurilor este discret, vânzătorul ştie că $\theta = \underline{\theta}$ cu probabilitatea $\underline{p}$ şi $\theta = \overline{\theta}$ cu probabilitatea $\overline{p}$, unde $\overline{\theta} > \underline{\theta} > 0$ şi $\underline{p} + \overline{p}$ =1.

Jocul va fi următorul:

Vânzătorul oferă un tarif *T(q)* (posibil neliniar) în care îi spune cumpărătorului cât îl costă dacă va cumpăra cantitatea *q*.

Consumatorul fie va accepta oferta, fie va refuza.

Dacă jocul ar fi în informație completă, atunci vânzătorul ar şti θ şi va oferi q astfel încât să-şi maximizeze profitul, extrăgând tot surplusul consumatorului, adică:

$$u_1(q,T,\theta)=0=\theta\, V(q)-T \quad \Rightarrow \quad T=\theta V(q). \tag{19}$$

Profitul monopolistului este dat de :

$$\pi_2 = T - cq = \theta V(q) - cq \tag{20}$$

Condițiile necesare de optim sunt:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = \theta V'(q) - c = 0 \tag{21}$$

conduc la soluția:

$$\theta V'(q) = c \tag{22}$$

(Cum $V''(0) < 0$, rezultă că şi condiția suficientă este îndeplinită, deci profitul se maximizează în punctul în care $\theta V'(q) = c$).

Cum însă consumatorul poate fi de două tipuri, vânzătorul poate căuta să ofere 2 pachete de "programe", câte unul pentru fiecare tip.

Fie $(\underline{q},\underline{T})$ pachetul pentru tipul $\underline{\theta}$ şi $(\overline{q},\overline{T})$ pachetul pentru tipul $\overline{\theta}$.

Atunci câştigul aşteptat al monopolistului va fi:

$$E\pi_2 = \underline{p}(\underline{T} - c\underline{q}) + \overline{p}(\overline{T} - c\overline{q}). \tag{33}$$

În aceste condiții vânzătorul are în față 2 condiții:

- prima (IR) restricția de *raționalitate individuală* presupune că utilitatea netă minimă a cumpărătorilor este nenegativă, adică:

$$(IR_1) \quad \underline{\theta} V(\underline{q}) - \underline{T} \geq 0$$

$$(IR_2) \quad \overline{\theta} V(\overline{q}) - \overline{T} \geq 0.$$

(Consumatorii nu vor alege un consum ce ar asigura o utilitate negativă.)

- al doilea tip de restricții sunt cele numite de compatibilitate incitativă, cu alte cuvinte condiția ca fiecare consumator să consume doar pachetul care îi este destinat:

$$(IC_1) \quad \underline{\theta} V(\underline{q}) - \underline{T} \geq \underline{\theta} V(\overline{q}) - \overline{T}$$

$$(IC_2) \quad \overline{\theta} V(\overline{q}) - \overline{T} \geq \overline{\theta} V(\underline{q}) - \underline{T}\ .$$

Problema pe care o are de rezolvat vânzătorul este de maximizare a profitului aşteptat cu restricțiile *(IR)* şi *(IC)*. In prima etapă să observăm că doar (IR_1) şi (IC_2) sunt necesare, deoarece:

$$\overline{\theta} V(\overline{q}) - \overline{T} \geq (\overline{\theta} - \underline{\theta}) V(\underline{q}) \geq 0. \tag{34}$$

Deci monopolistul va trebui să rezolve problema:

$$\max_{\overline{T},\underline{T},\overline{q},\underline{q}} E\pi = \underline{p}(\underline{T} - c\underline{q}) + \overline{p}(\overline{T} - c\overline{q}) \qquad \text{cu restricțiile:}$$

$$\underline{\theta} V(\underline{q}) - \underline{T} \geq 0 \tag{35}$$

$$\overline{\theta} V(\overline{q}) - \overline{T} \geq \overline{\theta} V(\underline{q}) - \underline{T}\ .$$

(Pentru început vom neglija (IC_1). Dacă soluția problemei satisface şi (IC_1) atunci ea va fi optimală.)

Rezultă:

$$max\,E\pi = \left[\left(\underline{p}\underline{\theta} - \overline{p}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)\right)V\left(\underline{q}\right) - \underline{p}c\underline{q}\right] + \overline{p}\left(\overline{\theta}V\left(\overline{q}\right) - c\overline{q}\right) \text{ cu restricțiile:}$$

$$\underline{\theta}V\left(\underline{q}\right) - \underline{T} \geq 0 \qquad (36)$$

$$\overline{\theta}V\left(\overline{q}\right) - \overline{T} \geq \overline{\theta}V\left(\underline{q}\right) - \underline{T}\,.$$

Condițiile de ordin I conduc la soluțiile:

$$\underline{\theta}V'\left(\underline{q}\right) = \frac{c}{1 - \dfrac{\overline{p}\left(\overline{\theta} - \underline{\theta}\right)}{\underline{p}\underline{\theta}}} \quad \text{şi} \quad \overline{\theta}V'\left(\overline{q}\right) = c\,. \qquad (37)$$

Cu alte cuvinte, doar cantitatea cerută de consumatorul de tip $\overline{\theta}$ este optimă din punct de vedere social (deoarece este verificată condiția din problema în informație completă) .

Cantitatea cerută de consumatorul de tip $\underline{\theta}$ nu va fi optimală deoarece va consuma o cantitate $\underline{q} < \overline{q}$ (deoarece $V''<0$) .

Principiul revelației

Să presupunem că avem un joc cu $n+1$ jucători, şi anume:

- un jucător principal *(P),* jucătorul *0*, care nu deține informație privată;
- n jucători de tip $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, cu $\theta_i \in \Theta$.

Jucătorul principal nu cunoaşte tipul θ al celorlalți n jucători, dar presupune că fiecare dintre tipurile θ_i poate fi întâlnit cu probabilitatea p_i.

Obiectul mecanismului design este acela de a determina o alocație $y=\{x,t\}$, care constă dintr-un vector x (o decizie ce aparține unei mulțimi compacte, convexe şi nevide) şi t (un vector de transfer monetar de la jucătorul principal către ceilalți jucători – eventual acest transfer poate fi şi negativ).

Jucătorii $i=1,\ldots,n$ au funcții de câştig de tip von Neumann-Morgenstern, descrise prin $u_i(y,\theta)$.

Presupunem că funcțiile de câştig u_i sunt strict crescătoare în raport cu transferurile t_i, iar u_0 este strict descrescătoare în raport cu t_i şi, în plus, sunt de două ori diferențiabile.

Dacă $\{y(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ sunt tipuri continue de jucători, atunci, pentru jucătorul i, $i=1,\ldots,n$, câştigul aşteptat va fi:

$$u_i(\theta_i) = E_{\theta,-i}[u_i(y(\theta_i,\theta_{-i}),\theta_i,\theta_{-i})/\theta_i] \qquad (48)$$

iar pentru jucătorul principal:

$$u_0 = \underset{\theta}{E}\,u_0(y(\theta),\theta) \qquad (49)$$

În aplicațiile cu care vom opera, câştigurile jucătorilor depind doar de transferul propriu t_i şi de tipul său θ_i, nu şi de tipurile celorlalți jucători θ_{-i} sau transferurile lor t_{-i}.

Aplicații economice

1) Discriminarea de preț, unde x=cantitatea cumpărată de consumator
   - t-prețul plătit pentru bunul consumat
   - θ-tipul consumatorului, dat de nivelul surplusului consumatorului.
2) Reglementarea – cu x-vector de prețuri (sau costuri)
   - t-venitul firmei
   - θ-parametru tehnologic al firmei.

3) Impozitarea veniturilor – x-veniturile agenților
   - t-dimensiunea impozitului plătit de agenții economici
   - θ-capacitatea agentului de a economisi bani.
4) Venituri publice – x-cantitatea de bun public oferită
   - t_i-contribuțiile monetare ale consumatorilor la finanțarea producției de bun public
   - θ-tipul consumatorului în raport cu surplusul consumatorilor de bun public.
5) Licitații – x_i-probabilitatea ca licitatorii să cumpere bunul
   - t_i-suma plătită pentru bun de cel care va câştiga licitația
   - θ_i-preferințele consumarorului pentru bunul i.
6) Negocieri – x-cantitatea vândută
   - t_1-transferul monetar către vânzător
   - t_2-transferul (negativ) monetar către cumpărător ($t_1+t_2=0$)
   - θ_1=c – costul producătorului
   - θ_2=v – preferințele consumatorului.

Definiția 4

Vom numi *mecanism* sau *contract* un anunț de mesaje $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l)$ ce aparține spațiului mesajelor $\mathcal{M}_i$. $\mathcal{M}$

Tipul jucătorilor este informație privată şi de aici mecanismul y_n: $\mathcal{M}_i \rightarrow YxR^n$, poate să depindă de $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_l)$.

Definiția 5

Vom numi mecanism direct acel mecanism în care spațiul mesajelor este spațiul tipurilor de jucători, respectiv $\mathcal{M} = \Theta$.

Observație. Un mesaj reprezintă un anunț, o operațiune efectuată de către unul dintre jucători.

Dacă spațiul mesajelor (anunțurilor) este Θ_i, spațiul tipurilor pentru fiecare jucător, atunci fiecare dintre aceştia îşi anunță tipul – care poate fi cel adevărat sau poate să mintă.

Fie $\hat{\theta} \equiv (\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_n)$ tipurile declarate de către jucători. Atunci definim aceste tipuri prin: $\bar{y}(\hat{\theta}) = y_m(\mu^*(\hat{\theta}))$, unde $\mu^*(\hat{\theta}) = (\mu_1^*(\theta_1^*),\ldots,\mu_n^*(\hat{\theta}_n))$.

Pentru jocul descris anterior, declararea de către fiecare jucător a *tipului real* (deci declararea adevărului) constituie un echilibru bayesian al jocului, dat fiind μ_i^*, un echilibru bayesian al jocului inițial, $\forall i$ şi Θ_i.

Teoremă (principiul revelației) Gibbard, Green-Laffont, Myerson.

Fie un mecanism cu spațiul mesajelor $\mathcal{M}_i$ şi funcția de alocare $y_m(.)$ ce are un echilibru bayesian $y^*(\cdot) = \{\mu_i^*(\theta_i)\}_{i=1,n}$, $\theta_i \in \Theta_i$. Atunci există un mecanism direct revelator $\bar{y} = y_m \circ y^*$ astfel încât spațiul mesajelor este chiar spațiul tipurilor agenților (jucătorilor), $\mathcal{M}_i = \Theta_i$, şi există un echilibru bayesian în care fiecare agent acceptă mecanismul propus şi relevă adevăratul tip.

Observație. Echilibrul asociat (bayesian) poate să nu fie unic (principiul revelației ne asigură doar de existența echilibrului, nu şi de unicitatea acestuia). Printre acestea se vor găsi şi echilibre "necredibile", dar pot fi eliminate prin îmbogățirea spațiului mesajelor cu informații care nu influențeaza echilibrul real, dar le elimină pe cele necredibile.

Jocuri dinamice în informație incompletă

În continuare se va introduce un concept nou şi anume acela de Echilibru Bayesian Perfect (E.B.P).

Exemplul 6. Fie jocul dinamic în informație completă dar imperfectă, reprezentat în figura 6 sub formă extinsă :

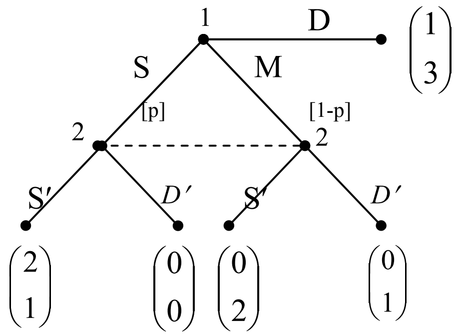

Figura 6

Reprezentând sub formă normală jocul descris în figura 38, vom obține matricea din figura 7:

		2: *S′*	*D′*
S		<u>2</u>,<u>1</u>	<u>0</u>,0
1	*M*	0,<u>2</u>	0,1
	D	1,<u>3</u>	<u>1</u>,<u>3</u>

Figura 7

Acest joc, sub formă normală, are două echilibre în strategii pure: *(S,S′)* şi *(D,D′)*.

Să determinăm care dintre aceste echilibre sunt perfecte in subjoc.

Cum jucătorul 2 nu ştie ce a ales jucătorul 1, nu există subjocuri in acest joc, şi în aceste condiții echilibrele Nash sunt chiar echilibrele perfecte in subjoc.

Totuşi, echilibrul *(D,D′)* nu este credibil, deoarece strategia *S′* domină strategia *D'*, deci jucătorul 2 fiind rațional nu va juca *D′* niciodată. Deci 1 nu va putea fi amenințat de 2 că va juca *D′* deoarece nu este credibilă o asemenea amenințare, deci 1 nu va juca niciodată *D*. În acest caz unicul echilibru va fi *(S,S′)*.

Echilibrul bayesian perfect

Pentru a defini E.B.P. vom face următoarele ipoteze:

Ipoteza 1 Pentru fiecare mulțime de informații, jucătorul care mută (joacă) trebuie să aibă anumite *presupuneri* (credințe) despre ceea ce s-a jucat până atunci.

Pentru o mulțime de informații ce nu este unică, o presupunere va fi o distribuție de probabilitate asupra nodurilor din mulțimea de informații (pentru o mulțime de informații date, cu nod unic, presupunerile jucătorului vor avea probabilitatea 1).

Ipoteza 2 Date fiind presupunerile lor, strategiile jucătorilor trebuie să *fie secvențial raționale* (cu alte cuvinte pentru fiecare mulțime de informații date, strategia jucătorului trebuie să fie optimală date fiind presupunerile pe care le are).

Exemplul 7. Pentru jocul descris anterior, Ipoteza 1 presupune că pentru fiecare mulțime de informații nesingulară (ex. S,M pentru jucătorul 1), jucătorul 2 crede că 1 va juca S cu probabilitatea p şi M cu probabilitatea 1-p.

Date fiind aceste presupuneri, câştigurile aşteptate dacă va juca *D′* vor fi: $0 \cdot p+1 \cdot (1-p)$, iar dacă va juca *S′*: $1 \cdot p+2 \cdot (1-p)$.

Cum $Eu_2(S')p > Eu_2(D')=1-p$, $(\forall)$ p, rezultă că jucătorul 2 nu va juca niciodată strategia *D'*.

Ipoteza 2 va elimina posibilitatea ca jucătorul 2 să joace (din considerente de raționalitate).

Deci, ipotezele 1 şi 2 consistă în faptul că jucătorii fac *presupuneri* despre modul în care joacă ceilalți şi date fiind aceste *presupuneri* fiecare jucător acționeaza rațional, adică alege acele strategii care îi maximizează câştigul.

Definiția 6 Pentru un echilibru dat al unui joc în formă extinsă o mulțime de informații este *„pe calea de echilibru"* dacă îi este asociată o probabilitate pozitivă de a fi jucată şi *„în afara căii de echilibru"* dacă este sigur că nu va fi jucată *(p=0)* de către jucători (aici, „echilibrul" poate fi oricare din cele definite anterior).

Ipoteza 3 Pentru o mulțime de informații pe calea de echilibru, presupunerile sunt determinate prin regula Bayes şi strategiile de echilibru ale jucătorilor.

Exemplul 8. Dat fiind un echilibru (de ex. *S*) jucătorul 2 ştie cu probabilitatea 1 că jucătorul 1 va juca *S.*

În ipoteza 2, o strategie mixtă va conduce la faptul că jucătorul 2 crede că 1 joacă S cu probabilitatea q_1, M cu probabiliatea q_2 şi D cu probabiliatatea $1-q_1-q_2$.

Atunci: $p=\dfrac{q_1}{q_1+q_2}$ (conform regulii Bayes: $P(L/M)=\dfrac{P(L)}{P(L \cup M)}$)

Deci, noțiunea de echilibru Bayesian perfect nu va include doar strategiile jucătorilor, ci şi presupunerile pe care le fac despre strategiile alese de ceilalți.

În multe cazuri, ipotezele 1-3 constituie chiar definiția E.B.P., dar noi vom mai impune o condiție ce va căuta să elimine strategiile ce nu sunt credibile.

Ipoteza 4 Pe o mulțime de informații din afara căii de echilibru, presupunerile sunt determinate de regula Bayes şi de strategiile de echilibru ale jucătorilor – dacă este posibil.

Definiția 7. Vom numi *Echilibru Bayesian Perfect* (EBP) o mulțime de strategii şi presupuneri ce satisfac Ipotezele 1-4.

Exemplul 8

Se consideră jocul dinamic în informație incompletă descris sub formă extinsă în figura 8.

Observăm că unicul echilibru Nash al jocului este *(B,C,D')*.

Această strategie şi presupunerea că *p=1* satisfac ipotezele 1-3, (de asemenea şi 4), deoarece nu există o mulțime de informații în afara căii de echilibru, deci este echilibru bayesian perfect.

Totuşi, fie strategia *(A,C,S′)* cu $p=0$, care este un echilibru Nash deoarece nici un jucător nu este tentat să devieze de la ea.

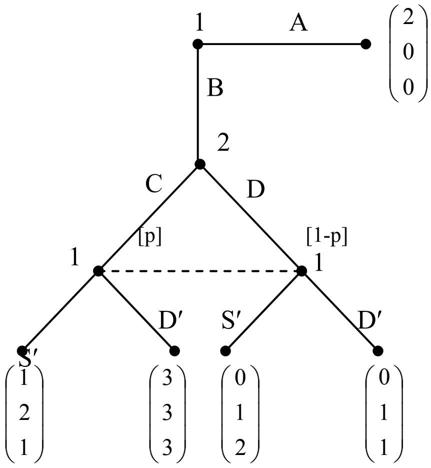

Figura 8

Deci nu este suficient să avem îndeplinite doar ipotezele 1-3, deoarece acestea nu garantează ce se întâmplă pentru mulțimile de informații din afara căii de echilibru.

Observații

1. In cazul E.B.P., ipotezele 1 şi 2 sunt echivalente cu faptul că nu există strategii strict dominate pentru cu orice mulțime de informații.
2. Ipoteza 4 arată faptul că jucătorii nu pot amenința cu a juca strategii strict dominate.

Una dintre cele mai importante categorii de jocuri dinamice în informație incompletă o reprezintă *jocurile de semnalare*.

Jocuri de semnalare

Un joc de semnalare este un joc dinamic în informație incompletă ce presupune doi jucători: Emițătorul (E) şi Receptorul (R) (sau Leader-Follower).

Jocul are următoarea desfăşurare:

Natura alege tipul t al emițătorului din mulțimea de tipuri posibile $T=\{t_1,\ldots,t_n\}$şi probabilitațile asociate fiecăriu tip t_i: $p(t_i)>0$, $\sum p(t_i)=1$.

Emițătorul observă t_i şi alege un mesaj m_j din mulțimea mesajelor $M=\{m_1,\ldots,m_j\}$.

Receptorul observă m_j (nu şi t_i) şi alege o acțiune a_k din mulțimea acțiunilor posibile $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$.

Se determină câştigurile : $U_E(t_i,m_i,a_k)$, $U_R(t_i,m_j,a_k)$.

Observație În multe aplicații T,M şi A sunt intervale din R, (nu doar mulțimi discrete cum am observat aici).

Acest tip de jocuri este foarte folosit în economie:

-Spence (1973) a oferit un model de semnalare pe piața forței de muncă;

-Myers-Maylef (1984) - au elaborat un model de investiții (emițătorul - firma ce doreşte capital, receptorul – eventualul investitor);

-Vickers (1986) – model al politicii monetare (emiţătorul fiind Banca Naţională. şi receptorul piaţa forţei de muncă)

În continuare vom defini diverse tipuri de echilibru ce pot apare în aceste condiţii. În figura 9 este reprezentat un joc de semnalare:

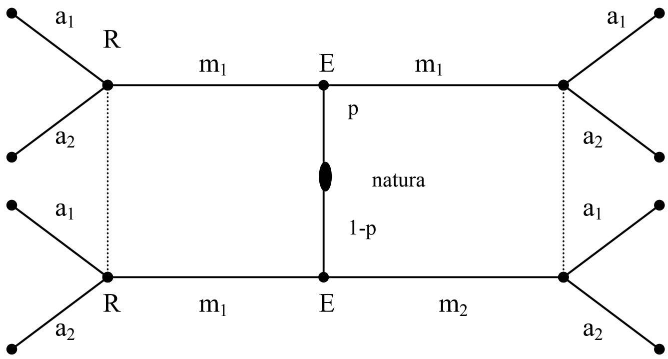

Figura 9

Astfel, vom avea:

- Mulţimea tipurilor, $T=\{t_1,t_2\}$;
- Probabilitatea cu care Natura alege tipul Emiţătorului, $p\{t_1\}=p;$
- Mulţimea mesajelor: $M=\{m_1,m_2\};$
- Mulţimea acţiunilor receptorului *este* $A=\{a_1,a_2\}$.

Reamintim că *o strategie* a jucătorului 1 este dată de un plan complet de acţiune – în raport cu tipul posibil.

În jocurile de semnalare, o *strategie pură* pentru Emiţător (E) este $m(t_i)$ în care se specifică mesajul pe care îl va emite în raport cu tipul său, iar o strategie pură pentru Receptor (R) este o funcţie $a(m_j)$ în care se va specifica ce acţiune se va alege în raport cu mesajul emis.

În jocul descris anterior există 4 strategii pure pentru E şi 4 strategii pure pentru R:

1. $E_1 \rightarrow$ joacă m_1 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_1 dacă este de tipul t_2;
   $E_2 \rightarrow$ joacă m_1 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_2 dacă este de tipul t_2;
   $E_3 \rightarrow$ joacă m_2 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_1 dacă este de tipul t_2;
   $E_4 \rightarrow$ joacă m_2 dacă este de tipul t_1 şi joacă m_2 dacă este de tipul t_2;

2. $R_1 \rightarrow$ joacă a_1 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_1 dacă observă mesajul m_2;
   $R_2 \rightarrow$ joacă a_1 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_2 dacă observă mesajul m_2;
   $R_3 \rightarrow$ joacă a_2 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_1 dacă observă mesajul m_2;
   $R_4 \rightarrow$ joacă a_2 dacă observă mesajul m_1 şi joacă a_2 dacă observă mesajul m_2.

E_1 şi E_4 = se numesc *strategii grupante* (deoarece fiecare tip emite acelaşi mesaj);
E_2 şi E_3 = se numesc *strategii separatoare* deoarece fiecare tip emite mesaje diferite.

Observaţie În jocurile cu mai multe tipuri există posibilitatea sa avem şi stategii "*parţial grupate*", respectiv "*parţial separatoare"(semiseparatoare*).

În jocul descris anterior, o *stategie mixtă* (sau hibridă) presupune că: t_1 alege m_1, dar t_2 alege cu o probabilitate *(p)* mesajul m_1 respectiv cu probabilitatea *(1–p)* mesajul m_2.

Pentru jocurile de semnalare vom defini Echilibrul Bayesian Perfect (aceasta presupune să reformulăm ipotezele 1-4 pentru acest tip de joc)

I_{S1} După ce observă un mesaj m_j din *M*, R face presupuneri despre tipul ce a emis m_j. Dacă notăm presupunerile cu $p(t_i/m_j)$, cu $p(t_i/m_j)\geq 0$ $(\forall)t_i$ în *T* şi $\sum_{t_i\in T} P(t_i/m_j)=1$

I_{R2} Pentru fiecare m_j din *M,* acţiunea actuală a R, ($a^*(m_j)$) va maximiza utilitatea aşteptată a R, date fiind presupunerile sale asupra tipului t_i ce a emis mesajul m_j , $(p(t_i/m_j))$.

Astfel: $a^*(m_j)=\arg\max_{a_j\in A} \sum_{t_j\in T} p(t_i/m_j)\cdot U_R(t_i,m_j,a_{.}$.

I_{S2} Oricare ar fi t_i, mesajul lui E, $(m^*(t_i))$ va maximiza utilitatea aşteptată a E date fiind strategiile *a*(mj)* ale R.

Astfel: $m^*(t_i)=\arg\max_{m_j\in M} U_E(t_i,m_j,a^*(m_j))$.

I_{S3} Pentru fiecare m_i din *M,* dacă există $t_i\in T$ astfel încât $m^*(t_i)=m_j$, atunci presupunerile R despre mulţimea de informaţii corespunzătoare lui m_j trebuie să se determine conform regulii Bayes şi strategiilor E:

$$p(t_i/m_j)=\frac{p(t_i)}{\sum_{t_i\in T} p(t_i)}$$

Definiţia 8. Un E.B.P. în strategii pure pentru un joc de semnalare este o pereche de strategii $m^*(t_i)$ şi $a^*(m_j)$ şi de presupuneri $p(t_i/m_j)$ ce safisfac (I_{S1}), (I_{R2}), (I_{S2}) *şi* (I_{S3}).

În raport cu strategiile E, echilibrul poate fi grupant sau separator.

Exemplul 9

Se consideră jocul de semnalare descris în figura 9.

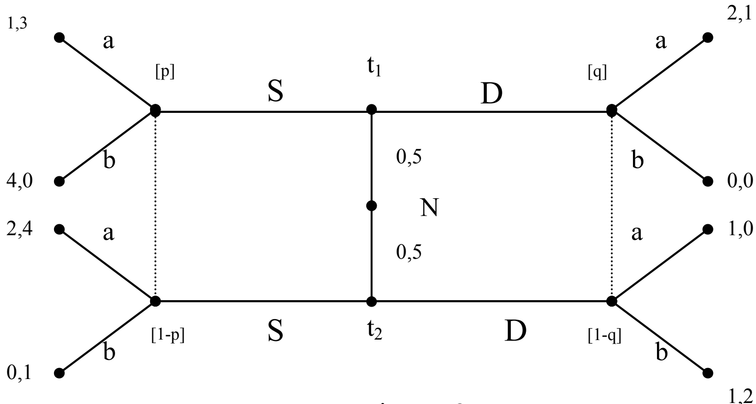

Figura 9

Există 4 tipuri de E.B.P. în strategii pure posibile:

1) grupat în *S*;
2) grupat în *D;*
3) separat, cu t_1-*S*, t_2-*D*;
4) separat cu t_1-*D* , t_2-*S*.

Vom analiza cele patru posibilităţi:

1) Presupunem că echilibrul pentru E este *(S,S),* cu *(m′,m″)* reprezintă faptul că t_1 alege mesajul *m′* iar t_2 alege mesajul *m″.*

Atunci mulțimea de informații corespunzătoare lui *S* este o cale de echilibru, iar presupunerile R vor fi *(p,1-p)* determinate prin regula Bayes şi strategiile E: cu $p=0,5$, probabilitate apriori.

Date fiind aceste presupuneri, cel mai bun răspuns al R este să joace *a* (cu câştigurile 3 sau 4).

Totuşi trebuie să analizăm modul în care R va reacționa la strategia *D*.

Pentru tipul t_1 Dacă răspunsul lui R la *D* este *a*, atunci câştigurile lui E vor fi mai mari decât dacă ar juca *S* $(2 > 1)$.

Dacă răspunsul este *a,* atunci Emițătorul va câştiga 0, mai mic decât 4.

Să deteminăm probabilitatea q astfel încât orice echilibru să fie *((S,S),(a,b))*.

$u_R((S,S), a) = u_R((S,S),b) = (0,5\cdot 1)\cdot q+0,5\cdot 0\cdot(1-q)=0,5\cdot 0\cdot q+2\cdot 0,5\cdot(1-q) \rightarrow$

$0,5\cdot q=1-q, \quad 1,5\cdot q=1, \quad q=2/3$

Deci pentru $q < 2/3$, Receptorul va alege să joace acțiunea *a*.

Deci *a* este optimal pentru R pentru orice $q \leq 2/3$, şi de aici rezultă că echilibrul grupant este *[(L,L),(a,b), p=0,5; q]*.

2) *Pentru tipul* t_2 : $q=0.5$

$$\frac{a(t_i)}{\sum a(t_i)} = 0,5 \quad \Rightarrow \text{BR(R) - cu câştigul 0 pentru } (t_1)$$

- cu câştigul 1 pentru (t_2).

Dar t_1 câştigă 1 jucând *S,*

$1\cdot 0,5<2\cdot 0,5$ deci pentru R este optimal să joace *a*.

Acesta conduce la câştigurile de - 0 pentru *(t1)*

- 1 pentru *(t2)*.

Deci *(D,D)* nu poate fi echilibru deoarece este dominat de strategia *(S,S)* .

3) *echilibre separatoare :*

t1-S

t2-D

Atunci ambele se găsesc pe calea de echilibru rezultă $p=1$ şi $q=0$.

$q=p(t_1/D)=p(t_1)$

$$P(t_1/S)=\frac{P(t_1)}{\sum_{t_i\in T}P(t_i)}=\frac{0,5}{0,5}=1$$

$q(t_1/D)=0$ (deoarece tipul 1 anunță S)

Să vedem dacă pentru E este optimal să devieze de la aceste strategii. Dacă tipul 2 deviază şi alege *S*, atunci câştigul nu va fi 1, ci 2 deoarece şi jucătorul 2 va devia şi va alege *a*, deci acesta nu este un E.B.P.

4) *echilibre separate*

t_1*-D,* t_2 *- S*

$p=0 \quad q=1$

În aceste condiții B.R. pentru R va fi *(a,a),* iar câştigul pentru E va fi de 2. Să verificăm dacă a devia este optimal:

t_1 anunță $S \Rightarrow$ R va juca *a,* cu câştigul lui E de 1. Deci nu este tentat să devieze.

t_2 anunță $D \Rightarrow$ R va juca *b*, cu câştigul lui E de 1. Deci nici aici nu este tentat să devieze.