Capitolul V

TEORIA FIRELOR DE AŞTEPTARE

Considerăm un sistem în care se execută o anumită activitate sau se efectuează un anumit serviciu. Uneori apare un consum de timp inutil şi nedorit al obiectelor sau persoanelor asupra cărora se execută activitatea sau serviciul, datorat fie servirii prea lente, fie numărului prea mic al punctelor de servire, în acest fel luând naştere fenomenele de aşteptare.

Fenomenul de aşteptare constituie unul dintre aspectele negative ale organizării şi desfăşurării activităţii în multe ramuri ale economiei. Aceste fenomene sunt generate de modul în care acţionează (la timp sau cu întârziere) diferiţi factori de producţie, ineficienţa lor conducând la fenomene de aglomerare şi la dereglări ale proceselor de producţie.

Fenomenele de aşteptare iau naştere în:

- porturi;
- punctele de descărcare/încărcare a vehiculelor;
- secţiile în care utilajele aşteaptă prea mult înainte de a fi reparate;
- benzinării;
- magazine;
- spitale;
- circulaţia pe calea ferată.

Teoria firelor de aşteptare permite modelarea matematică şi interpretarea problemelor de aşteptare în sensul obţinerii anumitor reguli de funcţionare optimă a procesului considerat, ţinând seama de restricţiile obiective existente.

Analiza şi optimizarea funcţionării diferitelor sisteme de aşteptare poate porni de la diferite criterii precum: timpul de aşteptare, preţ - cost, rentabilitatea sistemului.

5.1 Elementele unui proces de aşteptare

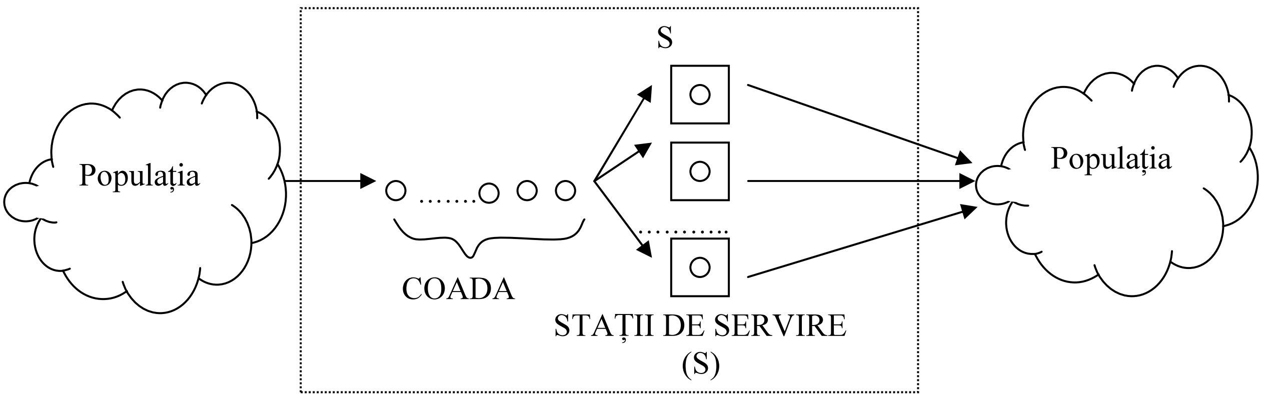

Figura 5.1

a) *Clienţii* = obiecte sau persoane asupra cărora se execută o anumită activitate sau serviciu.

Sosirile clienţilor în sistem se presupun în general întâmplătoare şi independente. De asemenea, se presupune că sosirile urmează o lege de tip Poisson, deci numărul de sosiri succesive în unitatea de timp este o variabilă aleatoare repartizată Poisson. În acest caz se demonstrează (cu ajutorul testelor de verificare a ipotezelor statistice) că intervalul dintre două sosiri succesive este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial negativ.

λ = numărul mediu de sosiri pe unitatea de timp;

$1/\lambda$ = intervalul dintre două sosiri succesive;

Probabilitatea ca la un moment dat în sistem să avem *n* sosiri este $\frac{\lambda^n . e^{-\lambda}}{n!}$

Clienţii pot proveni dintr-o populaţie infinită sau finită.

b) *Staţia de servire* (s)= instalaţia sau persoana care serveşte la un moment dat un singur client. Staţiile de servire pot fi plasate în serie sau în paralel.

Durata serviciului poate fi deterministă sau aleatoare. În calculele ce urmează vom considera că este o variabilă aleatoare, continuă, independentă de la o servire la alta şi independentă de numărul sosirilor. Vom considera că legea ei de repartiţie este exponenţial negativă cu media **$1/\mu$**.

Prin urmare : **μ** = numărul mediu de clienţi serviţi de către o staţie în unitatea de timp, iar **$1/\mu$** = durata medie a servirii.

c) *Firul de aşteptare* (coada) se formează ca urmare a unui ritm mai mare al sosirilor în sistem faţă de ritmul de lucru al staţiei. O parte dintre clienţii aflaţi "la coadă" pot refuza serviciul ca urmare a existenţei timpului de aşteptare.

d) *Disciplina de servire*. Majoritatea sistemelor lucrează după disciplina FIFO (primul sosit= primul servit) . Mai există şi unele sisteme care lucrează cu priorităţi sau la întâmplare.

e) *Factorul de serviciu* (sau factorul intensitate de trafic) **$\rho=\lambda/\mu$** = raportul între numărul mediu de sosiri şi numărul mediu de serviri în unitatea de timp. Indică posibilitatea sistemului de a face faţă solicitărilor. Sistemul se consideră a fi supraaglomerat dacă :

- pentru s = 1 (sistem cu o singură staţie de servire) avem $\rho \geq 1 \Rightarrow \lambda \geq \mu$
- pentru s > 1 $\Rightarrow \rho^* = \frac{\rho}{s} = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \geq 1$

f) *Modul de servire* a unităţilor în sistem poate fi :

- individual: o unitate este servită o singură dată şi părăseşte definitiv sistemul;
- în bloc: sunt servite toate unităţile ce aşteaptă până la un anumit număr stabilit anterior;
- în masă: staţia lucrează continuu pe anumite intervale de timp.

Regimul de lucru al sistemului este STAŢIONAR: volumul intrărilor şi ieşirilor nu depinde de momentul observării.

Ritmul de servire poate fi constant sau variabil dar cu densitatea cunoscută.

g*) Caracteristicile ce se evaluează în analiza sistemului de aşteptare:*

- $\overline{N}$ = numărul mediu de clienţi aflaţi în sistem;
- $\overline{F}$ = numărul mediu de clienţi aflaţi în firul de aşteptare;
- $\overline{S}$ = numărul mediu de clienţi aflaţi în curs de servire (sau numărul mediu al staţiilor ocupate);
- $\overline{L}$ = numărul mediu al staţiilor neocupate;
- $\overline{t_f}$ = timpul mediu de aşteptare la coadă;
- $\overline{t_s}$ = timpul mediu de aşteptare în sistem (inclusiv servirea).

5.2 Modelul de aşteptare cu o staţie de servire şi sosiri dintr-o populaţie infinită

În ipotezele făcute anterior asupra funcţionării sistemului, vom analiza modelul pornind de la momentul iniţial $t = 0$.

Numărul de staţii al sistemului $s = 1$.

Notăm cu $\Delta t > 0$ momentul în care înregistrăm o sosire;

$A_{(\Delta t)}$ = probabilitatea de a avea o sosire la momentul $\Delta t > 0$.

Din ipoteza că sosirile sunt Poissoniene rezultă că timpul dintre două sosiri succesive în sistem este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial negativ de parametru λ, având densitatea de repartiţie :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0 \ , \ x \le 0 \ cu \ \lambda > 0 \end{cases}$$

Avem atunci :

$$A_{(\Delta t)} = \lambda \int_0^{\Delta t} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

Dezvoltând în serie în jurul originii funcţia $e^{-\lambda \Delta t}$ obţinem:

$$A_{(\Delta t)} = 1 - [1 - \lambda \Delta t + \frac{(\lambda \Delta t)^2}{2!} + \ldots] = \lambda \cdot \Delta t + \theta_{(\Delta t)},$$

Unde $\theta(t)$ are proprietatea că $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Notăm cu: $A_{(t,\ t+\Delta t)}$ = probabilitatea de a înregistra o sosire în intervalul de timp $(t,\ t+\Delta t)$. În ipotezele stabilite avem:

$$A_{(t,\ t+\Delta t)} = \lambda \int_t^{t+\Delta t} e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t} - e^{-(t+\Delta t)\lambda} = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda \Delta t}),$$

adică

$$A_{(t,\ t+\Delta t)} = [1 - A_{(t)}] \cdot A_{(\Delta t)}.$$

Deci probabilitatea de a înregistra o sosire în intervalul de timp *(t, t+Δt)* este egală cu probabilitatea de a nu avea nici o sosire la momentul *t* şi (înmulţită cu) probabilitatea de a înregistra o sosire la momentul *Δt*.

Analog se calculează probabilitatea ca o unitate să părăsească sistemul la un moment dat $\Delta t > 0$ şi pe care o notăm :

$$B_{(\Delta t)} = \mu \cdot \Delta t + \theta_{(\Delta t)}$$

Aceste ipoteze ne permit să exprimăm probabilitatea ca la momentul *(t + Δt)* în sistem să avem *n* unităţi (clienţi):

$$P_{n(t+\Delta t)} = P_{n-1(t)} \cdot A_{(\Delta t)}[1 - B_{(\Delta t)}] + P_{n(t)}[1 - A_{(\Delta t)}][1 - B_{(\Delta t)}] \\ + P_{n+1(t)}[1 - A_{(\Delta t)}] \cdot B_{(\Delta t)} + \theta_{(\Delta t)} \qquad (1)$$

Relaţia (1) s-a obţinut din faptul că probabilitatea ca sistemul să se afle în starea S_n (să existe *n* unităţi în sistem) la momentul *(t + Δt)* este suma următoarelor probabilităţi:

- probabilitatea ca la momentul *t* sistemul să fie în starea S_{n-1} şi de la *t* la *Δt* în sistem să sosească o unitate şi să nu plece nici una: $P_{n-1(t)}A_{(\Delta t)}[1-B_{(\Delta t)}]$;

-probabilitatea ca la momentul *t* să fim în starea S_n şi în intervalul *(t, t+Δt)* să nu sosească şi să nu plece nici o unitate: $P_{n(t)}[1-A_{(\Delta t)}][1-B_{(\Delta t)}]$;

-probabilitatea ca la momentul *t* să fim în starea S_{n+1} şi de la *t* la *Δt* să nu sosească nici o unitate şi să plece una singură: $P_{n+1(t)}[1-A_{(\Delta t)}]B_{(\Delta t)}$;

-probabilitatea ca în intervalul *(t, t+Δt)* numărul unităţilor din sistem să varieze cu mai mult de 1: $\theta_{(\Delta t)}$.

Pentru $n \geq 1$, înlocuind pe $A_{(\Delta t)}$ şi $B_{(\Delta t)}$, în (1) se obţine:

$$P_{n(t+\Delta t)} = P_{n-1(t)}[\lambda \cdot \Delta t + \theta_{(\Delta t)}][1 - \mu\Delta t - \theta_{(\Delta t)}] + \\ + P_{n(t)}[1 - \lambda \cdot \Delta t - \theta_{(\Delta t)}][1 - \mu\Delta t - \theta_{(\Delta t)}] + \\ + P_{n+1(t)}[1 - \lambda \cdot \Delta t - \theta_{(\Delta t)}][\mu\Delta t + \theta_{(\Delta t)}] + \theta_{(\Delta t)},$$

şi ordonând după puterile lui Δt :

$$P_{n(t+\Delta t)} = P_{n-1(t)}\, \lambda \cdot \Delta t + P_{n(t)}[1 - (\lambda + \mu)\Delta t + P_{n+1(t)}\mu\Delta t + \theta_{(\Delta t)}, \quad \text{sau}$$

$$\frac{P_{n(t+\Delta t)} - P_{n(t)}}{\Delta t} = \lambda P_{n-1(t)} - (\lambda + \mu)P_{n(t)} + \mu P_{n+1(t)} + \frac{\theta_{(\Delta t)}}{\Delta t}.$$

Făcând pe *Δt* să tindă la 0, cel de-al doilea membru al egalităţii are limită, de unde rezultă că şi membrul stâng are limită şi obţinem:

$$\frac{dP_{n(t)}}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1(t)} - (\lambda + \mu)P_{n(t)} + \mu \cdot P_{n-1(t)}, n \geq 1. \qquad (2)$$

Pentru *n* = 0 obţinem o ecuaţie specială dacă exprimăm pe $P_{0(t+\Delta t)}$:

$$P_{0(t+\Delta t)} = P_{0(t)}[1 - A_{(\Delta t)}] + P_{1(t)}[1 - A_{(\Delta t)}] \cdot B_{(\Delta t)} + \theta_{(\Delta t)},$$

şi procedând ca în cazul $n \geq 1$ vom obţine:

$$\frac{P_{0(t+\Delta t)} - P_{0(t)}}{\Delta t} = -\lambda \cdot P_{0(t)} + \mu \cdot P_{1(t)} + \frac{\theta_{(\Delta t)}}{\Delta t}.$$

Făcând pe Δt să tindă la 0 se obţine:

$$\frac{dP_{0(t)}}{dt} = -\lambda P_{0(t)} + \mu \cdot P_{1(t)} \qquad (3)$$

Ecuaţiile diferenţiale (2) şi (3) sunt ecuaţiile de stare ce caracterizează sistemul de aşteptare. Rezolvarea acestor ecuaţii ne permite să determinăm probabilitatea ca la un moment dat în sistem să avem n unităţi, $P_{n(t)}$. Această probabilitate va fi determinată în cazul **regimului staţionar** de funcţionare (sau al echilibrului static) caracterizat de faptul că:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

În această situaţie, $P_{n(t)} = p_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ şi sistemul de ecuaţii diferenţiale (2), (3) se reduce la un sistem de ecuaţii algebrice liniare de forma:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 & , n=0 \qquad (4.1) \\ \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + \mu) p_n + \mu p_{n+1} = 0, & n = 1,2,\ldots \qquad (4.2) \end{cases} \qquad (4),$$

sistem uşor rezolvabil.

Din (4.2) $\underbrace{\lambda p_{n-1} - \mu p_n}_{z_n} = \underbrace{\lambda p_n - \mu p_{n+1}}_{z_{n+1}} \Rightarrow z_n = z_{n+1}, n = 1,2,3,\ldots$

(4.1) $\Rightarrow z_1 = \lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \qquad \Rightarrow z_n = 0, n = 1,2,3,\ldots$,

şi de aici

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{n-1} = \rho \cdot p_{n-1}, n = 1,2,3\ldots \qquad \Rightarrow p_n = \rho^n \cdot p_0$$

Dacă $\rho < 1$, p_0 se determină astfel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \quad \text{şi deoarece} \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow 1 = p_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow p_0 = 1 - \rho$$

Determinarea parametrilor modelului

a) *Numărul mediu de unităţi din sistem* ($\overline{N}$)

Numărul de unităţi din sistem (N) este o variabilă aleatoare discretă descrisă astfel:

$$N: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ P_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

Valoarea medie a lui *N* este:

$$\overline{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n \cdot p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n (1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n$$

$$\overline{N} = (1-\rho)(0 \cdot \rho^0 + 1 \cdot \rho^1 + 2 \cdot \rho^2 + \ldots + n \cdot \rho^n + \ldots) =$$

$$= (1-\rho) \cdot \rho \cdot (1 \cdot \rho^0 + 2 \cdot \rho^1 + \ldots + n \cdot \rho^{n-1} + \ldots) =$$

$$= (1-\rho) \cdot \rho \cdot \frac{d(\rho^1 + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots)}{d\rho}(1-\rho) \cdot \rho \cdot (\frac{d}{d\rho} \cdot \frac{1}{1-\rho}) =$$

$$= (1-\rho) \cdot \rho \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

b) *Numărul mediu de unităţi din firul de aşteptare ($\overline{F}$)*

Numărul de unităţi din firul de aşteptare este o variabilă aleatoare discretă descrisă de distribuţia de probabilitate:

$$F : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ p_0 + p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\overline{F} = M(F) = 0 \cdot (p_0 + p_1) + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^{n+1}(1-\rho) =$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^{n+1} = (1-\rho) \cdot \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} = (1-\rho) \cdot \rho^2 (\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n)' =$$

$$= (1-\rho) \cdot \rho^2 \cdot (\frac{1}{1-\rho})' = (1-\rho) \cdot \rho^2 \cdot \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\Rightarrow \overline{F} = \rho \cdot \overline{N} \Rightarrow \frac{\overline{F}}{\lambda} = \frac{\overline{N}}{\mu}$$

c) *Numărul mediu al staţilor ocupate* ($\overline{S}$) este o variabilă aleatoare discretă descrisă prin:

$$S : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_0 & 1-p_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{S} = M(S) = 1 - p_0 = 1 - (1-\rho) = \rho .$$

$\overline{S}$ indică procentul mediu de ocupare a staţiei.

d) *Numărul mediu al staţiilor libere ($\overline{L}$)*

Din $\overline{L} + \overline{S} = \underbrace{1}_{\text{o staţie}} \Rightarrow \overline{L} = 1 - \overline{S} = 1 - \rho$

e) *Timpul mediu de aşteptare în fir înainte de a fi servit* ($\overline{t_f}$)

$$\overline{t_f} = \frac{\overline{F}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}\cdot\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\overline{N}}{\mu}.$$

f) *Timpul mediu de aşteptare în sistem* ($\overline{t_s}$) este suma dintre timpul de aşteptare în fir şi durata de servire:

$$\overline{t_s} = \overline{t_f} + \frac{1}{\mu}.$$

g) Un indicator frecvent utilizat în analiza sistemului de aşteptare este *probabilitatea ca o unitate să aştepte în fir un timp superior unui timp dat ω, $P_{(t>\omega)}$.*

$$P(t \geq \omega) = \rho \cdot e^{-\mu\omega(1-\rho)}.$$

În particular , probabilitatea ca o unitate să aşetpte înainte de a fi servită este $P(t>0)=\rho$ = factorul de servire,

iar probabilitatea ca o unitate să nu aştepte este

$1-P(t>0)=1-\rho$ *sau* $P(N=0)=p_0=1-\rho$.

5.3 Modelul de aşteptare cu mai multe staţii de servire şi unităţi provenind dintr-o populaţie infinită

Schema generală a sistemului:

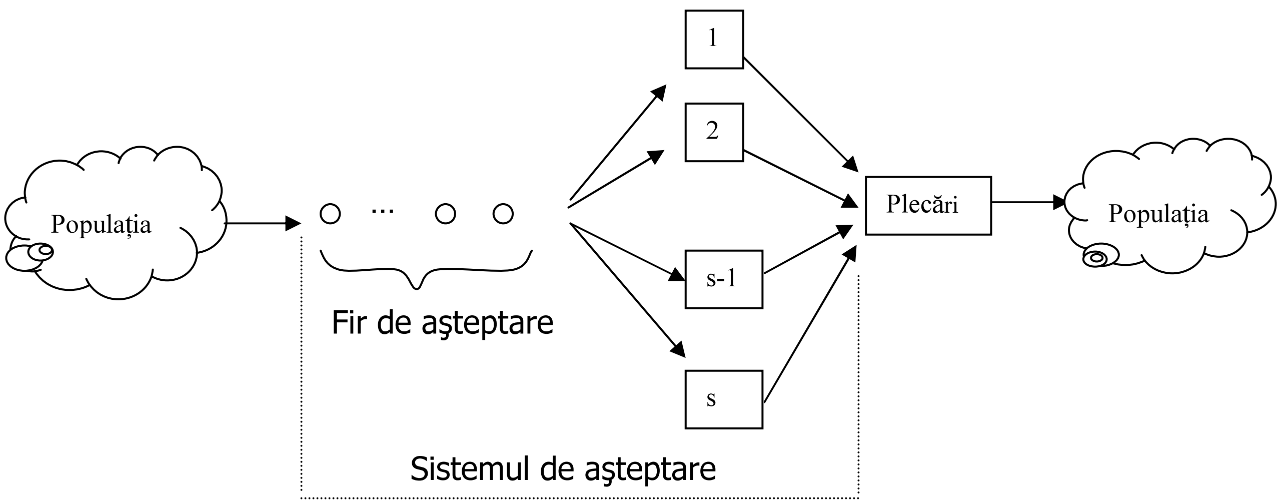

Figura 5.2

Ipoteze:

În sistem există *s* staţii de servire. Disciplina de servire este FIFO. Firul de aşteptare este nelimitat, sosirile sunt aleatoare şi urmează o lege tip Poisson de medie λ.

Durata medie a servirilor este o variabilă aleatoare cu distribuţia exponenţial negativă.

Problemele noi ce apar în cazul acestui model vizează determinarea numărului minim de staţii necesare sistemului pentru a desfăşura activitatea în condiţii optime pentru solicitanţi şi cu cheltuieli cât mai mici pentru întreţinerea în stare de funcţionare a sistemului.

În cazul acestui model, factorul intensitate de trafic se determină cu relaţia:

$$\rho^* = \frac{\rho}{s},\ unde \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Dacă $\rho^* < 1$,sistemul este dimensionat corespunzător, putând face faţă solicitărilor; dacă $\rho^* \geq 1$ sistemul este aglomerat.

Pentru a obţine acest model exprimăm mai întâi:

- probabilitatea ca într-un interval de timp *Δt* > 0 să avem o sosire în sistem:

$$A_{(\Delta t)} = \lambda \cdot \Delta t + \theta_{(\Delta t)};$$

- probabilitatea ca o unitate să părăsească o staţie este:

$$B_{(\Delta t)} = \mu \cdot \Delta t + \theta_{(\Delta t)}.$$

Presupunem că în sistem se găsesc *n* unităţi . Avem de analizat două situaţii:

a) *0 ≤ n < s*

În acest caz fiecare din cele *n* unităţi poate părăsi sistemul într-un interval de timp *Δt* cu probabilitatea:

$$B_{n(\Delta t)} = 1 - [1 - B_{(\Delta t)}]^n = n \cdot B_{(\Delta t)} + \theta_{(\Delta t)}.$$

b) *n ≥ s*

Toate staţiile sunt ocupate. Probabilitatea ca o unitate să părăsească sistemul va fi:

$$B_{n(\Delta t)} = s \cdot B_{(\Delta t)} + \theta_{(\Delta t)}, n = s, s+1, \ldots .$$

Pentru a exprima în cele două cazuri probabilitatea $P_{n(t+\Delta t)}$, descompunem evenimentul în următoarele evenimente incompatibile:

- probabilitatea ca la momentul *t* în sistem să fie *n* unităţi şi în intervalul *(t,t+Δt)* să nu aibă loc nici o sosire, nici o servire;

- probabilitatea ca la momentul *t* în sistem să fie *n-1* unităţi şi în intervalul *(t,t+Δt)* să se producă o sosire şi nici o plecare;

- probabilitatea ca la momentul *t* în sistem să fie *n+1* unităţi şi în intervalul *(t,t+Δt)* să se producă o plecare şi nici o sosire;

- probabilitatea ca numărul unităţilor din sistem să varieze cu mai mult de 2 unităţi în intervalul *(t, t+Δt)*.

Obţinem :

$$P_{n(t+\Delta t)} = P_{n-1(t)} \cdot A_{(\Delta t)}[1 - B_{n-1(\Delta t)}] + P_{n(t)}[1 - A_{(\Delta t)}][1 - B_{n(\Delta t)}] + P_{n+1(t)}[1 - A_{(\Delta t)}] \cdot B_{n+1(\Delta t)} + \theta_{(\Delta t)}$$

Particularizând în funcţie de situaţiile a) şi b) şi prelucrând relaţia obţinem:

$$\begin{cases} a)\dfrac{P_{n(t+\Delta t)} - P_{n(t)}}{\Delta t} = \lambda \cdot P_{n-1(t)} - (\lambda + n \cdot \mu)P_{n(t)} + (n+1)\mu \cdot P_{n+1(t)} + \dfrac{\theta_{(\Delta t)}}{\Delta t}, n = 1,2,\ldots s - \\ b)\dfrac{P_{n(t+\Delta t)} - P_{n(t)}}{\Delta t} = \lambda \cdot P_{n-1(t)} - (\lambda + s \cdot \mu)P_{n(t)} + s \cdot \mu \cdot P_{n+1(t)} + \dfrac{\theta_{(\Delta t)}}{\Delta t}, n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

Pentru $n = 0$:

$$\frac{P_{0(t+\Delta t)} - P_{0(t)}}{\Delta t} = -\lambda P_{0(t)} + \mu P_{1(t)} + \frac{\theta_{(\Delta t)}}{\Delta t}, \; şi \qquad pentru \qquad \Delta t \to 0$$

obţinem:

$$\frac{dP_{0(t)}}{dt} = -\lambda \cdot P_{0(t)} + \mu P_{1(t)} .$$

Pentru $n > 0$:

$$\begin{cases} a)\dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1}(t) - (\lambda + n \cdot \mu)P_n(t) + (n+1)\mu \cdot P_{n+1}(t), n = \overline{1, s-1} \\ b)\dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1}(t) - (\lambda + s \cdot \mu)P_n(t) + s \cdot \mu \cdot P_{n+1}(t), n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

Presupunând cazul regimului staţionar în care

$$\lim_{t \to 0} \frac{dP_{n(t)}}{dt} = 0,$$

obţinem că probabilităţile stărilor verifică sistemul ecuaţiilor algebrice de stare:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0 & (5.1) \\ \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) p_n + (n+1)\mu p_{n+1} = 0, n = \overline{1, s-1} & (5.2) \\ \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + s\mu) p_n + s\mu p_{n+1} = 0, n = s, s+1, \ldots & (5.3) \end{cases} \quad (5)$$

Rezolvare:

Din $(5.2) \Rightarrow p_n = \frac{\rho}{n} \cdot p_{n-1} = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \; n = 1,2,3 \ldots s-1$.

Dacă în (5.3) facem pe $n = s$ obţinem

$$p_{S+1} = \frac{1}{s \cdot \mu} [(\lambda + s \cdot \mu) p_s - \lambda \cdot p_{S-1}] = \frac{\rho^{S+1}}{s \cdot s!} p_0 .$$

Înlocuind apoi pe $n = s+1, s+2, \ldots$, se obţine

$$p_{s+r} = \frac{\rho^{s+r}}{s^r \cdot s!} \cdot p_0, sau \qquad p_n = \frac{\rho^n}{s! \, s^{n-s}} \cdot p_0, n = s, s+1, \ldots$$

Avem deci:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \le n < s \\ \dfrac{\rho^n}{s! \, s^{n-s}} p_0, & n \ge s \end{cases}$$

Din $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ obţinem:

$$1 = p_0\left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\rho}{s}}\right) \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!(1-\rho^*)}}$$

Caracteristicile sistemului

a) $\overline{F}$

$$F: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p_0+p_1+p_2+\dots+p_s & p_{s+1} & p_{s+2} & \dots & p_{s+n} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\overline{F} = M(F) = 1\cdot p_{s+1} + 2\cdot p_{s+2} + \dots + n\cdot p_{s+n} + \dots$$

Din calculul p_n se deduce că

$$\overline{F} = \sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)p_n = p_0\frac{\rho^s}{s!}\sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)\frac{\rho^{n-s}}{s^{n-s}} = p_0\cdot\frac{\rho^s}{s!}\cdot\frac{\rho^*}{(1-\rho^*)^2}$$

$\overline{F}$ = derivata unei serii geometrice care este convergentă dacă raţia $\rho^*<1$.

b) $\overline{S}$

$$S: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & s-1 & s \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{s-1} & 1-(p_0+p_1+\dots+p_{s-1}) \end{pmatrix}$$

$$\overline{S} = M(S) = p_1 + 2p_2 + \dots + (s-1)p_{s-1} + s[1-(p_0+p_1+\dots+p_{s-1})] = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

c) $\overline{N}$

$$N = F + L \Longrightarrow \overline{N} = \overline{F} + \overline{S} = \overline{F} + s - \overline{L} = \overline{F} + \rho$$

d) Numărul de staţii libere ($\overline{L}$) este o variabilă aleatoare ce satisface relaţia:
$S + L = s \quad \Rightarrow \quad \overline{L} = s - \overline{S} = s - \rho.$

e) $\overline{t_f} = \frac{\overline{F}}{\lambda}$.

f) $\overline{t_s} = \overline{t_f} + \frac{1}{\mu}$.

5.4 Exemple numerice

Exemplul 1

Într-un schimb de 8 ore la un atelier de reparaţii auto sosesc în medie 5 maşini defecte. Deservirea este făcută de un singur mecanic. Sosirile sunt poissoniene iar serviciul exponenţial negativ. Mecanicul repară în medie 0,9 maşini/oră.

Să se determine :

a) $\overline{t_f}, \overline{t_s}, \overline{F}$;

b) Suprafaţa necesară pentru parcarea maşinilor defecte ştiind că pentru o maşină sunt necesari 6 m^2;

c) Probabilitatea ca în atelier să existe cel mult 2 maşini;

d) Probabilitatea ca mecanicul să nu aibă ce lucra;

e) Care este procentul mediu de ocupare al mecanicului la nivelul unui schimb;

f) Probabilitatea ca la un moment dat în atelier să existe cel puţin 3 maşini.

Rezolvare:

Sistemul are o singură staţie , sosirile dintr-o populaţie infinită.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 5 \text{ maşini/8 ore}=0{,}625 \text{ sosiri/oră}\\ \mu = 0{,}9 \text{ maşini /oră}\end{array}\right\} \Longrightarrow \rho = \lambda/\mu = 0{,}69<1$$

a) $\overline{F}=\rho^2/1-\rho=1{,}536$ maşini $\Rightarrow$ $\overline{t_f} = \dfrac{\overline{F}}{\lambda}=1{,}536/0{,}625=2{,}45$ ore

$$\overline{t_s} = \overline{t_f} + \frac{1}{\mu} =2{,}45+1/0{,}9=3{,}55 \text{ ore}$$

În firul de aşteptare în medie se află 1,536 maşini care aşteaptă 2,45 ore până să fie servite, iar în total petrec în sistem 3,55 ore.

b) $\overline{N} = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \overline{F} + \overline{S} = 1{,}536 + 0{,}69 = 2{,}23$ maşini $\Rightarrow 2 < \overline{N} < 3 \Rightarrow$ suprafaţa necesară este de $3 \cdot 6=18$ m^2.

c)

$$P_{(\overline{N}\le 2)} = p_0 + p_1 + p_2 = p_0 + \rho\cdot p_0 + \rho^2 \cdot p_0 = p_0(1+\rho+\rho^2) = (1-\rho)\frac{1-\rho^3}{1-\rho} = 1-\rho^3 = 0{,}657 \approx 0{,}66$$

$\Rightarrow$ Există 66% şanse ca în atelier să existe cel mult 2 maşini.

d) $P_{(\overline{N}=0)} = p_0 = 1-\rho = 0{,}31 \Rightarrow$ În 31% din cazuri atelierul este gol.

e) $\overline{S}$ = numărul mediu de maşini în curs de reparare = 0,69 $\Rightarrow$
la nivelul unui schimb mecanicul este în medie ocupat în proporţie de 69% din timp.

f) $P_{(\overline{N}\ge 3)} = 1 - P_{(\overline{N}\le 2)} = 0{,}343$.